DS1 (version A)

Exercice 1 (inspiré de EDHEC 2016)

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $(A - 2I)(A - I)^2$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A - 2\,I \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

- Ensuite : $A - I \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

  Ainsi :
$$(A - I)^2 \ = \ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

- On en déduit : $(A - 2\,I)(A - I)^2 \ = \ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{(A - 2I)(A - I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

□

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $(A - 2I)(A - I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Or :
$$(A - 2I)(A - I)^2 \ = \ (A - 2I)(A^2 - 2A + I) \ = \ A^3 - 4A^2 + 5A - 2I$$

- On en déduit :
$$\begin{array}{rc} & A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ \text{donc} & A^3 - 4A^2 + 5A = 2I \\ \text{et} & A(A^2 - 4A + 5I) = 2I \\ \text{ainsi} & A\left(\dfrac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I)\right) = I \end{array}$$

  On en déduit que la matrice A est inversible, d'inverse $\dfrac{1}{2}\,(A^2 - 4A + 5I)$.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I)}$$

Commentaire

- L'écriture $\dfrac{A}{9}$ n'a pas de sens puisqu'il n'existe pas d'opérateur de division entre les matrices et les réels. Par contre, l'écriture $\dfrac{1}{9} \cdot A$ est bien autorisée : on multiplie une matrice par un scalaire à l'aide de l'opérateur de multiplication externe $\cdot : \mathbb{R} \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- On ne peut pas non plus diviser par une matrice. Rappelons que l'inverse d'une matrice A, si elle existe, est notée A^{-1} et pas $\dfrac{1}{A}$. L'écriture $\dfrac{A}{B}$ est elle aussi impropre car il n'y a pas d'opérateur de division entre deux matrices.

$\square$

2. On note $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = 2 \cdot X\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_1) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 2\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right.$.

Démonstration.

$$(S_1) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 2\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - 3\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} -2\,x & + & y & = & -2\,z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} -2\,x & & & = & -2\,z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}\,L_1}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right.$$

$\square$

b) Déterminer $E_2(A)$.

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} X \in E_2(A) & \Leftrightarrow & A\,X = 2 \cdot X \\ & \Leftrightarrow & (A - 2 \cdot I)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 2\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 0 \end{array} \right. \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_2(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \ \texttt{ET} \ y = 0 \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

$$\boxed{E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□

c) En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_2(A)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } E_2(A) \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

- La famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:
  × engendre $E_2(A)$,
  × est libre car est constituée uniquement d'une matrice non nulle.

  C'est donc une base de $E_2(A)$.

$$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de l'espace vectoriel } E_2(A).}$$

□

3. On note $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = X\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_2) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$.

Démonstration.

$$(S_2) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_1}}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & & - & 3\,z & = & 0 \\ & & & & 3\,z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & & - & 3\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} -x & + & 2\,z & = & -y \\ & - & 3\,z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 3\,L_1 + 2\,L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} -3\,x & & & = & -3\,y \\ & - & 3\,z & = & 0 \end{array} \right.$$

□

b) Déterminer $E_1(A)$.

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} X \in E_1(A) & \Leftrightarrow & AX = X \\ & \Leftrightarrow & (A - I)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & y \\ & & z & = & 0 \end{array} \right. \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_1(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y \ \texttt{ET} \ z = 0 \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

$$\boxed{E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$$

□

c) En déduire que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_1(A)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } E_1(A) \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

- La famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$:
  × engendre $E_1(A)$,
  × est libre car est constituée d'une unique matrice non nulle.

  C'est donc une base de $E_1(A)$.

$$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de l'espace vectoriel } E_1(A).}$$

□

4. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

Démonstration.
On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 + L_2$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire (supérieure) et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

$$\boxed{\text{Ainsi } P \text{ est inversible.}}$$

On effectue l'opération $\{ L_2 \leftarrow L_2 + L_3$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_1 \leftarrow L_1 - L_2$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Finalement : } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

On remarque que la matrice P est constituée des vecteurs des famille $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. C'est ce choix qui va permettre d'exprimer par la suite la matrice A sous une forme plus simple.
On en reparlera dans le chapitre « Réduction ».

□

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Enfin :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } P^{-1}AP = T.}$$

□

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $A^n = PT^nP^{-1}$.

- **Initialisation**
  - D'une part : $A^0 = I$.
  - D'autre part : $PT^0P^{-1} = PIP^{-1} = P\ P^{-1} = I$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $A^n = PT^nP^{-1}$).

$$\begin{array}{rcll} A^{n+1} & = & A \times A^n & \\ & = & PT^nP^{-1} \times PTP^{-1} & \textit{(d'après la question précédente et par hypothèse de récurrence)} \\ & = & PT^n\left(P^{-1}\ P\right) TP^{-1} & \\ & = & PT^n\, I\, TP^{-1} \ = \ PT^{n+1}P^{-1} & \end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}.}$$

□

5. a) Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après l'énoncé, } N \ = \ T - D \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{En conclusion : } N^0 = I,\ N^1 = N \text{ et pour tout } k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

Commentaire

- Au lieu de faire une récurrence, on peut aussi écrire, pour tout $k \geqslant 2$:

$$N^k \ = \ N^{k-2} \times N^2 \ = \ N^{k-2} \times 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \ = \ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

- On insiste sur le fait que cette démonstration n'est valable que si $k \geqslant 2$ (si ce n'est pas le cas, alors $k - 2 < 0$).

□

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n en fonction des matrices D et N, à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Démonstration.

