

## DS2 (version B)

### Exercice 1

#### Partie I : Étude d'une suite récurrente

On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}$ .

On suppose :  $u_0 > 0$ .

On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$ .

1. Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ .

2. a) Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{2^n}$  converge. Dans la suite, on note :  $\sigma = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$ .

b) (i) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , exprimer  $v_n - v_{n-1}$  en fonction de  $n$ .

Puis déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} (v_n - v_{n-1})$ .

(ii) En déduire que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite  $\ell \in \mathbb{R}$  qui vérifie :

$$\ell = \sigma + v_0$$

3. On suppose dans cette question que  $u_0 \neq e^{-\sigma}$ .

a) Déterminer le signe de  $\ell$ .

On pourra distinguer les cas  $u_0 > e^{-\sigma}$  et  $u_0 < e^{-\sigma}$ .

b) En déduire la limite de  $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ , puis étudier le comportement en  $+\infty$  de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

4. On suppose dans cette question :  $u_0 = e^{-\sigma}$ .

a) (i) Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$ .

(ii) Retrouver dans ce cas la valeur de la limite  $\ell$  de la suite  $(v_n)$ .

b) (i) Démontrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_n) \geq \frac{\ln(n+1)}{2}$ .

(ii) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

#### Partie II : Approximation de $\sigma$

5. a) Montrer :  $\forall x \in ]0, +\infty[, \ln(x) \leq x - 1$ .

b) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+1}{2^n}$ .

6. Montrer alors :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sigma - \left( -\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leq \frac{n+1}{2^n}$ .

7. Écrire une fonction **Scilab** d'entête `function sigma = approx(eps)` qui, prenant en argument un réel  $\varepsilon$  strictement positif, renvoie une valeur approchée de  $\sigma$  à  $\varepsilon$  près.

## Exercice 2

1. Soit  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs et  $A$  la matrice carré d'ordre 2 définie par :  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ .
- a) Montrer que si  $a$  et  $b$  sont égaux, la matrice  $A$  n'est pas inversible.
  - b) Calculer la matrice  $A^2 - 2aA$ . En déduire que, si  $a$  et  $b$  sont distincts, la matrice  $A$  est inversible et donner la matrice  $A^{-1}$ .
  - c) Montrer que les valeurs propres de  $A$  sont  $a + b$  et  $a - b$ .
  - d) On pose  $\Delta = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$ . Déterminer une matrice  $Q$ , carrée d'ordre 2 à coefficients réels, inversible et dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, vérifiant  $A = Q\Delta Q^{-1}$ .
  - e) Calculer la matrice  $Q^{-1}$  et, à l'aide de la question précédente, calculer la matrice  $A^n$  pour tout entier naturel non nul  $n$ .
2. Soit  $p$  un réel vérifiant  $0 < p < 1$  et  $q$  le réel  $1 - p$ . On suppose que  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre  $p$ .
- Pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ , on désigne par  $M(\omega)$  la matrice carrée d'ordre 2 :  $\begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$  et on note  $S(\omega)$  (respectivement  $D(\omega)$ ) la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre de  $M(\omega)$  et on définit ainsi deux variables aléatoires sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .
- a) Montrer que la probabilité de l'événement  $[X = Y]$  est donnée par :  $\mathbb{P}([X = Y]) = \frac{p}{2-p}$ .  
En déduire la probabilité de l'événement  $\{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \text{ est inversible}\}$ .
  - b) Calculer la covariance des variables aléatoires  $S$  et  $D$ .
  - c) Calculer les probabilités  $\mathbb{P}([S = 2] \cap [D = 0])$ ,  $\mathbb{P}([S = 2])$  et  $\mathbb{P}([D = 0])$ .  
Les variables aléatoires  $S$  et  $D$  sont-elles indépendantes ?
  - d) Établir, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2 :  $\mathbb{P}([S = n]) = (n-1)p^2q^{n-2}$ .
  - e) En déduire, lorsque  $p$  est égal à  $\frac{2}{21}$ , que la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices  $M(\omega)$  possibles est 11.

## Problème

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

### Introduction

On s'intéresse dans ce problème à la détermination de lois de probabilité composées qui interviennent en particulier dans la gestion du risque en assurance et en théorie de la ruine. On étudie le modèle suivant :

- le nombre de sinistres à prendre en charge par une compagnie d'assurances sur une période donnée est une variable aléatoire  $N$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  ;
- les coûts des sinistres successifs sont modélisés par une suite de variables aléatoires  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ . On suppose que les variables  $U_k$  sont à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , indépendantes et identiquement distribuées, et sont indépendantes de  $N$  ;
- On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n = \sum_{k=1}^n U_k$  et  $X_0$  est la variable certaine de valeur 0 ;

- la charge sinistrale totale pour la compagnie d'assurance sur une période est donnée par la variable aléatoire  $X$  définie par :

$$X = \sum_{k=1}^N U_k$$

et l'on précise que  $X = X_0 = 0$  si  $N$  prend la valeur 0. **On dit que  $X$  suit une loi composée.**

- Pour tout entier naturel  $j$ , on pose  $p_j = \mathbb{P}([N = j])$ ,  $q_j = \mathbb{P}([U_1 = j])$  et  $r_j = \mathbb{P}([X = j])$ .

### Partie I – Des exemples

Dans cette partie I, on suppose que les variables  $U_k$  suivent la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , où  $p$  est un réel de l'intervalle  $]0, 1[$ .

1. Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , quelle est la loi de  $X_n$  ?

