DS2 (version B)

Exercice 1 (`Inspiré Oral ESCP 2018`)

Partie I : Étude d'une suite récurrente

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{n+1}$.
On suppose : $u_0 > 0$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

Démonstration.

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n > 0$.
  - **Initialisation** :
    D'après l'énoncé : $u_0 > 0$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} > 0$).
    Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$.
    - Comme $u_n > 0$, alors $u_n^2 > 0$ (car la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$).
    - Comme de plus $n+1 > 0$ alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{n+1} > 0$.

    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

  $\boxed{\text{Par principe de récurrence, on en conclut : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.}$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  - Comme $u_n > 0$, alors la quantité $\ln(u_n)$ est bien définie.
  - De plus, $2^n \neq 0$.

  On en déduit que la quantité $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$ est bien définie.

  $\boxed{\text{Ainsi, la suite } (v_n) \text{ est bien définie.}}$

Commentaire

Démontrer qu'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, c'est démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité v_n est bien définie.

□

2. a) Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$ converge. Dans la suite, on note : $\sigma = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

Démonstration.
On a :

× $\forall n \geqslant 1$, $\dfrac{\ln(n)}{2^n} \geqslant 1$ et $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$.

× $\dfrac{\ln(n)}{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. En effet :

$$\frac{\frac{\ln(n)}{2^n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\ln(n)}{2^n}\, n^2 = \frac{\ln(n)}{(\sqrt{2})^n}\ \frac{n^2}{(\sqrt{2})^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $\dfrac{\ln(n)}{(\sqrt{2})^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{n^2}{(\sqrt{2})^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

× La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

Par critère de négligeabilité des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{2^n}$ converge. □

Commentaire

- Le théorème des croissances comparées stipule que pour tout $b > 0$ et $q > 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\big(\ln(n)\big)^b}{q^n} = 0$$

On dit alors que la croissance logarithmique est plus faible que la croissance exponentielle. Dans cette question, il s'agit de démontrer :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\,\ln(n)}{2^n} = 0$$

Le numérateur n'est ni polynomial, ni logarithmique. En toute rigueur, il faut donc un argument supplémentaire avant de pouvoir utiliser le théorème des croissances comparées.

- Il faut avoir en tête : $n^2\,\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o\big(n^3\big)$. La croissance au numérateur est donc « au mieux polynomiale ». Il est donc logique que la croissance exponentielle au dénominateur l'emporte.

- Rappelons au passage la condition `NÉCESSAIRE` de convergence des séries :

$$\sum w_n \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Cette condition n'est pas suffisante : $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ \cancel{\Rightarrow}\ \sum w_n$ converge.
(on peut illustrer ce point par la suite (w_n) définie par : $\forall n \geqslant 1$, $w_n = \frac{1}{n}$)
S'il est nécessaire que le terme général de la série tende vers 0, il faut de plus s'assurer que cette convergence se fait suffisamment rapidement. C'est ce que l'on fait dans le cas des séries à termes positifs : on s'assure que le terme général w_n tend vers 0 au moins aussi vite que le terme général d'une série convergente (on utilise les théorèmes de comparaisons).
C'est l'argument ici : $\dfrac{\ln(n)}{2^n}$ tend plus rapidement vers 0 que $\dfrac{1}{n^2}$ qui est un exemple classique de terme général de série convergente.

b) (i) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $v_k - v_{k-1}$ en fonction de k.
Puis déterminer la nature de la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} (v_k - v_{k-1})$.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} v_k - v_{k-1} &= \frac{\ln(u_k)}{2^k} - \frac{\ln(u_{k-1})}{2^{k-1}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{{u_{k-1}}^2}{(k-1)+1}\right)}{2^k} - \frac{\ln(u_{k-1})}{2^{k-1}} && \textit{(par définition de la suite } (u_n)\textit{)} \\ &= \frac{\ln\left({u_{k-1}}^2\right) - \ln(k)}{2^k} - \frac{2\ln(u_{k-1})}{2^k} \\ &= \frac{\cancel{2\ln(u_{k-1})} - \ln(k) - \cancel{2\ln(u_{k-1})}}{2^k} && \textit{(car } u_{k-1} > 0\textit{)} \\ &= -\frac{\ln(k)}{2^k} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ v_k - v_{k-1} = -\frac{\ln(k)}{2^k}}$$

- On a vu dans la question précédente que la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ est convergente.
On ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par -1 $(\neq 0)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{k \geqslant 1} (v_k - v_{k-1}) \text{ est convergente.}}$$

□

(ii) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Exprimer sa limite ℓ en fonction de u_0 et σ.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$. Par télescopage, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (v_k - v_{k-1}) = v_n - v_{1-1} = v_n - v_0$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^{n} (v_k - v_{k-1}) + v_0 \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 && \textit{(d'après la question précédente)} \end{aligned}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \qquad v_0$$

*(car on a montré en question **2.a** que la série* $\sum\limits_{k \geqslant 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ *est convergente)*

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est convergente, de limite } \ell = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 = \sigma + v_0.}$$

□

3. On suppose dans cette question que $u_0 \neq \text{e}^{-\sigma}$.

a) Déterminer le signe de ℓ.
On pourra distinguer les cas $u_0 > e^{-\sigma}$ et $u_0 < e^{-\sigma}$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\ell \ = \ \sigma + v_0 \ = \ \sigma + \ln(u_0)$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \ell > 0 & \Leftrightarrow & \sigma + \ln(u_0) > 0 & \\ & \Leftrightarrow & \ln(u_0) > -\sigma & \\ & \Leftrightarrow & u_0 > \text{e}^{-\sigma} & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si : } u_0 > \text{e}^{-\sigma} \text{ alors : } \ell > 0.}$$

- De même :

$$\ell < 0 \ \Leftrightarrow \ u_0 < \text{e}^{-\sigma}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si : } u_0 < \text{e}^{-\sigma} \text{ alors : } \ell < 0.}$$

□

b) En déduire la limite de $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, puis étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition :

$$\ln(u_n) \ = \ 2^n \ v_n$$

Deux cas se présentent :

× si $u_0 > \text{e}^{-\sigma}$: alors la suite (v_n) est convergente de limite $\ell > 0$.
De plus : $2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par produit de limites, que la suite } \big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$$

Enfin : $u_n = \exp\big(\ln(u_n)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$$

× si $u_0 < \text{e}^{-\sigma}$: alors la suite (v_n) est convergente de limite $\ell < 0$.
De plus : $2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par produit de limites, que la suite } \big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } -\infty.}$$

Enfin : $u_n = \exp\big(\ln(u_n)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$

□

4. On suppose dans cette question : $u_0 = \mathrm{e}^{-\sigma}$.

a) (i) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

Démonstration.

