# DS1 (version A)

## Exercice 1

On désigne par $I$ la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

***1.*** ***a)*** Calculer $(A - 2I)(A - I)^2$.

***b)*** En déduire que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.

***2.*** On note $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = 2 \cdot X\}$.

***a)*** Résoudre le système suivant : $(S_1) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 2\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right.$.

***b)*** Déterminer $E_2(A)$.

***c)*** En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_2(A)$.

***3.*** On note $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = X\}$.

***a)*** Résoudre le système : $(S_2) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$

***b)*** Déterminer $E_1(A)$.

***c)*** En déduire que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_1(A)$.

***4.*** On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

***a)*** Démontrer que $P$ est inversible et déterminer son inverse.

***b)*** Montrer que $P^{-1}\,A\,P = T$ où $T$ est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

***c)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\,T^n\,P^{-1}$.

***5.*** ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $T$ s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

***b)*** Calculer $N^2$ et en déduire $N^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

***c)*** Soit $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer $T^n$ en fonction des matrices $D$ et $N$, à l'aide de la formule du binôme de Newton.

# Exercice 2

## Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$.

***1.*** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

***a)*** Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

***b)*** Étudier les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations.

***c)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = f(n)$.

***d)*** En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

***e)*** Écrire une fonction d'en-tête : `function y = u(n)` qui prend en argument un entier naturel $n$ non nul et qui renvoie la valeur de $u_n$.

***2.*** ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

***b)*** Montrer que pour tout réel $x$ positif : $\ln(1+x) \leqslant x$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

***c)*** `(CUBES uniquement - admis pour les autres)`
Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

***d)*** Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

***e)*** Pour $n \geqslant 2$, simplifier la somme partielle : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers $\gamma$.

***3.*** ***a)*** Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

***b)*** Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$$

puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_n - \gamma\right| \leqslant \frac{1}{n}$$

***c)*** On rappelle que l'instruction `floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel $x$ et on suppose que la fonction `u` de la question ***1.e)*** a été correctement programmée.
Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
eps = input('Entrer un réel strictement positif : ')
n = floor(1/eps) + 1
disp(u(n))
```

## Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel $n$, on pose $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

***4.*** Démontrer que la série de terme général $a_n$ converge.

***5. a)*** Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}$.

***b)*** Déterminer deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n-1}$.

***c)*** En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k}$.

***6. a)*** Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

***b)*** Calculer alors $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$.

***7. a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

***b)*** Retrouver alors le résultat de la question ***6.b)***.

# Exercice 3

On considère la fonction $f : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x$ de $]0,+\infty[$, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

### Partie I : Étude de la fonction $f$

***1. a)*** Montrer que $f$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout $x$ de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

***b)*** Dresser le tableau de variations de $f'$ avec la limite de $f'$ en 0 et la limite de $f'$ en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

***2.*** Dresser le tableau de variations de $f$ avec la limite de $f$ en 0 et la limite de $f$ en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

***3.*** Tracer l'allure de la courbe représentative de $f$.

***4. a)*** Étudier les variations de la fonction $u : \begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) - x \end{array}$.

***b)*** En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in\ ]0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée $\alpha$, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

## Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

***5.*** Montrer que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n$ existe et $u_n \geqslant 2$.

***6.*** ***a)*** Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \begin{array}{ccc} [2,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)-x \end{array}$.

***b)*** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

***7.*** Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

***8.*** Écrire un programme en **Scilab** qui, étant donné un réel $A$, renvoie un entier naturel $N$ tel que $u_N \geqslant A$.

***9.*** ***a)*** Démontrer : $\forall x \in [2,+\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$.

***b)*** En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\, u_n$.

***c)*** Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

## Partie III : Étude d'intégrales généralisées

***10.*** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ converge et calculer cette intégrale.

***11.*** L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge-t-elle ?

***12.*** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\,dx$ converge. On pourra utiliser le résultat de la question ***9.a)***.