DS1 (version A) /158

Exercice 1 /33

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *a)* Calculer $(A-2I)(A-I)^2$.

- **1 pt :** $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

- **1 pt :** $(A-2I)(A-I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

- **1 pt :** $(A-2I)(A-I)^2 \ = \ A^3 - 4A^2 + 5A - 2I$

- **1 pt :** $A^{-1} \ = \ \dfrac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I)$

2. On note $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = 2 \cdot X\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_1) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 2\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right.$.

- **1 pt : résolution du système**

b) Déterminer $E_2(A)$.

- **1 pt : écriture système**

- **1 pt :** $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

c) En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_2(A)$.

- **1 pt :** $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **donc** $E_2(A)$ **est un sous-espace vectoriel de** $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

- **1 pt :** $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **engendre** $E_2(A)$

- **1 pt :** $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **est libre**

3. On note $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = X\}$.

a) Résoudre le système : $(S_2) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$

- 1 pt : résolution du système

b) Déterminer $E_1(A)$.

- 1 pt : écriture système

- 1 pt : $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

c) En déduire que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_1(A)$.

- 1 pt : $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ **donc** $E_1(A)$ **est un sous-espace vectoriel de** $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

- 1 pt : $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ **engendre** $E_1(A)$

- 1 pt : $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ **est libre**

4. On note $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & -1\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

- 3 pts : $P^{-1} = \begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\-1 & 2 & 1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

b) Montrer que $P^{-1}\,A\,P = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

- 1 pt : pour $P^{-1}A = \begin{pmatrix}4 & -4 & -2\\-4 & 5 & 4\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ **ou pour** $AP = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\0 & 1 & 2\\2 & 0 & 2\end{pmatrix}$

- 1 pt : pour $P^{-1}AP = T$**.**

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P\,T^n\,P^{-1}$.

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

5. a) Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- 1 pt : $N = T - D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 3\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- 1 pt : $N^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

- 1 pt : récurrence immédiate

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer T^n en fonction des matrices D et N, à l'aide de la formule du binôme de Newton.

- 1 pt : D **et** N **commutent**

- 1 pt : formule du binôme correcte

- 1 pt : découpage valable car $n \geqslant 1$

- 1 pt : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

- 1 pt : $T^n \ = \ D^n + n\, D^{n-1}\, N$

- 1 pt : cas $n = 0$

Exercice 2 /46

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

- 1 pt : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

- 1 pt : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations.

- 1 pt : f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

- 1 pt : $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0$ **car** $x > 0$

- 1 pt : tableau complet

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$
Variations de f	‖	$-\infty \nearrow 0$

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = f(n)$.

- 1 pt : calcul correct

d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

- 1 pt : $u_{n+1} - u_n = f(n) \leqslant 0$ **d'après le tableau de variations donc** (u_n) **est décroissante**

e) Écrire une fonction d'en-tête : `function y = u(n)` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n.

- 1 pt : syntaxe fonction et indentation

- 1 pt : initialisation avant boucle for

- 1 pt : taille boucle for

- 1 pt : contenu boucle for

2. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

- 1 pt : calcul correct

b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leqslant x$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

- 1 pt : argument de concavité ou étude de fonction

- 1 pt : application de l'inégalité en $x = 1/n$ justifiée (on peut le faire car $1/n \geqslant 0$)

- 1 pt : $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$

c) `(CUBES uniquement - admis pour les autres)`
Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

- 1 pt : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ **(DL usuel)**

- 1 pt : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}-v_n}{\frac{1}{2n^2}} = 1$

d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

- 1 pt : $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$

- 1 pt : les séries sont à termes positifs

- 1 pt : la série $\sum \frac{1}{n^2}$ **est une série de Riemann d'exposant** $\alpha = 2 > 1$ **donc converge**

- 1 pt : par critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\ v_{n+1} - v_n$ **converge**

e) Pour $n \geqslant 2$, simplifier la somme partielle : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers γ.