- Comme on a supposé $u_0 = \mathrm{e}^{-\sigma}$, on a :

$$v_0 \ = \ \ln(u_0) \ = \ -\sigma \ = \ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$$

- Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après la question ***2.b)(ii)*** :

$$\begin{aligned} v_n \ &= \ -\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 \\ &= \ -\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \ = \ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \end{aligned}$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}.}$$

□

(ii) Retrouver dans ce cas la valeur de la limite ℓ de la suite (v_n).

Démonstration.

- En question ***2.a)***, on a démontré que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{\ln(n)}{2^n}$ est convergente.

  Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$$

  et ainsi :

$$\begin{aligned} v_n \ &= \ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= \ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \\ &\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \ = \ 0 \end{aligned}$$

- Rappelons qu'on a démontré en question ***2.b)(ii)*** :

$$\ell \ = \ \sigma + v_0 \ = \ \sigma + \ln(u_0) \ = \ \sigma + \ln\left(\mathrm{e}^{-\sigma}\right) \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{On retrouve le résultat de la question } \textbf{\textit{2.b)(ii)}} \text{ : la suite } (v_n) \text{ est convergente de limite nulle.}}$$

Commentaire

Cette question est une illustration d'un résultat classique sur les séries. Étant donnée une série $\sum u_n$ convergente, de somme notée S et dont la suite des sommes partielles est notée $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k}_{S} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k}_{S_n} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}_{R_n}$$

La quantité $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé reste d'ordre n de la série $\sum u_n$.
La suite (R_n) ainsi construite est convergente de limite nulle. En effet :

$$R_n = S - S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$$

□

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\ln(u_n) &= 2^n\, v_n \\
&= 2^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \\
&= 2^n \left(\frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \\
&= \frac{\ln(n+1)}{2} + 2^n \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \\
&\geqslant \frac{\ln(n+1)}{2} && \textit{(car } \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \geqslant 0 \textit{ en tant que somme de réels positifs)}
\end{aligned}$$

- On en déduit, par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$:

$$u_n \geqslant \exp\left(\frac{\ln(n+1)}{2}\right)$$

Or : $\dfrac{\ln(n+1)}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par composition : $\exp\left(\dfrac{\ln(n+1)}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$$

□

Partie II : Approximation de σ

5. a) Montrer : $\forall x \in \,]0,+\infty[, \ \ln(x) \leqslant x-1$.

Démonstration.
La fonction $g : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0,+\infty[$.
Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ se situe donc sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= g(1) + g'(1)\,(x-1) \\ &= \ln(1) + \frac{1}{1}\,(x-1) \ = \ x-1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \,]0,+\infty[, \ \ln(x) \leqslant x-1.}$$

Commentaire

- Le membre droit de l'inégalité souhaitée est un polynôme de degré 1. Sa représentation graphique est une droite. C'est ce constat qui doit faire penser à une inégalité de convexité.
- Si on ne pense pas à utiliser une propriété de convexité, on peut aussi résoudre cette question en étudiant le signe de la fonction $x \mapsto \ln(x) - x$.

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \dfrac{n+1}{2^n}$.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rrcll} & \ln(k) & \leqslant & k-1 & \\ \text{donc} & \dfrac{\ln(k)}{2^k} & \leqslant & \dfrac{k-1}{2^k} & \quad \textit{(car } 2^k > 0\textit{)} \end{array}$$

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \geqslant n+1$. En sommant les inégalités précédentes pour k variant de $n+1$ à m, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \frac{k-1}{2^k} \qquad (*)$$

- Considérons la partie de droite :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=n+1}^{m} (k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ = \ & \sum_{k=1}^{m-n} (k+n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k+n} && \textit{(par décalage d'indice)} \\ = \ & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sum_{k=1}^{m-n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^k && \textit{(par linéarité de la somme)} \end{aligned}$$

Or :

× la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ est une série géométrique dérivée première de raison $\frac{1}{2} \in \,]-1,1[$.
C'est donc une série convergente. De plus, on a :

$$\sum_{k=1}^{m-n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

× la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in \,]-1,1[$.
C'est donc une série convergente. De plus, on a :

$$\sum_{k=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{(\frac{1}{2})^1 - (\frac{1}{2})^{m-n+1}}{1-\frac{1}{2}} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Ainsi : $\sum\limits_{k=n+1}^{m} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} 4 + (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} 2 + (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{n+1}{2^n}$

- On en déduit que le membre droit de l'inégalité $(*)$ admet une limite finie.
  Par passage à la limite lorsque m tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \frac{n+1}{2^n}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \frac{n+1}{2^n}}$$

□

6. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sigma - \left(-\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| \leqslant \frac{n+1}{2^n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\sigma - \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right) &= \sigma + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \\
&= -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} && \textit{(par définition de } \sigma\textit{)} \\
&= -\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right) \\
&= -\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}\right) = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}
\end{aligned}$$

- On en déduit alors :

$$\begin{aligned}\left|\sigma - \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| &= \left|-\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}\right| \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} && \textit{(car } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} > 0 \textit{ en tant que somme d'une série à termes positifs)} \\ &\leqslant \frac{n+1}{2^n} && \textit{(d'après la question précédente)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\sigma - \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| \leqslant \frac{n+1}{2^n}}$$

□

7. Écrire une fonction **Scilab** d'entête `function sigma = approx(epsilon)` qui, prenant en argument un réel ε strictement positif, renvoie une valeur approchée de σ à ε près.

Démonstration.

- On cherche ici à trouver un entier N tel que $-\sum_{k=1}^{N} \frac{\ln(k)}{2^k}$ est une valeur approchée de σ à ε près.
Autrement dit, on souhaite exhiber $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left|\sigma - \left(-\sum_{k=1}^{N} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

- Or, d'après la question ***6.***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\sigma - \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| \leqslant \frac{n+1}{2^n}$$

- Il suffit alors de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{N+1}{2^N} \leqslant \varepsilon$.
En effet, par transitivité, on aura alors :

$$\left|\sigma - \left(-\sum_{k=1}^{N} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| \leqslant \frac{N+1}{2^N} \leqslant \varepsilon$$

- On propose alors la fonction suivante :

```
function sigma = approx(eps)
    N = 0
    S = 0
    while (N+1) / 2 ^N > eps
      N = N + 1
      S = S + log(N) / 2 ^N
    end
    sigma = -S
endfunction
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
L'énoncé commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `approx`,

× elle prend en paramètre un réel strictement positif `eps`,

× elle admet pour variable de sortie `sigma`.

```
1 function sigma = approx(eps)
```

La variable `N` est initialisée à 0.

```
2     N = 0
```

La variable `S` qui contiendra la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$, est initialisée à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élémnet neutre de l'opérateur de sommation).