- Soit $n \geqslant 1$.
  Les matrices D et N commutent. En effet :
  $$DN = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ND$$
  On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :
  $$\begin{array}{rcll} T^n & = & (D+N)^n & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} D^{n-k}\, N^k & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{1} \dbinom{n}{k} D^{n-k}\, N^k + \sum\limits_{k=2}^{n} \dbinom{n}{k} D^{n-k}\, N^k & \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{1} \dbinom{n}{k} D^{n-k}\, N^k & \textit{(car on a montré : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\ & = & \dbinom{n}{0} D^n\, N^0 + \dbinom{n}{1} D^{n-1}\, N^1 & \\ & = & D^n + n\, D^{n-1}\, N & \end{array}$$

- Enfin : $D^0 + 0 \cdot D^{-1}\, N = I$ et $T^0 = I$.
  (la matrice D est bien inversible car c'est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls)
  La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = D^n + n\, D^{n-1}\, N.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:
  $$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$
  (la seconde somme est nulle si $p = n$)
  où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
  L'argument $n \geqslant 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
  Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$.
- Cette question sur le binôme de Newton matriciel est extrêmement classique aux concours et il faut donc savoir parfaitement la traiter.

$\square$

Exercice 2

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\frac{1}{x+1} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{1} = 1, \quad \ln(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{et} \quad \ln(x+1) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit } \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty.}$$

- D'autre part :

$$\ln(x) - \ln(x+1) = -\big(\ln(x+1) - \ln(x)\big) = -\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = -\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\ln(1) = 0$$

$$\boxed{\text{Comme de plus } \frac{1}{x+1} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ on en déduit } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

□

b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.
- Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{-x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x\ (x+1)^2} = \frac{-x + (x^2 + 2x + 1) - x^2 - x}{x\ (x+1)^2} = \frac{1}{x\ (x+1)^2} \end{aligned}$$

Or $x(x+1)^2 > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) > 0.}$$

- On en déduit le tableau de variations de f.

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$
Variations de f	‖ $-\infty$	↗ 0

□

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = f(n)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \ = \ f(n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = f(n)}$$

$\square$

d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après l'étude en question ***1.b)***, la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$. On en déduit :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) < 0$$

- En appliquant cette propriété en $x = n$, on obtient, d'après la question précédente :

$$u_{n+1} - u_n = f(n) < 0$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est (strictement) décroissante.}}$$

$\square$

e) Écrire une fonction d'en-tête : `function y = u(n)` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n.

Démonstration.

```
1  function y = u(n)
2      S = 0
3      for k = 1:n
4          S = S + 1/k
5      end
6      y = S - log(n)
7  endfunction
```

Détaillons les différents éléments de ce code :

× en ligne 2, on crée la variable `S` dont le but est de contenir, en fin de programme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Cette variable `S` est donc initialisée à 0.

× de la ligne 3 à la ligne 5, on met à jour la variable `S` à l'aide d'une boucle.
Pour ce faire, on ajoute au $k^{\text{ème}}$ tour de boucle la quantité $\frac{1}{k}$.
Ainsi, `S` contient bien $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ en sortie de boucle.

× en ligne 6, on affecte à la variable `y` la valeur $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

Commentaire

Pour le calcul de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, on peut aussi tirer profit des fonctionnalités **Scilab** :

```
S = sum(1 ./ 1:n)
```

Pour bien comprendre cette instruction, rappelons que :

× l'instruction `1:n` permet de créer la matrice ligne $(1 \quad 2 \quad \ldots \quad n)$.

× l'opérateur `./` permet d'effectuer la division terme à terme.
Ainsi, l'instruction `1 ./ 1:n` permet de créer la matrice ligne $(\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \ldots \quad \frac{1}{n})$.

× la fonction `sum` permet de sommer tous les coefficients d'une matrice.

On obtient donc bien la somme à calculer par cette méthode. □

2. ***a)*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n - \frac{1}{n}\right) \\ &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \left(\cancel{\frac{1}{n+1}} + \ln(n) - \ln(n+1)\right) + \frac{1}{n} - \cancel{\frac{1}{n+1}} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.c)}}\textit{)} \\ &= \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \; = \; \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \; v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

□

b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1 + x) \leqslant x$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Démonstration.

- La fonction $g : x \mapsto \ln(x)$ est concave.
On en déduit que sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ se situe sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= g(1) + g'(1)\,(x - 1) \\ &= \ln(1) + \frac{1}{1}\,(x - 1) \; = \; x - 1 \end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \; \ln(x) \; \leqslant \; x - 1$$

Soit $t \geqslant 0$. En appliquant la propriété ci-dessus à $x = 1 + t \in \,]0, +\infty[$, on obtient :

$$\ln(1 + t) \leqslant (\cancel{1} + t) - \cancel{1} = t$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall t \geqslant 0, \; \ln(1 + t) \leqslant t.}$$

Commentaire

- Notons tout d'abord que la variable t étant sous la portée d'un quantificateur, elle est muette. Ainsi, le résultat démontré est bien celui souhaité.
- Il est possible de procéder différemment.
  On peut par exemple considérer la fonction $g_1 : x \mapsto \ln(1+x)$ et démontrer qu'elle est concave. Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_{g_1}$ est située sous sa tangente au point d'abscisse 0 :
  $$\forall x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \ \leqslant\ g_1(0) + g_1'(0)\ (x-0) = \ln(1) + x = x$$
- On peut aussi considérer la fonction $g_2 : x \mapsto x - \ln(1+x)$, procéder à son étude et conclure quant à son signe :
  $$\forall x \geqslant 0,\ g_2(x) \geqslant 0$$
  ce qui correspond à l'inégalité souhaitée.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant l'inégalité précédente à $t = \dfrac{1}{n}$, on obtient :
$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et ainsi} \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

□

c) Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire que :
$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

Démonstration.

- La fonction $h : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ car elle est la composée $h = h_2 \circ h_1$ où :
  × $h_1 : x \mapsto 1 + x$ est :
    – de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,+\infty[$ car polynomiale sur cet intervalle.
    – telle que $h_1(]-1,+\infty[) \subset]0,+\infty[$.
  × $h_2 : x \mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

  $$\boxed{\text{Ainsi, } h \text{ admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de tout point de l'intervalle }]-1,+\infty[\text{ et donc en particulier de 0.}}$$

- Ainsi, il existe une fonction ε définie dans un voisinage de 0, telle que, au voisinage de 0 :
$$\begin{aligned} h(x) &= h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + x^2\ \varepsilon(x) \\ &= x - \frac{1}{2}\ x^2 + x^2\ \varepsilon(x) \end{aligned}$$
  où $\displaystyle\lim_{x\to 0}\ \varepsilon(x) = 0$.

- Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut appliquer cette égalité à $x = \frac{1}{n}$ pour n dans un voisinage de $+\infty$.
On obtient :
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\,\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$
avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ par théorème de composition des limites.
On peut donc écrire :
$$v_n - v_{n+1} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\boxed{\text{Ainsi : } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et donc } v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.}$$
□

d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

Démonstration.
D'après ce qui précède :
× $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$.
× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ et $\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} \geqslant 0$.
× La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).
Il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$ (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul).

$$\boxed{\text{Ainsi, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série } \sum_{n\geqslant 1} (v_{n+1} - v_n) \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

La seule difficulté de cette démonstration réside dans la rédaction du critère des séries à termes positifs (les arguments à utiliser ont tous été démontrés dans les questions précédentes). C'est donc une question d'application directe du cours qu'il convient de savoir traiter.
□

e) Pour $n \geqslant 2$, simplifier la somme partielle : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers γ.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.
- Par sommation télescopique :
$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_{(n-1)+1} - v_1 = v_n - v_1$$
On en déduit : $v_n = v_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.

- Or, d'après la question précédente, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (v_{n+1} - v_n)$ est convergente.

  On déduit de l'écriture précédente de v_n que la suite (v_n) est convergente, de limite :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = v_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = v_1 + \gamma$$

- Enfin :

$$v_1 = u_1 - \frac{1}{1} = \left(\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} - \cancel{\ln(1)} \right) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (v_n) \text{ est convergente, de limite } \lim_{n\to+\infty} v_n = \gamma.}$$

□

3. a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Par définition : $u_n \ = \ v_n + \dfrac{1}{n}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente car elle est la somme de suites convergentes.

$$\boxed{\text{De plus, } \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \gamma + 0 = \gamma.}$$

Commentaire

- Il n'y a pas forcément dans les sujets une croissance linéaire de la difficulté. Au contraire, chaque nouvelle partie commence généralement par une question plus simple de mise en route. Il n'est donc pas judicieux de laisser de côté certaines parties.
- Cette question ***3.a)*** ne présente pas de difficulté. Comme dans la question ***2.d)***, on est confronté ici à une question bilan qui consiste simplement à rappeler puis utiliser certains résultats précédents. Ces résultats étant fournis par l'énoncé, cette question peut être traitée même si les questions précédentes ne l'ont pas été.

□

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left| u_n - \gamma \right| \leqslant \frac{1}{n}$$

Démonstration.

- D'après ce qui précède :
  - × la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante (question ***2.b***).
  - × la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers γ.

  Démontrons alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leqslant \gamma$.

  On procède par l'absurde.
  Suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $v_{n_0} > \gamma$.
  La suite (v_n) étant croissante : $\forall n \geqslant n_0, \ v_n \geqslant v_{n_0}$.

Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\gamma \geqslant v_{n_0}$.
En combinant avec l'inégalité de l'hypothèse, on a alors :

$$\gamma \geqslant v_{n_0} > \gamma$$

Absurde !

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leqslant \gamma.}$$

- En appliquant le résultat précédent à la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui est croissante (car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante) et de limite $-\gamma$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -u_n \leqslant -\gamma$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \gamma.}$$

Commentaire

- L'esprit de l'énoncé semble être d'utiliser directement le résultat suivant :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} (v_n) \text{ croissante} \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant \ell}$$

- Le résultat encadré ci-dessus est lié à la notion de borne supérieure d'une suite, qui par définition, et sous réserve d'existence, est le plus petit des majorants de la suite. Si on connaît ce vocabulaire, on a accès à un énoncé plus précis du théorème de convergence monotone : toute suite croissante et majorée converge **vers sa borne supérieure**. On peut alors démontrer le résultat précédent :
  × la suite (v_n) converge (vers ℓ) donc elle est majorée,
  × la suite (v_n) est croissante.

  Ainsi, d'après le théorème ci-dessus, $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ et donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant \ell$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité précédente : $u_n - \gamma \geqslant 0$. On en déduit :

$$\left|u_n - \gamma\right| \ = \ u_n - \gamma$$

Or, par définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$u_n - \gamma \ = \ v_n + \frac{1}{n} - \gamma \ = \ (v_n - \gamma) + \frac{1}{n} \ \leqslant \ \frac{1}{n}$$

car, d'après ce qui précède : $v_n - \gamma \leqslant 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_n - \gamma\right| \ \leqslant \ \frac{1}{n}}$$