- 1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1 = v_n$ **(**$v_1 = 0$**)**

- 1 pt : la série $\sum\ v_{n+1} - v_n$ **est convergente de somme** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \gamma$ **donc la suite** (v_n) **converge vers** γ

3. a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

- 1 pt : $u_n = v_n + \frac{1}{n}$ **donc** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \gamma$

b) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$$

puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_n - \gamma\right| \leqslant \frac{1}{n}$$

- 1 pt : la suite (u_n) **est décroissante et** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \gamma$ **donc pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$**,** $u_n \geqslant \gamma$

- 1 pt : la suite (v_n) **est croissante et** $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \gamma$ **donc pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$**,** $v_n \leqslant \gamma$

- 1 pt : $v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$ **donc** $v_n - u_n \leqslant \gamma - u_n \leqslant 0$ **donc** $-\frac{1}{n} \leqslant \gamma - u_n \leqslant \frac{1}{n}$ **donc** $\left|u_n - \gamma\right| \leqslant \frac{1}{n}$

c) On rappelle que l'instruction `floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction `u` de la question *1.e)* a été correctement programmée.
Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
eps = input('Entrer un réel strictement positif : ')
n = floor(1/eps) + 1
disp(u(n))
```

- 1 pt : intérêt : le programme renvoie une valeur approchée de γ **à** ϵ **près**

- 1 pt : fonctionnement : si $n\lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$ **alors** $n \geqslant \frac{1}{\epsilon}$ **donc** $\frac{1}{n} \leqslant \epsilon$ **donc** $\left|u_n - \gamma\right| \leqslant \epsilon$

Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

4. Démontrer que la série de terme général a_n converge.

- **1 pt :** $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$
- **1 pt : les séries sont à termes positifs**
- **1 pt : la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$ donc converge**
- **1 pt : par critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum a_n$ converge**

5. a) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}$.

- **1 pt : découpage en termes pairs et impairs de la somme $\sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k}$ bien écrit**
- **1 pt : changement d'indices corrects**

b) Déterminer deux réels α et β tels : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n-1}$.

- **1 pt :** $\alpha = -1$ **et** $\beta = 2$

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k}$.

- **2 pt : calcul correct**

6. a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

- **2 pt : calcul correct**

b) Calculer alors $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 2(u_{2n} - u_n + \ln(2))$
- **1 pt : passage à la limite** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\ln(2)$

7. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

- **1 pt : calcul correct**

b) Retrouver alors le résultat de la question ***6.b)***.

- **1 pt : la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est continue sur** $[0,1]$
- **1 pt : somme de Riemann :** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\frac{k}{n}} = \ln(2)$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = 2 \times \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\frac{k}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\ln(2)$

Exercice 3 / 59

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0,+\infty[$, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

- **1 pt :** $\exp$ **et** $\ln$ **sont deux fois dérivables sur** $]0,+\infty[$ **donc par somme** f **est deux fois dérivable sur** $]0,+\infty[$
- **1 pt :** $f'(x) = \mathbf{e}^x - \frac{\mathbf{e}}{x}$
- **1 pt :** $f''(x) = \mathbf{e}^x + \frac{\mathbf{e}}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = +\infty$
- **1 pt :** $f'(1) = 0$
- **1 pt : tableau complet**

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f''(x)$	||	$+$		$+$	
Variations de f'	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
- **1 pt :** $f(1) = \mathbf{e}$
- **1 pt : tableau complet**

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f	|| $+\infty$	$\searrow$	$\mathbf{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

- **1 pt : point remarquable** $(1, e)$
- **1 pt : tangente horizontale en** 1
- **1 pt : respect variations et limites**
- **1 pt : respect de la convexité**