```
3     S = 0
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 4 à 7 consistent à :

  × déterminer un entier n tel que : $\dfrac{n+1}{2^n} \leqslant \varepsilon$,

  × calculer les valeurs successives de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

  On doit donc :

  1) incrémenter la variable `N` de 1 jusqu'à ce que : $\dfrac{n+1}{2^n} \leqslant \varepsilon$. Autrement dit, on doit incrémenter la variable `N` de 1 tant que : $\dfrac{n+1}{2^n} > \varepsilon$. Pour cela on met en place une structure itérative (boucle while) :

```
4     while (N+1) / 2^N > eps
```

  Puis on met à jour la variable `N`.

```
5         N = N + 1
```

  2) mettre à jour la variable `S` pour qu'elle contienne la somme $\sum\limits_{k=1}^{\mathtt{N}} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$:

```
6         S = S + log(N) / 2^N
```

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle :

  × la variable `N` contient le premier entier n tel que : $\dfrac{n+1}{2^n} \leqslant \varepsilon$. Elle contient donc un entier n tel que $-\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$ est une valeur approchée de σ à ε près,

  × la variable `S` contient $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$. Pour obtenir une valeur approchée de σ, il reste donc à multiplier la variable `S` par -1.

```
8     sigma = -S
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer une fonction **Scilab** correcte démontre la bonne compréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.

□

Exercice 2 (HEC 2003)

1. Soit a et b deux réels strictement positifs et A la matrice carré d'ordre 2 définie par : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

a) Montrer que si a et b sont égaux, la matrice A n'est pas inversible.

Démonstration.
Tout d'abord :

$$\det(A) \ = \ \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\right) \ = \ a^2 - b^2$$

$$\boxed{\text{Si } a = b \text{ alors } \det(A) = a^2 - a^2 = 0 \text{ et ainsi } A \text{ est non inversible.}}$$

□

b) Calculer la matrice $A^2 - 2a\,A$.
En déduire que, si a et b sont distincts, la matrice A est inversible et donner la matrice A^{-1}.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A^2 \ = \ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+ba \\ ba+ab & b^2+a^2 \end{pmatrix}$$

- Ainsi :

$$A^2 - 2a\,A \ = \ \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2\,ab \\ 2\,ab & a^2+b^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\,a^2 & 2\,ab \\ 2\,ab & 2\,a^2 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} b^2-a^2 & 0 \\ 0 & b^2-a^2 \end{pmatrix} \ = \ (b^2-a^2)\ I_2$$

$$\boxed{A^2 - 2a\,A = (b^2-a^2)\ I_2}$$

- Remarquons alors :

$$b^2 - a^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ (b-a)\,(b+a) = 0 \ \Leftrightarrow \ a = b \ \texttt{OU} \ a = -b$$

Or, comme $a > 0$ et $b > 0$, alors : $a \neq -b$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } b^2 - a^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ a = b.}$$

- Supposons alors $a \neq b$. D'après le point précédent : $b^2 - a^2 \neq 0$.
D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{lrcl} & A^2 - 2a\,A & = & (b^2-a^2)\ I_2 \\ \text{donc} & A(A - 2a\,I_2) & = & (b^2-a^2)\ I_2 \\ \text{et} & A\left(\dfrac{1}{b^2-a^2}\ (A - 2a\,I_2)\right) & = & I_2 \qquad \textit{(car } b^2 - a^2 \neq 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } A \text{ est inversible, d'inverse } \frac{1}{b^2-a^2}\ (A - 2a\,I_2).}$$

□

c) Montrer que les valeurs propres de A sont $a+b$ et $a-b$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, le polynôme : $P(X) = X^2 - 2a\,X + (a^2 - b^2)$ est un polynôme annulateur de A. Or :

$$P(X) = X^2 - 2a\,X + (a-b)\,(a+b) = \big(X - (a-b)\big)\,\big(X - (a+b)\big)$$

Or : $\mathrm{Sp}(A) \subseteq \{\text{racines de } P\}$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subseteq \{a-b, a+b\}}$$

- Vérifions que $a-b$ est valeur propre de A :

$$\det(A-(a-b)\,I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} a-(a-b) & b \\ b & a-(a-b) \end{pmatrix}\right) \ = \ \det\left(\begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix}\right) \ = \ b^2-b^2 \ = \ 0$$

Ainsi, $A-(a-b)\,I_2$ n'est pas inversible.

$$\boxed{\text{Ainsi, } a-b \text{ est valeur propre de } A.}$$

- Vérifions que $a+b$ est valeur propre de A :

$$\det(A-(a+b)\,I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} a-(a+b) & b \\ b & a-(a+b) \end{pmatrix}\right) \ = \ \det\left(\begin{pmatrix} -b & b \\ b & -b \end{pmatrix}\right) \ = \ (-b)^2-b^2 \ = \ b^2-b^2 \ = \ 0$$

Ainsi, $A-(a+b)\,I_2$ n'est pas inversible.

$$\boxed{\text{Ainsi, } a-b \text{ est valeur propre de } A.}$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{a-b, a+b\}.}$$

Commentaire

- Étant en présence d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on privilégie ici l'utilisation du déterminant. Cependant, on peut aussi rédiger à l'aide d'un calcul de rang. Par exemple :

$$\mathrm{rg}(A-(a+b)\,I_2) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -b & b \\ b & -b \end{pmatrix}\right) < 2 \quad \text{car } C_1 = -C_2$$

- Au vu de la première question, introduire un polynôme annulateur est un bon réflexe. Cependant, on peut faire une démonstration directe.
Détaillons-la. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) & \Leftrightarrow & A-\lambda\, I \text{ non inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det(A-\lambda\, I_2) = 0 \end{array}$$

Or :

$$\begin{array}{rcl} \det(A-\lambda I_2) & = & \det\left(\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & = & (a-\lambda)^2 - b^2 = \big((a-\lambda)-b\big)\,\big((a-\lambda)+b\big) \\ & = & \big(\lambda-(a-b)\big)\,\big(\lambda-(a+b)\big) \end{array}$$

On obtient bien : $\mathrm{Sp}(A) = \{a-b, a+b\}$.

$\square$

d) On pose $\Delta = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice Q, carrée d'ordre 2 à coefficients réels, inversible et dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, vérifiant $A = Q\Delta Q^{-1}$.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord que $a-b$ et $a+b$ sont des valeurs distinctes :

$$a+b = a-b \ \Leftrightarrow \ 2b = 0 \ \Leftrightarrow \ b = 0$$

$$\boxed{\text{Comme } b > 0, \text{ on a bien : } a-b \neq a+b.}$$

- Remarquons alors :
  × $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a+b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $a+b$.

  De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

  × $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (a-b) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

  Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $a-b$.

  De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

  La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$:

  × est libre car obtenue comme concaténation de deux familles libres de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes (car $a-b \neq a+b$).

  × vérifie : $\mathrm{Card}\left(\mathcal{F}\right) = 2 = \dim\left(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})\right)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{F} \text{ est une base de } \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ constituée de vecteurs propres de } A.}$$

$$\boxed{\text{En posant } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ on obtient : } A = Q\Delta Q^{-1}.}$$

□

Commentaire

- Les vecteurs propres utilisés dans cette question n'ont pas été déterminés au hasard mais obtenus par lecture de la matrice $A - \lambda\, I$. Par exemple, pour $\lambda = a + b$, il s'agit de chercher les vecteurs $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{a+b}(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(A - (a+b)\, I_2)\ U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$. Or :
$$(A - (a+b)\, I_2)\ U \ = \ \begin{pmatrix} -b & b \\ b & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ = \ x \cdot C_1 + y \cdot C_2 \ = \ x \cdot \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$
Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ l'aide de cette combinaison linéaire, il faut choisir $x = y$. En prenant par exemple $x = y = 1$, on obtient :
$$E_{a+b}(A) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
- Dans la démonstration, on exhibe des vecteurs propres. On obtient ainsi les inclusions suivantes :
$$E_{a+b}(A) \supseteq \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad E_{a-b}(A) \supseteq \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$
Comme A est carrée d'ordre 2 et possède 2 valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable. On en déduit :
$$\dim\big(E_{a+b}(A)\big) + \dim\big(E_{a-b}(A)\big) = \dim\big(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})\big) = 2$$
ce qui permet de conclure : $\dim\big(E_{a+b}(A)\big) = 1$ et $\dim\big(E_{a-b}(A)\big) = 1$ et ainsi de démontrer que les inclusions ci-dessus sont des égalités.
- On pouvait aussi déterminer les espaces propres $E_{a+b}(A)$ et $E_{a-b}(A)$ en procédant par résolution de systèmes linéaires.

e) Calculer la matrice Q^{-1} et, à l'aide de la question précédente, calculer la matrice A^n pour tout entier naturel non nul n.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On en déduit :

$$Q^{-1} \; = \; \frac{1}{\det(Q)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \; = \; \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \; = \; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

avec $\det(Q) = (1 \times (-1)) - (1 \times 1) = -2$.

$$\boxed{Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} A^n & = & Q \Delta^n Q^{-1} & \textit{(par une récurrence immédiate)} \\[2mm] & = & \frac{1}{2}\, Q \begin{pmatrix} (a+b)^n & 0 \\ 0 & (a-b)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \\[2mm] & = & \frac{1}{2}\, Q \begin{pmatrix} (a+b)^n & (a+b)^n \\ (a-b)^n & -(a-b)^n \end{pmatrix} & \\[2mm] & = & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a+b)^n & (a+b)^n \\ (a-b)^n & -(a-b)^n \end{pmatrix} & \\[2mm] & = & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a+b)^n + (a-b)^n & (a+b)^n - (a-b)^n \\ (a-b)^n - (a-b)^n & (a+b)^n + (a-b)^n \end{pmatrix} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a+b)^n + (a-b)^n & (a+b)^n - (a-b)^n \\ (a-b)^n - (a-b)^n & (a+b)^n + (a-b)^n \end{pmatrix}.}$$

□

2. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et q le réel $1 - p$. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p.

Pour tout ω de Ω, on désigne par $M(\omega)$ la matrice carrée d'ordre 2 : $\begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$ et on note $S(\omega)$ (respectivement $D(\omega)$) la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre de $M(\omega)$ et on définit ainsi deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) Montrer que la probabilité de l'événement $[X = Y]$ est donnée par : $\mathbb{P}([X = Y]) = \dfrac{p}{2-p}$.

En déduire la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \text{ est inversible}\}$.

Démonstration.

- Rappelons que comme $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$:

  (i) $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$,

  (ii) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([Y = k]\big) = p\,(1-p)^{k-1}$.

- La famille $\big([Y = k] \big)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$
\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([X = Y] \big) & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y = k] \cap [X = Y] \big) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y = k] \cap [X = k] \big) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y = k] \big) \times \mathbb{P}\big([X = k] \big) & \textit{(car les v.a.r. } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} p\,(1-p)^{k-1} \times p\,(1-p)^{k-1} & \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \textit{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p\,(1-p)^{k} \times p\,(1-p)^{k} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & p^2 \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \big((1-p)^2 \big)^k & \\
& = & p^2 \dfrac{1}{1-(1-p)^2} & \textit{(avec } 1-p \neq 1 \textit{ puisque } p \neq 0\textit{)} \\
& = & p^2 \dfrac{1}{\cancel{1} - (\cancel{1} - 2p + p^2)} \ = \ p^2 \dfrac{1}{2p - p^2} \ = \ p^{\cancel{2}} \dfrac{1}{\cancel{p}\,(2-p)} &
\end{array}
$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}\big([X = Y] \big) = \dfrac{p}{2-p}.}$$

- Soit $\omega \in \Omega$.
  Dans la question ***1.***, on a considéré une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a > 0$ et $b > 0$.
  On a démontré (questions ***1.a)*** et ***1.b)***) :

$$A \text{ inversible } \Leftrightarrow \ a \neq b$$

  Comme X et Y suivent une loi géométrique, elles sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
  Ainsi : $X(\omega) > 0$ et $Y(\omega) > 0$. On en déduit :

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix} \text{ est inversible } \Leftrightarrow \ X(\omega) \neq Y(\omega)$$

  et ainsi :

$$\{\, \omega \in \Omega \mid M(\omega) \text{ est inversible } \} \ = \ \{\, \omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Y(\omega) \,\} \ = \ [X \neq Y] \ = \ \overline{[X = Y]}$$

  Ainsi :

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\big(\{\, \omega \in \Omega \mid M(\omega) \text{ est inversible } \} \big) & = & \mathbb{P}\left(\overline{[X = Y]} \right) \\
& = & 1 - \mathbb{P}\big([X = Y] \big) \\
& = & 1 - \dfrac{p}{2-p} \\
& = & \dfrac{(2-p) - p}{2-p} \ = \ \dfrac{2-2p}{2-p} \ = \ 2\,\dfrac{1-p}{2-p}
\end{array}