□

c) On rappelle que l'instruction `floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction `u` de la question ***1.e)*** a été correctement programmée. Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
eps = input('Entrer un réel strictement positif : ')
n = floor(1/eps) + 1
disp(u(n))
```

Démonstration.

- Ce script a pour but d'afficher une valeur approchée de γ à ε près (où ε est un réel strictement positif fourni par l'utilisateur et stocké dans la variable `eps`).
  Pour ce faire, il faut commencer par trouver un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :
  $$\left|u_N - \gamma\right| \leqslant \varepsilon$$
- Or, d'après ce qui précède :
  $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left|u_n - \gamma\right| \leqslant \frac{1}{n}$$
  Afin de trouver l'entier N recherché, il suffit de trouver un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :
  $$\frac{1}{N} \leqslant \varepsilon$$
  Si c'est le cas, on obtient alors, par transitivité :
  $$\left|u_N - \gamma\right| \leqslant \frac{1}{N} \leqslant \varepsilon$$
- Raisonnons par équivalence pour trouver N :
  $$\frac{1}{N} \leqslant \varepsilon \ \Leftrightarrow \ N \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \qquad \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)}$$
  Ainsi, tout entier plus grand que $\frac{1}{\varepsilon}$ convient. En particulier, l'entier $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ convient.

$\boxed{\text{Ce script affiche la valeur } u_N \text{ où } N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1. \text{ C'est une valeur approchée de } \gamma \text{ à } \varepsilon \text{ près.}}$ □

Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

4. Démontrer que la série de terme général a_n converge.

Démonstration. On a :

× $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n^2}$.

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$.

× La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n^2}$ (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul).

$$\boxed{\text{Ainsi, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série } \sum a_n \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

La démonstration demandée ici est à peu de choses près celle de la question ***I.2.d)***.

□

5. a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{\substack{k \in [\![1,2n]\!] \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k \in [\![1,2n]\!] \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}.}$$

Commentaire

- L'énoncé demande de « Justifier » le résultat. Cette terminologie est souvent associée à des démonstrations courtes et éventuellement moins formelles.
- Il est aussi possible ici de procéder par récurrence. Détaillons la rédaction.

  Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}$.

  ▸ **Initialisation** :

  – D'une part : $\sum\limits_{k=1}^{1} \dfrac{1}{2k-1} = \dfrac{1}{2-1} = \dfrac{1}{1} = 1$.

  – D'autre part : $\sum\limits_{k=1}^{2} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{1} \dfrac{1}{2k} = \left(\dfrac{1}{1} + \cancel{\dfrac{1}{2}}\right) - \cancel{\dfrac{1}{2}} = 1$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.

  ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(i.e. \ \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{2(n+1)} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{2k} \right)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k-1} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}\right) + \frac{1}{2(n+1)-1} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\right) + \frac{1}{2n+1} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \frac{1}{2n+2}\right) && \textit{(en introduisant } \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+2}\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k}
\end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

  $\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathcal{P}(n).}$

□

b) Déterminer deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n-1}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned}
& a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{\alpha\ (2n-1) + \beta\ n}{n(2n-1)} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{(2\alpha+\beta)\ n - \alpha}{n(2n-1)} \\
\Leftrightarrow \quad & 1 = (2\alpha+\beta)\ n - \alpha && \textit{(en multipliant par } n(2n-1) > 0\textit{)}
\end{aligned}$$

La dernière égalité étant vérifiée pour tout entier non nul n, elle est équivalente, par identification, au système suivant :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\alpha & + & \beta & = & 0 \\ -\alpha & & & = & 1 \end{array} \right.$$

Et enfin : $(S) \underset{}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2\, L_2}{\iff}} \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & \beta & = & 2 \\ -\alpha & & & = & 1 \end{array} \right.$.

$$\boxed{\text{Les réels } \alpha = -1 \text{ et } \beta = 2 \text{ conviennent.}}$$

☐

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$a_k = \frac{-1}{k} + \frac{2}{2k-1}$$

- En sommant ces égalités membre à membre, on obtient, par linéarité de la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} + 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} + 2 \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \right) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.b)}}\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} + 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \cancel{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cancel{2}k} \\
&= 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) \\
&= 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ = \ 2 \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) \\
&= 2 \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \right) \ = \ 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} a_k \ = \ 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}}$$

☐

6. a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned} u_{2n} - u_n &= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - (\ln(2n) - \ln(n)) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \left((\ln(2) + \cancel{\ln(n)}) - \cancel{\ln(n)}\right) \ = \ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit, en réordonnant : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2).}$$

□

b) Calculer alors $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$.

Démonstration.

- D'après la question ***1.***, la série $\sum a_n$ est convergente.
- Déterminons sa somme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.c)}}\textit{)} \\ &= 2\ (u_{2n} - u_n + \ln(2)) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\ (\cancel{\gamma} - \cancel{\gamma} + \ln(2)) && \textit{(car comme la suite } (u_n) \textit{ converge vers } \gamma\textit{, il en est de même de sa sous-suite } (u_{2n})\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\ln(2).}$$

□

7. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} && \textit{(par décalage d'indice)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\left(\frac{k}{n}+1\right)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}}$$

□

b) Retrouver alors le résultat de la question ***6.b)***.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est continue sur $[0,1]$.

- On reconnaît une somme de Riemann, ce qui démontre :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\ dx$$

Or :

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\ dx = \Big[\ \ln\left(|1+x|\right)\ \Big]_0^1 = \Big[\ \ln\left(1+x\right)\ \Big]_0^1 = \ln(2) - \cancel{\ln(1)}$$

- Ainsi, d'après la question ***5.c)*** :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\ \ln(2)$$

$$\boxed{\text{On retrouve bien : } \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\ \ln(2)}$$

□

Exercice 4

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f : x \mapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

Démonstration.
Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont deux fois dérivables sur l'intervalle $]0,+\infty[$ en tant que fonctions usuelles.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } f \text{ est deux fois dérivable sur }]0,+\infty[\\ \text{comme somme de fonctions deux fois dérivables sur }]0,+\infty[.\end{array}}$$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}}{x} \quad \text{et} \quad f''(x) = \mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}}{x^2}.}$$

□

b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

Démonstration.

- Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f''(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}}{x^2} > 0$.
  La fonction f' est donc strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
- Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}}{x} = +\infty$.
  Donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\infty$.
- De plus : $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{x} = 0$.
  Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = +\infty$.
- $f'(1) = \mathrm{e}^1 - \dfrac{\mathrm{e}}{1} = \cancel{\mathrm{e}} - \cancel{\mathrm{e}} = 0$.

On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f''(x)$	‖	$+$		$+$	
Variations de f'	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

□

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

Démonstration.

- La fonction f' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Ainsi :
  - $\times$ $\forall x \in]0,1[$, $f'(x) < f'(1) = 0$.
  - $\times$ $\forall x \in]1,+\infty[$, $f'(x) > f'(1) = 0$.

  Donc f est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
- Déterminons la limite de f en 0. Comme : $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = +\infty$.
