DS2 (version A)

Exercice 1

Partie I : Étude d'une suite récurrente

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{n+1}$.
On suppose : $u_0 > 0$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. ***a)*** Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{2^n}$ converge. Dans la suite, on note : $\sigma = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

b) ***(i)*** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $v_n - v_{n-1}$ en fonction de n.
Puis déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (v_n - v_{n-1})$.

(ii) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\ell = \sigma + v_0$$

3. On suppose dans cette question que $u_0 \neq \mathrm{e}^{-\sigma}$.

a) Déterminer le signe de ℓ.
On pourra distinguer les cas $u_0 > e^{-\sigma}$ et $u_0 < e^{-\sigma}$.

b) En déduire la limite de $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, puis étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. On suppose dans cette question : $u_0 = \mathrm{e}^{-\sigma}$.

a) ***(i)*** Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

(ii) Retrouver dans ce cas la valeur de la limite ℓ de la suite (v_n).

b) ***(i)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) \geqslant \dfrac{\ln(n+1)}{2}$.

(ii) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie II : Approximation de σ

5. ***a)*** Montrer : $\forall x \in \,]0, +\infty[$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \dfrac{n+1}{2^n}$.

6. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sigma - \left(-\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leqslant \dfrac{n+1}{2^n}$.

7. Écrire une fonction **Scilab** d'entête `function sigma = approx(eps)` qui, prenant en argument un réel ε strictement positif, renvoie une valeur approchée de σ à ε près.

Exercice 2

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. ***a)*** Calculer $(A - 2\,I)\ (A + 2\,I)\ (A - I)$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. On note $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = 2 \cdot X\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_1) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & & & + & 2\,z & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \\ 2\,x & & & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right.$.

b) Déterminer $E_2(A)$.

c) En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_2(A)$.

3. Déterminer de même une base de $E_1(A)$ et $E_{-2}(A)$, espaces vectoriels définis par :

$$E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = X\} \quad \text{et} \quad E_{-2}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = -2 \cdot X\}$$

4. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer P^{-1}.

5. Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.
On appelle commutant de A, et on note C_A, l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$AM = MA$$

On appelle commutant de D, et on note C_D, l'ensemble des matrices N de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$DN = ND$$

6. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

7. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer :

$$M \in C_A \ \Leftrightarrow \ N \in C_D$$

8. Déterminer C_D, en utilisant les coefficients des matrices.

9. En déduire :

$$C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

10. Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A.

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On lance n fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et face également avec la probabilité $\frac{1}{2}$), les lancers étant supposés indépendants.
On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

1. ***a)*** Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.

b) Démontrer : $\mathbb{P}\big([Z=0]\big) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) Pour tout k de $Z(\Omega) \setminus \{0\}$, démontrer : $\mathbb{P}\big([Z=k]\big) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

d) Vérifier : $\sum\limits_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z=k]) = 1$.

e) On rappelle que l'instruction `grand(1, 1, 'bin ', 1, 0.5)` renvoie un nombre au hasard parmi les nombres 0 et 1. Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience décrite ci-dessus, l'entier n étant entré au clavier par l'utilisateur (pile sera codé par le nombre 1 et face par 0).

```
n = input(' Entrez un entier n : ')
Z = 0
k = 1
lancer = grand(1, 1, 'bin', 1, 0.5)
while (lancer == 0) & (k <= n)
  k = k + 1
  lancer = grand(1, 1, 'bin', 1, 0.5)
end
if k <> (n+1) then
  Z = .......
end
disp(Z)
```

On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_n$ telles que pour tout k de $\{0, 1, \ldots, n\}$ l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante :

- × si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geqslant 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à lissue de ces tirages,
- × si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. Déterminer $X(\Omega)$.

3. ***a)*** Quelle est la valeur de la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X=i])$?
On distinguera les cas $i=0$ et $1 \leqslant i \leqslant n$.

b) Quelle est la valeur de la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X=i])$?
On distinguera les cas $i=n$ et $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

c) Démontrer, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) = \begin{cases} \dbinom{k}{i} \left(\dfrac{k}{n}\right)^i \left(\dfrac{n-k}{n}\right)^{k-i} & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. a) Montrer : $\mathbb{P}([X = 0]) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^k + \dfrac{1}{2^n}$.

b) Montrer : $\mathbb{P}([X = n]) = \dfrac{1}{2^n}$.

c) Démontrer, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$: $\mathbb{P}([X = i]) = \sum\limits_{k=i}^{n-1} \dbinom{k}{i} \left(\dfrac{k}{2n}\right)^i \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^{k-i}$.

5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que $\sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X = i]) = 1$.

Problème

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties.
Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « le joueur gagne la $n^{\text{ème}}$ partie ».
De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \qquad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \qquad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \qquad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbb{P}(E_{n+1}) = \frac{2}{3}\,\mathbb{P}(E_n) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(F_n)$$

b) Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $\mathbb{P}(F_{n+1})$, $\mathbb{P}(G_{n+1})$ et $\mathbb{P}(H_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(E_n)$, $\mathbb{P}(F_n)$, $\mathbb{P}(G_n)$ et $\mathbb{P}(H_n)$.

c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_n) \\ \mathbb{P}(F_n) \\ \mathbb{P}(G_n) \\ \mathbb{P}(H_n) \end{pmatrix}$.

Vérifier que $U_{n+1} = M\,U_n$, où $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

2. ***a)*** Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.

b) Déterminer la matrice $D = P^{-1}MP$.

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. ***a)*** Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

b) Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geqslant 2$, $U_n = M^{n-2}\,U_2$.

c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de M^n, puis en déduire $\mathbb{P}(E_n)$, $\mathbb{P}(F_n)$, $\mathbb{P}(G_n)$ et $\mathbb{P}(H_n)$.

d) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_n) = \frac{3}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(F_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(G_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(H_n) = \frac{3}{10}$$

4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ème}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).

a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, exprimer A_k en fonction de E_k et F_k.

b) En déduire, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la loi de X_k.

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.

a) Calculer $\mathbb{P}([S_n = 2])$ en distinguant les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n \geqslant 4$.

b) Déterminer $\mathbb{P}([S_n = n])$.

c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, écrire S_n en fonction des variables X_k, puis déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n.