
DS1 (version B)

Exercice 1

1. On considère \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) ; soit t l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 , dont la matrice associée T relativement à cette base s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de t .

Déterminer les sous-espaces propres de t associés, et donner une base de chacun d'entre eux.

L'endomorphisme t est-il diagonalisable? Est-il bijectif?

L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.

2. Soit n un entier de \mathbb{N}^* . On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^{2n+1} muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$. Soit t l'endomorphisme de \mathbb{R}^{2n+1} défini par :

- pour tout entier i de $\llbracket 1, 2n+1 \rrbracket$, avec $i \neq n+1$: $t(e_i) = e_i$;
- $t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \dots + e_{2n+1}$.

a) Déterminer la matrice T associée à l'endomorphisme t relativement à la base $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$.

b) Déterminer le rang de t , ainsi que la dimension du noyau de t .

c) Justifier que 0 est valeur propre de t . Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0, ainsi qu'une base de ce sous-espace.

3. Montrer que $\text{Im}(t \circ t) \subset \text{Im}(t)$, où $\text{Im}(u)$ désigne l'image d'un endomorphisme u de \mathbb{R}^{2n+1} .

4. Soit \tilde{t} l'endomorphisme défini sur $\text{Im}(t)$ par : pour tout x de $\text{Im}(t)$, $\tilde{t}(x) = t(x)$

Établir que $\mathcal{B} = \left(e_1, \sum_{i=1}^{2n+1} e_i \right)$ constitue une base de $\text{Im}(t)$. Écrire la matrice associée à \tilde{t} relativement à la base \mathcal{B} .

5. a) Soit λ une valeur propre non nulle de t , et x un vecteur propre associé à λ . Montrer que x appartient à $\text{Im}(t)$.

b) En déduire toutes les valeurs propres de t . L'endomorphisme t est-il diagonalisable?

Exercice 2

Partie I : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série

On s'intéresse dans cette partie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

a) Montrer que les suites $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée $S(x)$.

b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a : $|u_n - S(x)| \leq \varepsilon$.

c) Justifier alors que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge et que l'on a : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

d) Justifier : $\forall p \in \mathbb{N}^*, u_{2p} \leq S(x) \leq u_{2p+1} \leq u_{2p-1}$.

e) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |S(x) - u_n| \leq \frac{1}{(n+1)^x}$.
 On pourra séparer les cas n pair et n impair.

f) En déduire une fonction **Scilab** qui, étant donnés deux réels $x > 0$ et $\varepsilon > 0$, renvoie une valeur approchée de $S(x)$ à ε près.

3. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x}$$

puis :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x}$$

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant la question 3. : $v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$.

b) En déduire la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, puis la valeur de $S(1)$.

5. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $S(2)$.

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $]0; +\infty[$ par : $\forall x \in]0; +\infty[, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

On rappelle également l'égalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t} dt$ converge si et seulement si $x > -1$.

On pose, pour tout réel x de $] -1; +\infty[, I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t} dt$.

7. Soit $x \in] -1; +\infty[$. On définit la fonction $g_x :]0; +\infty[, t \mapsto \frac{t^x}{1+e^t}$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+, g_x(t) = (-1)^n g_x(t) e^{-nt} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} t^x e^{-kt}$.

b) Justifier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt} dt$ converge et que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt} dt = \frac{1}{k^{x+1}} \Gamma(x+1)$$

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_x(t) e^{-nt} dt$ converge, puis que la limite de

$\int_0^{+\infty} g_x(t) e^{-nt} dt$, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, est égale à 0.

d) En déduire la relation : $I(x) = S(x+1) \Gamma(x+1)$, où la fonction S a été définie dans la Partie I.

8. En utilisant la Partie I., déterminer la valeur de $I(1)$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0, 1[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x))$$

2. a) Justifier : $\forall t \in]0, 1[, t \ln(t) < 0$.

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0, 1[$.

3. a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.

On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de \mathbb{N}^* , (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur \mathbb{R}_+ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.

En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur \mathbb{R}_+ que l'on note u_n .

7. Montrer que, pour tout n de \mathbb{N}^* , u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

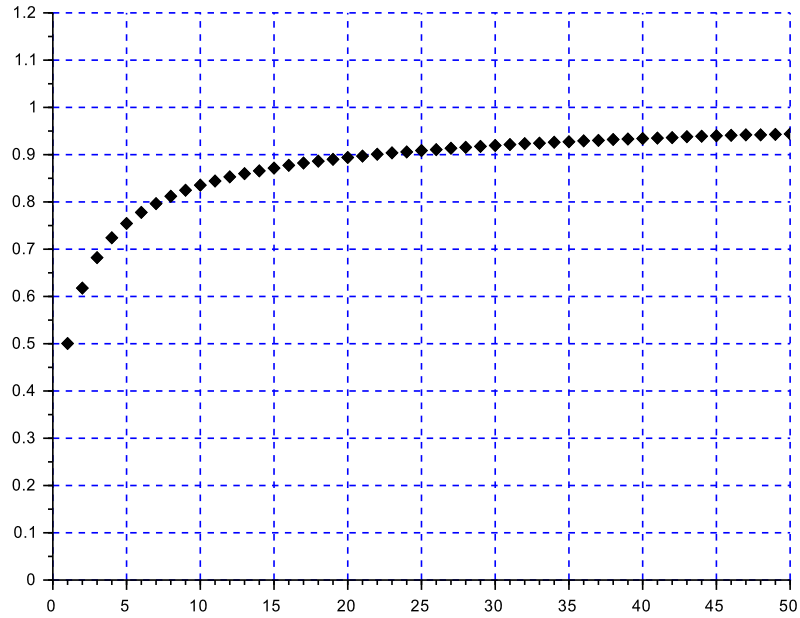
8. Déterminer u_1 et u_2 .

9. a) Recopier et compléter la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un entier n de \mathbb{N}^* , elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```

1  function u = valeur_approchee(n)
2      a = 0
3      b = 1
4      while ...
5          c = (a + b) / 2
6          if (c^n + c - 1) > 0 then
7              ...
8          else
9              ...
10         end
11         u = ...
12     end
13 endfunction
    
```

- b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant.
Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



10. a) Montrer, pour tout n de \mathbb{N}^* : $f(u_n) = n$.
b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.