4. *a)* Étudier les variations de la fonction $u : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x)-x \end{array}$.

- **1 pt :** u **est dérivable sur** $]0,+\infty[$
- **1 pt :** $u'(x) = \mathbf{e}^x - 1 + \frac{\mathbf{e}}{x^2}$
- **1 pt : u est strictement croissante**

b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in\,]0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

- **1 pt :** u **est continue et strictement croissante sur** $]0,+\infty[$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = -\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to +\infty} u(x) = +\infty$
- **1 pt :** u **réalise une bijection de** $]0,+\infty[$ **sur** $u(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$
- **1 pt :** $0 \in]-\infty,+\infty[$ **donc l'équation** $f'(x) = x$ **admet une unique solution sur** $]0,+\infty[$**, notée** α
- **1 pt :** $u(1) = -1 < 0$ **et** $u(2) = \mathbf{e}^2 - \frac{\mathbf{e}}{2} - 2 > 0$
- **1 pt :** $u(1) < u(\alpha) < u(2)$ **et en composant par l'inverse de** u**, strictement croissante sur** $\mathbb{R}$**, on obtient** $1 < \alpha < 2$

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pt : hérédité**

6. *a)* Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)-x \end{array}$.

- **1 pt :** g **est dérivable sur** $[2,+\infty[$ **comme somme de fonctions dérivables sur** $[2,+\infty[$
- **1 pt :** $g'(x) = \mathbf{e}^x - \frac{\mathbf{e}}{x} - 1 > 0$ **car** $x \geqslant 2 \geqslant \alpha$
- **1 pt :** $g(2) = \mathbf{e}^2 - \mathbf{e}\ln(2) - 2 > 0$
- **1 pt : pour tout** $x \geqslant 2$**,** $g(x) > 0$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- **1 pt :** $u_n \geqslant 2$ **donc** $g(u_n) > 0$ **donc** $u_{n+1} = f(u_n) > u_n$

7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

- **1 pt :** (u_n) **est croissante donc soit** (u_n) **est majorée et converge, soit** (u_n) **n'est pas majorée et diverge vers** $+\infty$**. Supposons que** (u_n) **ne diverge pas vers** $+\infty$**, alors** (u_n) **admet une limite** ℓ

- **1 pt : par unicité de la limite et par continuité de f en ℓ, $\ell = f(\ell)$ et donc $g(\ell) = 0$**
- **1 pt : $\ell \geqslant 2$ donc $g(\ell) > 0$. Absurde**

8. Écrire un programme en **Scilab** qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.

- **1 pt : définition de A**
- **1 pt : initialisation de u et N**
- **1 pt : boucle while**
- **1 pt : disp(N)**

9. *a)* Démontrer : $\forall x \in [2, +\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$.

- **1 pt : $\forall x \in [2, +\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x$**
- **1 pt : $\forall x \in [2, +\infty[,\ x \leqslant \dfrac{\mathbf{e}^x}{3}$**

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant \dfrac{6 - \mathrm{e}}{2}\, u_n$.

- **1 pt : $u_n \geqslant 2$ donc $2\ln(u_n) \leqslant u_n \leqslant \frac{\mathbf{e}^{u_n}}{3}$**
- **2 pt : preuve correcte de l'inégalité**

c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

- **3 pt : on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 2\lambda^n$ où $\lambda = \frac{6-\mathbf{e}}{2} > 1$**
  - **1 pt : initialisation**
  - **2 pt : hérédité**
- **1 pt : $\frac{1}{u_n} \leqslant \left(\frac{2}{6-\mathbf{e}}\right)^n$**
- **1 pt : les séries sont à termes positifs**
- **1 pt : la série $\sum \left(\dfrac{2}{6-\mathbf{e}}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\dfrac{2}{6-\mathbf{e}} \in\,]-1, 1[$ donc converge**
- **1 pt : par critère de comparaison par inégalité, la série $\sum \frac{1}{u_n}$ converge**

Partie III : Étude d'intégrales généralisées

10. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$ converge et calculer cette intégrale.

- **2 pt : tout parfait (1 pt seulement si calcul mal présenté ou si il manque un argument)**

11. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge-t-elle ?

- **2 pt : tout parfait (1 pt seulement si calcul mal présenté ou si il manque un argument)**

12. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\, dx$ converge. On pourra utiliser le résultat de la question ***9.a)***.

- **1 pt : $\frac{1}{f(x)} \leqslant \frac{6}{6-\mathbf{e}} \frac{1}{\mathbf{e}^x}$**
- **1 pt : pour tout $x \geqslant 2$, $f(x) \geqslant 0$ et $\frac{6}{6-\mathbf{e}} \frac{1}{\mathbf{e}^x} \geqslant 0$**
- **1 pt : $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\mathbf{e}^x}\, dx$ converge**
- **1 pt : par critère de comparaison par équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues et positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\, dx$ converge**