$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{\, \omega \in \Omega \mid M(\omega) \text{ est inversible } \} \big) = 2\,\dfrac{1-p}{2-p}}$$

□

b) Calculer la covariance des variables aléatoires S et D.

Démonstration.

- Soit $\omega \in \Omega$.
  Dans la question ***1.***, on a vu que tout matrice A qui s'écrit sous la forme : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a > 0$ et $b > 0$ admet deux valeurs propres distinctes $a - b$ et $a + b$.

  Comme X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:
  × $X(\omega) > 0$ et $Y(\omega) > 0$.
  × $Y(\omega) > -Y(\omega)$ et donc : $X(\omega) + Y(\omega) > X(\omega) - Y(\omega)$.

  On déduit de la question ***1.*** que la matrice $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$ admet deux valeurs propres distinctes : $X(\omega) - Y(\omega)$ et $X(\omega) + Y(\omega)$.

  $$\boxed{\text{On en conclut : } \forall \omega \in \Omega,\ D(\omega) = X(\omega) - Y(\omega) \text{ et } S(\omega) = X(\omega) + Y(\omega).}$$

- Rappelons tout d'abord que les v.a.r. X et Y admettent une variance car elles suivent toutes les deux la loi $\mathcal{G}(p)$. Les v.a.r. $S = X + Y$ et $D = X - Y$ admettent chacune une variance comme somme et différence de v.a.r. discrètes qui admettent une variance.

  $$\boxed{\text{On en conclut que les v.a.r. } S \text{ et } D \text{ admettent une covariance.}}$$

- On a alors :

$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{Cov}(S, D) & = & \mathrm{Cov}(X + Y, X - Y) & \textit{(par définition de } S \textit{ et } D\textit{)} \\
& = & \mathrm{Cov}(X, X - Y) + \mathrm{Cov}(Y, X - Y) & \textit{(par linéarité à gauche de l'opérateur covariance)} \\
& = & \mathrm{Cov}(X, X) - \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(Y, X) - \mathrm{Cov}(Y, Y) & \textit{(par linéarité à gauche de l'opérateur covariance)} \\
& = & \mathrm{Cov}(X, X) - \cancel{\mathrm{Cov}(X, Y)} + \cancel{\mathrm{Cov}(X, Y)} - \mathrm{Cov}(Y, Y) & \textit{(par symétrie de l'opérateur covariance)} \\
& = & \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y) \ = \ 0 & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ suivent la même loi)}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(S, D) = 0}$$

Commentaire

Les noms des v.a.r. S et D ne sont pas choisis au hasard :
× la v.a.r. S est la somme : $S = X + Y$,
× la v.a.r. D est la différence : $D = X - Y$.
C'est une indication de l'énoncé qui permet de confirmer les formules trouvées pour S et D.

□

c) Calculer les probabilités $\mathbb{P}\big([S=2]\cap[D=0]\big)$, $\mathbb{P}\big([S=2]\big)$ et $\mathbb{P}\big([D=0]\big)$.
Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$[S=2]\cap[D=0] \;=\; [X+Y=2]\cap[X-Y=0] \;=\; [X=1]\cap[Y=1]$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([S=2]\cap[D=0]\big) & = & \mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=1]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([X=1]\big)\times\mathbb{P}\big([Y=1]\big) & \textit{(par indépendance des v.a.r. } X \textit{ et } Y\textit{)} \\ & = & p\times p \;=\; p^2 & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([S=2]\cap[D=0]\big)=p^2}$$

- Ensuite :

$$[S=2] \;=\; [X+Y=2] \;=\; [X=1]\cap[Y=1]$$

En effet, comme les v.a.r. X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, alors, pour tout $\omega\in\Omega$, on a : $X(\omega)\geqslant 1$, $Y(\omega)\geqslant 1$. Ce qui permet de conclure :

$$X(\omega)+Y(\omega)=2 \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} X(\omega)=1 \\ Y(\omega)=1 \end{array}\right.$$

et démontre ainsi l'égalité d'événements précédente.

$$\boxed{\mathbb{P}\big([S=2]\big) \;=\; \mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=1]\big) \;=\; \mathbb{P}\big([S=2]\cap[D=0]\big) \;=\; p^2}$$

- Enfin :

$$[D=0] \;=\; [X-Y=0] \;=\; [X=Y]$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([D=0]\big) \;=\; \mathbb{P}\big([X=Y]\big) \;=\; \dfrac{p}{2-p}}$$

- Il reste alors à étudier si les v.a.r. S et D sont indépendantes. Or :

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}\big([S=2]\cap[D=0]\big) \;=\; \mathbb{P}\big([S=2]\big)\times\mathbb{P}\big([D=0]\big) & \\ \Leftrightarrow & p^2 \;=\; p^2\,\dfrac{p}{2-p} & \\ \Leftrightarrow & 1 \;=\; \dfrac{p}{2-p} & \textit{(car } p\neq 0\textit{)} \\ \Leftrightarrow & 2-p \;=\; p & \\ \Leftrightarrow & 2 \;=\; 2p & \\ \Leftrightarrow & 1 \;=\; p & \end{array}$$

Or, par hypothèse, $p\neq 1$.
On en déduit : $\mathbb{P}\big([S=2]\cap[D=0]\big) \;\neq\; \mathbb{P}\big([S=2]\big)\times\mathbb{P}\big([D=0]\big)$.

$$\boxed{\text{Les v.a.r. } S \text{ et } D \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Commentaire

- Profitons de cette question pour rappeller que deux v.a.r. **discrètes** U et V sont indépendantes (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si :

$$\boxed{\forall u \in U(\Omega), \forall v \in V(\Omega),\ \mathbb{P}([U=u] \cap [V=v]) \ = \ \mathbb{P}([U=u]) \times \mathbb{P}([V=v])}$$

Ainsi, U et V ne sont pas indépendantes si :

$$\boxed{\exists u \in U(\Omega), \exists v \in V(\Omega),\ \mathbb{P}([U=u] \cap [V=v]) \ \neq \ \mathbb{P}([U=u]) \times \mathbb{P}([V=v])}$$

C'est donc la définition qui nous permet de conclure que S et D ne sont pas indépendantes.

- Profitons-en aussi pour rappeler le lien entre covariance et indépendance :

$$\boxed{U \text{ et } V \text{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Cov}(U,V) = 0}$$

Généralement c'est la contraposée de cet énoncé qui est utilisée.
Elle permet de démontrer que deux v.a.r. U et V ne sont pas indépendantes.

$$\boxed{\mathrm{Cov}(U,V) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad U \text{ et } V \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

Ce résultat `N'EST PAS` une équivalence.
Les v.a.r. S et D illustrent ce point puisque ces v.a.r. :

× ne sont pas indépendantes,

× vérifient $\mathrm{Cov}(S,D) = 0$.

□

d) Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\mathbb{P}([S=n]) = (n-1)\, p^2\, q^{n-2}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Tout d'abord :

$$[S=n] \ = \ [X+Y=n]$$

- La famille $\big([Y=k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\big([X+Y=n]\big) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y=k] \cap [X+Y=n]\big) \\[2ex]
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y=k] \cap [X+\textcolor{red}{k}=n]\big) \\[2ex]
& = & \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ n-k \in X(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y=k] \cap [X=n-k]\big) \\[2ex]
& & + \cancel{\displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ n-k \notin X(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y=k] \cap [X=n-k]\big)} \quad \textit{(car } [X=n-k]=\varnothing \textit{ si } n-k \notin X(\Omega)\textit{)} \\[2ex]