- Déterminons alors la limite de f en $+\infty$. On écrit :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x) = \mathrm{e}^x \left(1 - \mathrm{e}\,\frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x}\right)$$

  Par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x} = 0$.
  Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- $f(1) = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}\ln(1) = \mathrm{e}$.

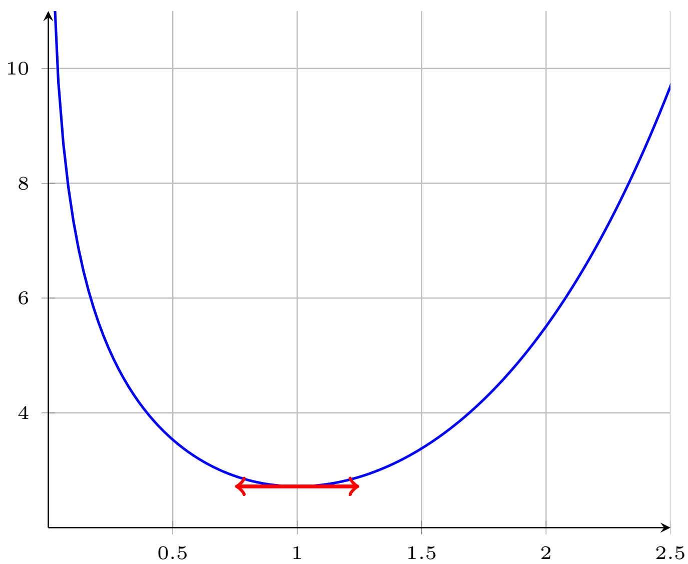
On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0			1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||		$-$	0	$+$	
Variations de f	||	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

$\square$

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Démonstration.



Commentaire

On s'efforcera de faire les questions de tracé de courbe.
En effet, ce type de question consiste uniquement à faire apparaître sur un graphique toutes les informations qu'on a recueillies dans les questions précédentes. D'ailleurs, il ne faut oublier de faire apparaître les tangentes horizontales et les points d'inflexion si on les a déterminés auparavant.

□

4. a) Étudier les variations de la fonction $u : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) - x \end{array}$

Démonstration.

- La fonction u est dérivable sur $]0,+\infty[$ car elle est la somme $f_1 + f_2$ de :
  - × $f_1 = f'$ dérivable sur $]0,+\infty[$ car f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$,
  - × $f_2 : x \mapsto x$ dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } u \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[.}$$

- Soit $x \in]0,+\infty[$:

$$u'(x) = f''(x) - 1 = e^x + \frac{e}{x^2} - 1 = \frac{x^2\ e^x + e - x^2}{x^2} = \frac{x^2\ (e^x - 1) + e}{x^2}$$

Comme $x^2 > 0$, on en déduit que le signe de $u'(x)$ est celui de $x^2\ (e^x - 1) + e$.
Or :
× comme $x > 0$, alors : $e^x > e^0 = 1$. Ainsi : $e^x - 1 > 0$.
× de plus : $x^2 > 0$ et $e > 0$.
On en déduit : $u'(x) > 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } u \text{ est donc strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$$

- D'après ***1.b)*** : $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\infty$. De plus : $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$.
  D'où : $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = -\infty$.
- Déterminons alors la limite de f en $+\infty$. Soit $x \in]0,+\infty[$:

$$u(x) = e^x - \frac{e}{x} - x = e^x \left(1 - \frac{e}{xe^x} - \frac{x}{e^x}\right)$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. De plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e}{xe^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
Signe de $u'(x)$	‖	$+$
Variations de u	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

□

b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Démonstration.

- Tout d'abord, soit $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = x \ \Leftrightarrow \ f'(x) - x = 0 \ \Leftrightarrow \ u(x) = 0$$

On cherche donc à montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$.

- La fonction u est :
  - × continue sur $]0, +\infty[$ (car dérivable sur $]0, +\infty[$ d'après la question ***4.a)***),
  - × strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

  Ainsi la fonction u réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $u(]0, +\infty|)$.

$$u(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \to 0} u(x), \lim_{x \to +\infty} u(x) \right[=] - \infty, +\infty[$$

Or $0 \in] - \infty, +\infty[$, donc l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'équation } f'(x) = x \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

- Tout d'abord :
  - × $u(\alpha) = 0$
  - × $u(1) = f'(1) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$
  - × $u(2) = f'(2) - 2 = e^2 - \dfrac{e}{2} - 2 > 0$

    En effet, d'après les encadrements donnés par l'énoncé, on obtient :
    - d'une part : $7,3 < e^2 < 7,4$. Donc : $5,3 < e^2 - 2 < 5,4$
    - d'autre part : $2,7 < e < 2,8$. Donc : $1,35 < \dfrac{e}{2} < 1,4$. D'où : $-1,4 < -\dfrac{e}{2} < -1,35$

    Ainsi : $3,9 < e^2 - 2 - \dfrac{e}{2} < 4,05$. On en conclut : $u(2) > 3,9 > 0$.

  On en déduit :

$$u(1) \ < \ u(\alpha) \ < \ u(2)$$

Or, d'après le théorème de la bijection, $u^{-1} :] - \infty, +\infty[\to]0, +\infty[$ est strictement croissante sur $] - \infty, +\infty[$. En appliquant u^{-1}, on obtient alors :

$$\begin{array}{ccccc} u^{-1}\big(u(1)\big) & < & u^{-1}\big(u(\alpha)\big) & < & u^{-1}\big(u(e)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 1 & & \alpha & & e \end{array}$$

$$\boxed{1 < \alpha < 2}$$

□

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

- **Initialisation** :
  D'après l'énoncé : $u_0 = 2 \geqslant 2$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire u_{n+1} existe et $u_{n+1} \geqslant 2$).
  Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.
  - La fonction f est définie sur $]0, +\infty[$.
    Or $u_n \geqslant 2$, donc $u_n \in\ ]0, +\infty[$. Ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.
  - D'après la question ***2.***, e est le minimum de f sur $]0, +\infty[$, c'est-à-dire :
    $$\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ f(x) \geqslant \mathrm{e}$$
    En appliquant cette inégalité à $x = u_n \in\ ]0, +\infty[$, on obtient :
    $$u_{n+1} \geqslant \mathrm{e} > 2$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \geqslant 2.}$$

□

6. a) Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \begin{array}{ccc} [2, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$

Démonstration.

- La fonction g est dérivable sur $[2, +\infty[$ car elle est la somme $g_1 + g_2$ de :
  × $g_1 = f$ dérivable (car deux fois dérivable d'après ***1.a)***) sur $]0, +\infty[$,x donc sur $[2, +\infty[$,
  × $g_2 : x \mapsto x$ dérivable sur $[2, , +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est dérivable sur } [2, +\infty[.}$$

- Soit $x \in [2, +\infty[$, $g'(x) = f'(x) - 1$.
  D'après la question ***1.b)***, la fonction f' est croissante sur $[2, +\infty[\ \subset\ ]0, +\infty[$. Ainsi :
  $$f'(x) \ \geqslant\ f'(2)$$
  Or, avec les encadrements donnés par l'énoncé : $f'(2) = \mathrm{e}^2 - \dfrac{\mathrm{e}}{2} \geqslant 7,3 - 1,4 = 5,9 > 1$.
  On en déduit : $f'(x) > 1$. D'où : $g'(x) > 0$.
  On obtient le tableau de variations suivant :

x	2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$
Variations de g	$g(2)$ ↗ $+\infty$

- Déterminons maintenant le signe de g. Comme g est croissante sur $[2, +\infty[$, on a :

$$\forall x \geqslant 2, \quad g(x) \geqslant g(2)$$

Il suffit alors de démontrer : $g(2) > 0$ pour pouvoir conclure. Calculons :

$$g(2) \ = \ f(2) - 2 \ = \ \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\ln(2) - 2$$

D'après les encadrements de l'énoncé :
× d'une part : $7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4$
× d'autre part : $2,7 < \mathrm{e} < 2,8$ et $0,6 < \ln(2) < 0,7$. D'où :

$$\underset{\underset{1,62}{\shortparallel}}{2,7 \times 0,6} \quad < \quad \mathrm{e}\ln(2) \quad < \quad \underset{\underset{1,96}{\shortparallel}}{2,8 \times 0,7}$$

Ainsi : $-1,96 < -\mathrm{e}\ln(2) < -1,62$.
On en déduit : $g(2) = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\ln(2) - 2 \ > \ 7,3 - 1,96 - 2 = 3,34$.
On obtient alors : $g(2) > 0$.

$$\boxed{\forall x \in [2, +\infty[, \ g(x) > 0}$$

□

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration.

- D'après la question ***6.a)*** : $\forall x \geqslant 2$, $g(x) > 0$. Autrement dit, pour tout $x \geqslant 2$:

$$f(x) > x$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $x = u_n \geqslant 2$ (question ***5.***), on obtient :

$$u_{n+1} = f(u_n) > u_n$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} > u_n. \text{ La suite } (u_n) \text{ est donc (strictement) croissante.}}$$

□

7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

Démonstration.

- On sait que la suite (u_n) est croissante (d'après la question ***6.b)***). Deux cas se présentent alors :
  × soit (u_n) est de plus majorée, et alors elle converge.
  × soit (u_n) n'est pas majorée, et alors elle diverge vers $+\infty$.
- Démontrons que (u_n) n'est pas majorée. On procède par l'absurde.
  Supposons que la suite (u_n) est majorée.
  × Dans ce cas, la suite (u_n) est croissante et majorée donc elle converge vers un réel ℓ.
    D'après la question ***5.*** : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$.
    Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geqslant 2$.
  × D'autre part, par définition : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
    La fonction f est continue sur $[2, +\infty[$, elle est donc en particulier continue en ℓ. Par passage à la limite dans l'égalité précédente, on obtient : $\ell = f(\ell)$, *i.e.* $g(\ell) = 0$.On

  Absurde ! En effet, d'après la question ***6.a)*** : $\forall x \geqslant 2$, $g(x) > 0$. En particulier : $\forall x \geqslant 2$, $g(x) \neq 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ n'est pas majorée et diverge donc vers } +\infty}$$

Commentaire

Il faut prendre le réflexe de penser à un raisonnement par l'absurde lorsque le résultat à démontrer est formulé sous forme de négation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général). À titre d'illustration, il faut penser à ce type de raisonnement pour :

× montrer qu'une suite `N`'est `PAS` majorée,

× montrer qu'une matrice admettant une seule valeur propre `N`'est `PAS` diagonalisable.

□

8. Écrire un programme en **Scilab** qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.

Démonstration.
On propose le programme suivant :