2. Pour tout entier naturel  $j$ , établir :  $r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j]) p_n$ .

3. Dans cette question 3., on suppose que  $N$  suit la loi binomiale de paramètres  $m$ , entier naturel, et  $\pi$ , réel dans  $]0, 1[$ . Soit  $j$  un entier naturel.

a) Justifier que  $r_j = 0$  si  $j > m$ .

b) Établir que pour tout  $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$  :  $r_j = \sum_{n=j}^m \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}$ .

c) Vérifier que pour tous entiers  $j, n, m$  tels que  $0 \leq j \leq n \leq m$  :  $\binom{n}{j} \binom{m}{n} = \binom{m}{j} \binom{m-j}{n-j}$ .

d) En déduire, pour tout  $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$  :  $r_j = \binom{m}{j} (p\pi)^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} ((1-p)\pi)^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell}$ .

e) Montrer finalement que  $X$  suit une loi binomiale et préciser ses paramètres en fonction de  $m, p$  et  $\pi$ .

4. On suppose dans cette question 4. que  $N$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , réel strictement positif.

a) Montrer que pour tout entier naturel  $j$ , on a :

$$r_j = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} (\lambda(1-p))^{n-j}$$

b) En déduire que  $X$  suit une loi de Poisson, et préciser son paramètre en fonction de  $p$  et  $\lambda$ .

### Partie II – La loi binomiale négative

On généralise la définition des coefficients binomiaux aux nombres réels en posant, pour tout  $y$  réel et

tout entier  $k \in \mathbb{N}^*$  :  $\binom{y}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (y-i)$ , et  $\binom{y}{0} = 1$ .

5. Écrire une fonction en **Scilab** d'entête `function c = CoeffBin(y, k)` qui calcule  $\binom{y}{k}$ .

6. La formule du binôme négatif.

Soit  $c$  un réel strictement positif, et  $x$  un réel de  $[0, 1[$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $I_n = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} dt$ .

On admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^n \binom{c+k-1}{k} x^k + c \binom{c+n}{n} I_n$$

a) Vérifier que pour tout  $t \in [0, x] : 0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$ .

En déduire l'encadrement :  $0 \leq I_n \leq \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$ .

b) (i) Montrer, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  :  $\binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{c}{k}\right)$ .

(ii) Montrer que pour tout réel  $t$  positif,  $\ln(1+t) \leq t$ .

(iii) Établir, pour tout entier naturel  $k \geq 2$  :  $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$ .

En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$ .

(iv) Montrer que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  :  $\ln \left( \binom{c+n}{n} \right) \leq c(1 + \ln(n))$ .

En déduire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$ .

c) En conclure que la série  $\sum_{k \geq 0} \binom{c+k-1}{k} x^k$  est convergente, et établir la formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$$

7. Soit  $p$  un réel de  $]0, 1[$  et  $r$  un réel strictement positif. Montrer que la suite de nombres  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définie par  $p_k = \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k p^r$  définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On l'appelle *loi binomiale négative* de paramètres  $r$  et  $p$ .

8. Si  $Y$  est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres 1 et  $p$ , reconnaître la loi de  $Y + 1$ .

9. *Espérance et variance.*

Soit  $Z$  une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres  $r$  réel strictement positif et  $p \in ]0, 1[$ .

a) Montrer que pour tout entier  $k \geq 1$  :  $k \binom{r+k-1}{k} = r \binom{r+k-1}{k-1}$ .

b) Montrer que  $Z$  admet une espérance et que l'on a :  $\mathbb{E}(Z) = \frac{r(1-p)}{p}$ .

c) Montrer que  $Z$  admet une variance et que l'on a :  $\mathbb{V}(Z) = \frac{r(1-p)}{p^2}$ .

On pourra commencer par calculer l'espérance de  $Z(Z-1)$ .

### Partie III – Les lois de Panjer

On reprend les notations du début du problème : la variable aléatoire  $N$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  a sa loi donnée par  $p_k = \mathbb{P}([N = k])$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de  $N$  vérifie la relation de Panjer : il existe deux réels  $a$  et  $b$ , avec  $a < 1$  et  $a + b > 0$ , tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

On dira alors que  $N$  suit la loi  $\mathcal{P}(a, b)$ .

#### 10. Détermination des lois de Panjer.

a) Montrer que pour tout entier  $k$  strictement positif, on a :  $p_k = p_0 \prod_{i=1}^k \left(a + \frac{b}{i}\right)$ .

b) Dans cette question, on suppose que  $a = 0$ .  
Montrer que  $N$  suit une loi de Poisson de paramètre  $b$ .

c) Dans cette question, on suppose que  $a < 0$ .

(i) Montrer qu'il existe un unique entier naturel  $r$ , tel que :  $\forall k > r, p_k = 0$  et  $\forall k \leq r, p_k \neq 0$ .  
On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les  $p_k$  tous strictement positifs.

(ii) Montrer :  $b = -a(r + 1)$ .

(iii) Établir que pour tout  $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$ ,  $p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0$ .

En déduire que  $p_0 = \frac{1}{(1-a)^r}$ .

(iv) En conclure que  $N$  suit une loi binomiale et préciser les paramètres en fonction de  $a$  et  $b$ .

d) Dans cette question, on suppose que  $a > 0$ .

(i) Montrer que pour tout entier naturel  $k$ , on a :  $p_k = \binom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k p_0$ .

(ii) En déduire que  $N$  suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de  $a$  et  $b$ .

11. Montrer que, dans tous les cas,  $N$  admet une espérance et une variance, et qu'elles sont données par :  $\mathbb{E}(N) = \frac{a+b}{1-a}$  et  $\mathbb{V}(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}$ .