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big([Y=k] \cap [X=n-k]\big)
\end{array}$$

- La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} n-k \in X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ k \in [\![1,+\infty[\![\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant n-k \\ 1 \leqslant k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k \leqslant n-1 \\ 1 \leqslant k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ 1 \leqslant k \leqslant n-1\right.$$

- Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X+Y=n]) & = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big([Y=k]\cap[X=n-k]\big) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big([Y=k]\big)\times\mathbb{P}\big([X=n-k]\big) & \textit{(car les v.a.r. } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} p\,(1-p)^{k-1}\times p\,(1-p)^{n-k-1} & \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \textit{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} p^2\,(1-p)^{n-2} \ = \ (n-1)\ p^2\,(1-p)^{n-2} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}\big([X+Y=n]\big) = (n-1)\ p^2\,(1-p)^{n-2}.}$$

Commentaire

- Il est fréquent, lors de l'étape de restriction des indices de la somme de tomber sur une contrainte s'exprimant par deux inégalités :

$$a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ET} \ c \leqslant i \leqslant d \quad \text{où } (a,b,c,d) \in \big(\overline{\mathbb{R}}\big)^4$$

où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$. On pourra alors utiliser le résultat suivant :

$$\boxed{(a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ET} \ c \leqslant i \leqslant d) \quad \Leftrightarrow \quad \max(a,c) \leqslant i \leqslant \min(b,d)}$$

(à gauche c'est le plus grand élément qui contraint le plus, à droite c'est le plus petit élément qui contraint le plus)

- On peut illustrer ce propos par une présentation légèrement différente de la question précédente :

$$\left\{\begin{array}{l} n-k \in X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ k \in [\![1,+\infty[\![\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant n-k < +\infty \\ 1 \leqslant k < +\infty \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1-n \leqslant -k < +\infty \\ 1 \leqslant k < +\infty \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\infty < k \leqslant n-1 \\ 1 \leqslant k < +\infty \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ 1 \leqslant k \leqslant n-1\right.$$

□

e) En déduire, lorsque p est égal à $\dfrac{2}{21}$, que la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices $M(\omega)$ possibles est 11.

Démonstration.

- Il s'agit de trouver l'entier $N \geqslant 2$ qui maximise $\mathbb{P}\big([S=N]\big) = (N-1)\,p^2\,(1-p)^{N-2}$.
On réalise alors l'étude la fonction f suivante afin de déterminer si elle admet un maximum :

$$f : x \mapsto (x-1)\,p^2\,(1-p)^{x-2} \ = \ (x-1)\,p^2\,\exp\big((x-2)\ \ln(1-p)\big)$$

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ commme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & p^2 \exp\big((x-2)\ \ln(1-p)\big) + (x-1)\ \ln(1-p)\, p^2 \exp\big((x-2)\ \ln(1-p)\big) \\ & = & \big(p^2 + (x-1)\ \ln(1-p)\, p^2\big)\ \exp\big((x-2)\ \ln(1-p)\big) \end{array}$$

  Comme $\exp\big((x-2)\ \ln(1-p)\big) > 0$, la quantité $f'(x)$ est du signe de $p^2 + (x-1)\ \ln(1-p)\, p^2$.

$$\begin{array}{rcll} f'(x) > 0 & \Leftrightarrow & p^2 + (x-1)\ \ln(1-p)\, p^2 > 0 & \\ & \Leftrightarrow & p^2 \big(1 + (x-1)\ \ln(1-p)\big) > 0 & \\ & \Leftrightarrow & 1 + (x-1)\ \ln(1-p) > 0 & \textit{(car } p^2 > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & (x-1)\ \ln(1-p) > -1 & \\ & \Leftrightarrow & x - 1 < -\dfrac{1}{\ln(1-p)} & \textit{(car, comme } 1-p<1 \textit{ alors } \ln(1-p) < 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & x < 1 - \dfrac{1}{\ln(1-p)} & \end{array}$$

  En notant $x_0 = 1 - \dfrac{1}{\ln(1-p)}$, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0	10	x_0	12	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$\nearrow$	$f(10)$ $\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$ $f(12)$	$\searrow$

- Il reste alors à estimer la valeur de x_0. Pour ce faire, on utilise l'inégalité :

$$\forall x > 0,\ \frac{x-1}{x} \ \leqslant\ \ln(x) \ \leqslant\ x - 1$$

  - L'inégalité de droite est une inégalité de convexité : la fonction ln étant concave, sa courbe représentative est située en dessous de sa tangente au point d'abscisse 1.
  - L'inégalité de gauche se réécrit : $\forall x > 0,\ x - 1 \leqslant x\ \ln(x)$.
    Il s'agit là encore d'une inégalité de convexité : la fonction $x \mapsto x\ \ln(x)$ étant convexe, sa courbe représentative est située au dessus de sa tangente au point d'abscisse 1.

  En prenant cette double inégalité en $x = 1 - p > 0$, on obtient :

$$\begin{array}{lccccll} & -\dfrac{p}{1-p} & \leqslant & \ln(1-p) & \leqslant & -p & \\ \text{donc} & -\dfrac{1-p}{p} & \geqslant & \dfrac{1}{\ln(1-p)} & \geqslant & -\dfrac{1}{p} & \textit{(car la fonction inverse est croissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \text{et} & \dfrac{1-p}{p} & \leqslant & -\dfrac{1}{\ln(1-p)} & \leqslant & \dfrac{1}{p} & \end{array}$$

$$\boxed{1 + \frac{1-p}{p} \ \leqslant\ 1 - \frac{1}{\ln(1-p)} \ \leqslant\ 1 + \frac{1}{p}}$$

- Pour $p = \dfrac{2}{21}$, on a :

$$1 + \frac{1-p}{p} = \cancel{1} + \frac{1}{p} - \cancel{1} = \frac{1}{\frac{2}{21}} = \frac{21}{2} \qquad \text{et} \qquad 1 + \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{\frac{2}{21}} = \frac{23}{2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } 10 < \frac{21}{2} \leqslant x_0 \leqslant \frac{23}{2} < 12.}$$

La fonction f est :

× strictement croissante sur $[0, 10]$. Ainsi : $\forall x \in [0, 10]$, $f(x) \leqslant f(10)$.

× strictement décroissante sur $[12, +\infty[$. Ainsi : $\forall x \in [12, +\infty[$, $f(x) \leqslant f(12)$.

$$\boxed{\text{L'entier } N \geqslant 2 \text{ qui maximise la valeur de } f(N) \text{ est donc 10, 11 ou 12.}}$$

- Remarquons enfin :

$$\begin{aligned} f(10) < f(11) \quad & \Leftrightarrow \quad 9\,p^2\,(1-p)^8 < 10\,p^2\,(1-p)^9 \\ & \Leftrightarrow \quad 9 < 10\,(1-p) \qquad \textit{(car } p^2 > 0 \textit{ et } (1-p)^8 > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{9}{10} < \frac{19}{21} \\ & \Leftrightarrow \quad 9 \times 21 < 10 \times 19 \\ & \Leftrightarrow \quad 189 < 190 \end{aligned}$$

Et, de même :

$$\begin{aligned} f(12) < f(11) \quad & \Leftrightarrow \quad 11\,p^2\,(1-p)^{10} < 10\,p^2\,(1-p)^9 \\ & \Leftrightarrow \quad 11\,(1-p) < 10 \qquad \textit{(car } p^2 > 0 \textit{ et } (1-p)^9 > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{19}{21} < \frac{10}{11} \\ & \Leftrightarrow \quad 19 \times 11 < 21 \times 10 \\ & \Leftrightarrow \quad 209 < 210 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc : } f(10) < f(11) \text{ et } f(11) > f(12).}$$