```
1 A = input('Entrez un réel A : ')
2 N = 0
3 u = 2
4 while u < A
5     N = N + 1
6     u = exp(u) - %e * ln(u)
7 end
8 disp(N)
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début du programme**
  La valeur de `A` est choisie par l'utilisateur à l'aide de la fonction `input`.

```
1 A = input('Entrez un réel A : ')
```

  On initialise ensuite la variable `N` à 0.

```
2 N = 0
```

  La variable `u` qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n) est initialisée à 2 : la valeur de u_0.

```
3 u = 2
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 4 à 7 consistent à :
  1) déterminer un entier n tel que : $u_n \geqslant A$,
  2) calculer les valeurs succesives de u_n.
  On doit donc :
  1) incrémenter la variable `N` de 1 jusqu'à ce que : $u_n \geqslant A$. Autrement dit, on doit incrémenter la variable `N` de 1 tant que : $u_n < A$. Pour cela on met en place une structure while :

```
4 while u < A
```

  Puis on met à jour la variable `N`.

```
5     N = N + 1
```

2) calculer les valeurs successives de u_n :

```
u = exp(u) - %e * ln(u)
```

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `N` contient le premier entier n tel que : $u_n \geqslant A$. On finit donc ce programme en affichant la valeur de cette variable.

```
disp(N)
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un programme **Scilab** correct démontre la bonne compréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question. □

9. a) Démontrer : $\forall x \in [2,+\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord : $\forall x \in [2,+\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x$.
  La fonction $h : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0,+\infty[$.
  Sa courbe représentative $\mathcal{C}_h$ est donc située en dessous de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 2. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= h(2) + h'(2)\,(x-2) \\ &= \ln(2) + \frac{1}{2}\,(x-2) \end{aligned}$$

  On en déduit :

$$\forall x \in [2,+\infty[, \quad \ln(x) \ \leqslant\ \ln(2) + \frac{1}{2}\,(x-2)$$

  Ainsi, pour tout $x \in [2,+\infty[$:

$$2\ln(x) \ \leqslant\ 2\ln(2) + (x-2) = x + 2(\ln(2)-1)$$

  Or, comme : $0,6 < \ln(2) < 0,7$, alors : $2(\ln(2)-1) < 0$. D'où : $x + 2(\ln(2)-1) < x$.

$$\boxed{\text{Finalement, par transitivité : } \forall x \in [2,+\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x}$$

- Démontrons maintenant : $\forall x \in [2,+\infty[,\ x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$.

  Considérons la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{3} - x$.

  × La fonction h est dérivable sur $[2,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $[2,+\infty[$.

  × Soit $x \in [2,+\infty[$.

$$h'(x) \ = \ \frac{\mathrm{e}^x}{3} - 1 \ = \ \frac{\mathrm{e}^x - 3}{3}$$

  Comme $3 > 0$, la quantité $h'(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^x - 3$.
  Or, comme $x \geqslant 2$, par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^x \ \geqslant\ \mathrm{e}^2 > 7,3$$

  Et ainsi : $\mathrm{e}^x - 3 > 4,3 > 0$. D'où : $h'(x) > 0$.

× On obtient le tableau de variations suivant :

x	2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $h'(x)$	$+$
Variations de h	$h(2) \nearrow +\infty$

× De plus : $h(2) = \dfrac{e^2}{3} - 2 = \dfrac{e^2-6}{3} > 0$ car $e^2 > 7,3$.
Or h est strictement croissante sur $[2,+\infty[$. Ainsi, pour tout $x \in [2,+\infty[$:

$$h(x) \ \geqslant\ h(2) \ \geqslant\ 0$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall x \in [2,+\infty[,\ x \leqslant \dfrac{e^x}{3}.}$$

Commentaire

Pour démontrer la première inégalité, il est bien évidemment possible de passer par l'étude de la fonction $\varphi : x \mapsto x - 2\ln(x)$.

- La fonction φ est dérivable sur $[2,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[2,+\infty[$.
- Soit $x \in [2,+\infty[$.
$$\varphi'(x) \ = \ 1 - \frac{2}{x} \ = \ \frac{x-2}{x}$$
Comme $x \geqslant 2$, on en déduit : $\varphi'(x) \geqslant 0$.
- On obtient le tableau de variations suivant :

x	2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$	$+$
Variations de φ	$\varphi(2) \nearrow +\infty$

- Comme la fonction φ est croissante sur $[2,+\infty[$:
$$\forall x \in [2,+\infty, \quad \varphi(x) \geqslant \varphi(2) = 2 - 2\ \ln(2)$$
Or : $2 - 2\ \ln(2) > 0$. Ainsi : $\forall x \in [2,+\infty[$, $\varphi(x) \geqslant 0$. D'où :
$$\forall x \in [2,+\infty[, \quad x - 2\ \ln(x) \ \geqslant\ 0$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} u_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :
$$u_{n+1} \ = \ f(u_n) \ = \ \mathrm{e}^{u_n} - \mathrm{e}\,\ln(u_n)$$
- De plus, d'après la question précédente :
$$\forall x \in [2, +\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{3}$$
En appliquant cette double inégalité à $x = u_n \in [2, +\infty[$, on obtient :
$$2\ln(u_n) \ \leqslant \ u_n \ \leqslant \ \frac{\mathrm{e}^{u_n}}{3}$$
On en déduit :
  × d'une part : $2\ln(u_n) \leqslant u_n$. Ainsi : $-\mathrm{e}\ln(u_n) \geqslant -\dfrac{\mathrm{e}}{2} u_n$.
  × d'autre part : $u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{u_n}}{3}$. Ainsi : $\mathrm{e}^{u_n} \geqslant 3u_n$.

On obtient alors :
$$\underbrace{\mathrm{e}^{u_n} - \mathrm{e}\ln(u_n)}_{=\,u_{n+1}} \ \geqslant \ \underbrace{3u_n - \frac{\mathrm{e}}{2} u_n}_{=\,\frac{6-\mathrm{e}}{2}\,u_n}$$
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant \frac{6-\mathrm{e}}{2} u_n}$$
□

c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question ***9.b)*** :
$$\begin{array}{rcll} u_{n+1} & \geqslant & \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ u_n & \\ & \geqslant & \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ u_{n-1} & = \left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^2 u_{n-1} \\ & \geqslant & \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ u_{n-2} & = \left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^3 u_{n-2} \\ & \dots & & \\ & \geqslant & \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ \dots\ \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\ u_0 & = \left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^{n+1} u_0 \end{array}$$
On peut démontrer rigoureusement ce résultat par récurrence (voir remarque en page suivante).
$$\boxed{\text{Comme } u_0 = 2 \text{, on obtient : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2\left(\frac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rrcll} & u_n & \geqslant & 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{u_n} & \leqslant & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n & \end{array}$$

(par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$*, car* $u_n \geqslant 2 > 0$ *d'après* ***5.****)*

- On obtient alors :
  - × $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant \left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n$
  - × la série $\sum \left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\dfrac{2}{6-\mathrm{e}} \in\,]-1,1[$.

    (en effet : $3 < 3,2 < 6-\mathrm{e} < 3,3 < 4$. D'où : $-1 < \dfrac{2}{4} < \dfrac{2}{6-\mathrm{e}} < \dfrac{2}{3} < 1$)
    Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{Par critère de comparaison de séries à termes positifs, la série } \sum \frac{1}{u_n} \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

- On pouvait aussi résoudre cette question de la façon suivante.
  On sait que les termes de la suite (u_n) sont non nuls, donc, d'après la question ***9.b)*** :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{2}{6-\mathrm{e}} \geqslant \frac{u_k}{u_{k+1}}$$

  En effectuant le produit de ces inégalités pour k variant de 0 à $n-1$, on obtient (tous les termes considérés sont positifs) :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2}{6-\mathrm{e}} \geqslant \prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{u_{k+1}} \quad \text{donc} \quad \left(\frac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n \geqslant \frac{u_0}{\cancel{u_1}}\,\frac{\cancel{u_1}}{\cancel{u_2}} \cdots \frac{\cancel{u_{n-1}}}{u_n} = \frac{u_0}{u_n} = \frac{2}{u_n}$$

  On conclut en utilisant le critère de comparaison de séries à termes positifs.
- La question portait ici sur l'application du critère de comparaison des séries à termes positifs. On pouvait se permettre de simplement citer le principe de récurrence.
  Détaillons quand même cette rédaction.
- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n$
  - ▶ **Initialisation** :
    D'une part, $u_0 = 2$.
    D'autre part, $2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^0 = 2$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.