$$\boxed{\text{Lorsque } p = \frac{2}{21}, \text{ la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices } M(\omega) \text{ possibles est 11.}}$$

□

Problème (ESSEC I 2013)

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Introduction

On s'intéresse dans ce problème à la détermination de lois de probabilité composées qui interviennent en particulier dans la gestion du risque en assurance et en théorie de la ruine. On étudie le modèle suivant :

- le nombre de sinistres à prendre en charge par une compagnie d'assurances sur une période donnée est une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$;
- les coûts des sinistres successifs sont modélisés par une suite de variables aléatoires $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. On suppose que les variables U_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et identiquement distribuées, et sont indépendantes de N ;
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$ et X_0 est la variable certaine de valeur 0 ;
- la charge sinistrale totale pour la compagnie d'assurance sur une période est donnée par la variable aléatoire X définie par :
$$X = \sum_{k=1}^{N} U_k$$
et l'on précise que $X = X_0 = 0$ si N prend la valeur 0. **On dit que X suit une loi composée**.
- Pour tout entier naturel j, on pose $p_j = \mathbb{P}([N = j])$, $q_j = \mathbb{P}([U_1 = j])$ et $r_j = \mathbb{P}([X = j])$.

Partie I – Des exemples

Dans cette partie I, on suppose que les variables U_k suivent la loi de Bernoulli de paramètre p, où p est un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

1. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, quelle est la loi de X_n ?

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La v.a.r. X_n est une somme de n v.a.r. **indépendantes** de loi $\mathcal{B}(p)$, c'est-à-dire de loi $\mathcal{B}(1, p)$.

$$\boxed{\text{Par stabilité de la loi binomiale : } X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).}$$

Commentaire

On rappelle la propriété de stabilité de la loi binomiale :
Soit X_1, ..., X_k des v.a.r. **indépendantes** telles que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$, ..., $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_k, p)$.
Alors :
$$\sum_{i=1}^{k} X_i \ \hookrightarrow\ \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i, p\right)$$

□

2. Pour tout entier naturel j, établir : $r_j = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, p_n$.

Démonstration.
La famille $([N = n])_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales, pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
r_j = \mathbb{P}([X = j]) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [X = j]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([N = n] \cap \left[\sum_{k=1}^{N} U_k = j\right]\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([N = n] \cap \left[\sum_{k=1}^{n} U_k = j\right]\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [X_n = j]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n]) \times \mathbb{P}([X_n = j]) && \textit{(car les v.a.r. } N \textit{ et } X_n \textit{ sont indépendantes par lemme des coalitions)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \times \mathbb{P}([X_n = j])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N},\ r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, p_n}$$

Commentaire

- Détaillons l'utilisation du lemme des coalitions.
  - × D'après l'énoncé, toutes les v.a.r. de la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes de N.
    En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les v.a.r. $U_1, \ldots, U_n$ sont indépendantes de N.
  - × Donc, par le lemme des coalitions, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la v.a.r. $\sum\limits_{k=1}^{n} U_k$ est indépendante de N.
- D'après l'énoncé, la variable aléatoire N est « à valeurs dans $\mathbb{N}$ ». Cela signifie exactement : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ (et non $N(\Omega) = \mathbb{N}$).
- On ne peut donc pas considérer de plus petit système complet d'événements que la famille $([N = k])_{k\in\mathbb{N}}$. On rappelle que ceci est licite car on autorise un système complet d'événements à contenir l'ensemble vide.

□

3. Dans cette question *3.*, on suppose que N suit la loi binomiale de paramètres m, entier naturel, et π, réel dans $]0, 1[$. Soit j un entier naturel.

a) Justifier que $r_j = 0$ si $j > m$.

Démonstration.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Donc $U_k(\Omega) = \{0, 1\}$.
- De plus, $N \hookrightarrow \mathcal{B}(m, \pi)$. Donc $N(\Omega) = [\![0, m]\!]$.
- Or : $X = \sum\limits_{k=1}^{N} U_k$.
  On en déduit :
  × au minimum, la v.a.r. X prend la valeur 0,
  × au maximum, la v.a.r. X prend la valeur $m \times 1 = m$.
  Ainsi : $X(\Omega) \subset [\![0, m]\!]$.

- Donc, si $j > m$, alors : $[X = j] = \varnothing$. D'où :

$$r_j \ = \ \mathbb{P}([X = j]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{Pour tout } j > m : r_j = 0.}$$

☐

b) Établir que pour tout $j \in [\![0, m]\!]$: $r_j = \sum\limits_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}$.

Démonstration.
Soit $j \in [\![0, m]\!]$.
La famille $([N = n])_{n \in [\![0,m]\!]}$ forme un système complet d'événements.
En procédant de la même manière qu'en question *2.*, on obtient :

$$\begin{aligned} r_j &= \sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n]) \\ &= \sum_{\substack{n = 0 \\ j \in X_n(\Omega)}}^{m} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n]) \\ &\quad + \cancel{\sum_{\substack{n = 0 \\ j \notin X_n(\Omega)}}^{m} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n])} \qquad \textit{(car si } j \notin X_n(\Omega) \textit{ alors } [X_n = j] = \varnothing\textit{)} \\ &= \sum_{n=j}^{m} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n]) \end{aligned}$$

La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{ \begin{array}{l} n \in [\![0, m]\!] \\ j \in X_n(\Omega) = [\![0, n]\!] \\ j \in [\![0, m]\!] \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant n \leqslant m \\ 0 \leqslant j \leqslant n \\ j \in [\![0, m]\!] \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant n \leqslant m \\ j \leqslant n \\ j \in [\![0, m]\!] \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} j \leqslant n \leqslant m \\ \\ j \in [\![0, m]\!] \end{array} \right.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} r_j &= \sum_{n=j}^{m} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n]) \\ &= \sum_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n} \qquad \textit{(car } X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \textit{ et } N \hookrightarrow \mathcal{B}(m, \pi)\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall j \in [\![0, m]\!],\ r_j = \sum_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}}$$