Commentaire

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^{n+1}$)

  D'après la question ***9.b)***, $u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} u_n$.

  Par hypothèse de récurrence, on a : $u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n$. Ainsi, par transitivité :

$$u_{n+1} \geqslant \frac{6-\mathrm{e}}{2}\, u_n \geqslant \frac{6-\mathrm{e}}{2}\, 2\left(\frac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n = 2\left(\frac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^{n+1}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n$.

□

Partie III : Étude d'intégrales généralisées

10. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$ converge et calculer cette intégrale.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]0,1]$.
- Soit $a \in]0,1]$.

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\int_a^1 f(x)\ dx & = & \displaystyle\int_a^1 (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x))\ dx & \\
 & = & \displaystyle\int_a^1 \mathrm{e}^x\ dx - \mathrm{e}\int_a^1 \ln(x)\ dx & \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
 & = & [\ \mathrm{e}^x\ ]_a^1 - \mathrm{e}\,[\ x\ln(x) - x\ ]_a^1 & \\
 & = & \mathrm{e} - \mathrm{e}^a - \mathrm{e}\ (\cancel{1\ln(1)} - 1 - (a\ln(a) - a)) & \\
 & = & 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^a + \mathrm{e}\ a\ln(a) - \mathrm{e}\ a & \\
 & \underset{a\to 0}{\longrightarrow} & 2\mathrm{e} - 1 &
\end{array}$$

En effet, $\lim\limits_{a\to 0} \mathrm{e}^a = 1$, $\lim\limits_{a\to 0} \mathrm{e}\ a = 0$ et $\lim\limits_{a\to 0} a\ln(a) = 0$ par croissances comparées.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale impropre } \int_0^1 f(x)\ dx \text{ converge et } \int_0^1 f(x)\ dx = 2\mathrm{e} - 1.}$$

Commentaire

On peut retrouver la valeur de $\displaystyle\int_a^1 \ln(x)\ dx$ grâce à une intégration par parties (IPP) :

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & \ln(x) & & u'(x) & = & \dfrac{1}{x} \\ v'(x) & = & 1 & & v(x) & = & x \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, 1]$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_a^1 \ln(x)\ dx & = & [\ x\ln(x)\ ]_a^1 - \displaystyle\int_a^1 \frac{1}{x} x\ dx \\ & = & -a\ln(a) - [\ x\ ]_a^1 \ = \ -a\ln(a) - 1 + a \end{array}$$

$\square$

11. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$ converge-t-elle ?

Démonstration.
On a les informations suivantes :

× $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x$.

× $\forall x \in [1, +\infty[$, $\mathrm{e}^x \geqslant 0$
D'après la question ***2.*** : $\forall x \in [1, +\infty[$, $f(x) \geqslant 0$.

× L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^x\ dx$ diverge.

Par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$ est divergente.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\ dx \text{ diverge.}}$$

Commentaire

L'énoncé demande simplement la **nature** de l'intégrale. Il faut donc privilégier l'utilisation d'un critère de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives. On pouvait également traiter cette question par calcul. Détaillons-le.

- La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$.
- Soit $A \in [1, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_1^A f(x)\ dx & = & \displaystyle\int_1^A (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x))\ dx \\ & = & \displaystyle\int_1^A \mathrm{e}^x\ dx - \mathrm{e}\int_1^A \ln(x)\ dx \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ & = & [\ \mathrm{e}^x\ ]_1^A - \mathrm{e}[\ x\ln(x) - x\ ]_1^A \\ & = & \mathrm{e}^A - \mathrm{e} - \mathrm{e}(A\ln(A) - A - (\cancel{1\ln(1)} - 1)) \\ & = & \mathrm{e}^A\left(1 - \mathrm{e}\dfrac{A\ln(A)}{\mathrm{e}^A} - \dfrac{A}{\mathrm{e}^A} - \dfrac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e}^A}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{array}$$

En effet, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e}^A} = 0$, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{A\ln(A)}{\mathrm{e}^A} = 0$, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{A}{\mathrm{e}^A} = 0$ et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \mathrm{e}^A = +\infty$.

$\square$

12. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\, dx$ converge. On pourra utiliser le résultat de la question ***9.a)***.

Démonstration.

- Soit $x \in [2, +\infty[$.
  D'après la question ***9.a)***, $2\ln(x) \leqslant x$. Donc :
$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x) \geqslant \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,\frac{x}{2}.$$
  Donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{f(x)} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,\frac{x}{2}}$. Or :
$$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\frac{x}{2} = \mathrm{e}^x \left(1 - \frac{\mathrm{e}}{2}\,\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x$$
  car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ par croissances comparées. Donc $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,\frac{x}{2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}$.
  Et comme $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, alors $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,\frac{x}{2}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
- On sait donc :
  × $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,\frac{x}{2}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
  × $\forall x \in [2, +\infty[$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,\frac{x}{2}} \geqslant 0$
  × L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ d'exposant strictement supérieur à 1. Elle est donc convergente.

  Par critère de négligeabilité d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\frac{x}{2}}\, dx$ converge.
- On sait alors :
  × $\forall x \in [2, +\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{1}{f(x)} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,\frac{x}{2}}$.
  × D'après la question ***2.*** : $\forall x \in [2, +\infty[$, $f(x) \neq 0$.
  Donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ est continue sur $[2, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $[2, +\infty[$ qui ne s'annule pas.
  × L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\frac{x}{2}}\, dx$ converge.

Par critère de comparaison d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\, dx$ converge.

□