Commentaire

- En question *2.*, on savait seulement : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Le meilleur système complet d'événements que nous pouvions considérer était donc $([N = n])_{n \in \mathbb{N}}$ (contenant potentiellement plusieurs fois l'ensemble vide).
- Ici, d'après la question précédente, nous pouvons considérer le système complet d'événements plus précis $([N = n])_{n \in [\![0,m]\!]}$.

☐

c) Vérifier que pour tous entiers j, n, m tels que $0 \leqslant j \leqslant n \leqslant m$: $\dbinom{n}{j} \dbinom{m}{n} = \dbinom{m}{j} \dbinom{m-j}{n-j}$.

Démonstration.
Soit $(j, n, m) \in \mathbb{N}^3$ tel que $0 \leqslant j \leqslant n \leqslant m$.

- D'une part :

$$\binom{n}{j} \binom{m}{n} = \frac{\cancel{n}!}{j!\,(n-j)!} \; \frac{m!}{\cancel{n}!\,(m-n)!} = \frac{m!}{j!\,(n-j)!\,(m-n)!}$$

- D'autre part :

$$\binom{m}{j} \binom{m-j}{n-j} = \frac{m!}{j!\,\cancel{(m-j)}!} \; \frac{\cancel{(m-j)}!}{(n-j)!\,\big((m-\cancel{j})-(n-\cancel{j})\big)!} = \frac{m!}{j!\,(n-j)!\,(m-n)!}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } (j,n,m) \in \mathbb{N}^3 \text{ tel que } 0 \leqslant j \leqslant n \leqslant m : \dbinom{n}{j} \dbinom{m}{n} = \dbinom{m}{j} \dbinom{m-j}{n-j}.}$$

Commentaire

La relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se faire par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à m éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient m individus)
On souhaite alors construire une partie P à n éléments de cet ensemble contenant j éléments distingués *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de n individus dans lequel figurent j représentants de ces individus)*.
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à n éléments de E : $\binom{m}{n}$ possibilités.
On distingue ensuite j éléments de cet ensemble P : $\binom{n}{j}$ possibilités.
(on choisit d'abord les n individus et on élit ensuite j représentants de ces individus)
Ainsi, il y a $\binom{n}{j} \binom{m}{n}$ manières de construire P.

2) On choisit d'abord, dans E, les j éléments à distinguer : $\binom{m}{j}$ possibilités.
On choisit ensuite $n-j$ éléments dans E, pour former P, en y ajoutant les j éléments précédents : $\binom{m-j}{n-j}$ possibilités.
(on choisit d'abord les j représentants puis on leur adjoint un groupe de $n-j$ individus)
Ainsi, il y a $\binom{m}{j} \binom{m-j}{n-j}$ manières de construire P.

On retrouve ainsi le résultat.

□

d) En déduire, pour tout $j \in [\![0, m]\!]$: $r_j = \binom{m}{j} (p\pi)^j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \big((1-p)\pi\big)^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell}$.

Démonstration.
Soit $j \in [\![0, m]\!]$.

$$\begin{array}{rcll}
r_j & = & \sum\limits_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n} & \textit{(d'après \textbf{3.b)})} \\
& = & \sum\limits_{n=j}^{m} \binom{n}{j} \binom{m}{n} p^j (1-p)^{n-j}\, \pi^n (1-\pi)^{m-n} & \\
& = & \sum\limits_{n=j}^{m} \binom{m}{j} \binom{m-j}{n-j} p^j (1-p)^{n-j}\, \pi^n (1-\pi)^{m-n} & \textit{(d'après \textbf{3.c)})} \\
& = & \binom{m}{j} p^j \sum\limits_{n=j}^{m} \binom{m-j}{n-j} (1-p)^{n-j}\, \pi^n (1-\pi)^{m-n} & \\
& = & \binom{m}{j} p^j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} (1-p)^\ell\, \pi^{\ell+j} (1-\pi)^{m-(\ell+j)} & \textit{(avec le décalage d'indice } \ell = n-j\textit{)} \\
& = & \binom{m}{j} p^j\, \pi^j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} (1-p)^\ell\, \pi^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell} &
\end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit, pour tout } j \in [\![0, m]\!] : \\ r_j = \binom{m}{j} (p\,\pi)^j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \big((1-p)\,\pi\big)^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell}.\end{array}}$$

□

e) Montrer finalement que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres en fonction de m, p et π.

Démonstration.

- D'après la question ***3.a)*** : $X(\Omega) \subset [\![0, m]\!]$.
- Soit $j \in [\![0, m]\!]$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcll}
r_j & = & \binom{m}{j} (p\,\pi)^j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \big((1-p)\,\pi\big)^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell} & \\
& = & \binom{m}{j} (p\,\pi)^j \big((1-p)\,\pi + (1-\pi)\big)^{m-j} & \textit{(par la formule du binôme de Newton)} \\
& = & \binom{m}{j} (p\,\pi)^j \big(\cancel{\pi} - p\,\pi + 1 - \cancel{\pi}\big)^{m-j} & \\
& = & \binom{m}{j} (p\,\pi)^j\ (1-p\,\pi)^{m-j} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p\,\pi).}$$

□

4. On suppose dans cette question *4.* que N suit la loi de Poisson de paramètre λ, réel strictement positif.

a) Montrer que pour tout entier naturel j, on a :

$$r_j = \mathrm{e}^{-j} \, \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \big(\lambda(1-p)\big)^{n-j}$$

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}$. D'après la question *2.* :

$$\begin{aligned} r_j &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, p_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n]) \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ j \in X_n(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n]) + \cancel{\sum_{\substack{n=0 \\ j \notin X_n(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n])} & \textit{(car } [X_n = j] = \varnothing \textit{)} \\ &= \sum_{n=j}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n]) \end{aligned}$$

Comme $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ d'après la question *1.*, alors $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
Donc la dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} n \in [\![0,+\infty[\![\\ j \in X_n(\Omega) = [\![0,n]\!] \\ j \in \mathbb{N} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n \\ j \in \mathbb{N} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant n \\ j \leqslant n \\ j \in \mathbb{N} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} j \leqslant n \\ \\ j \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} r_j &= \sum_{n=j}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n]) \\ &= \sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \, \frac{\lambda^n}{n!} \, \mathrm{e}^{-\lambda} & \textit{(car } X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \textit{ et } N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)\textit{)} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\, p^j \sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} \frac{1}{n!} (1-p)^{n-j} \lambda^n \end{aligned}$$

Or : $\displaystyle \binom{n}{j} \frac{1}{n!} = \frac{\cancel{n!}}{j!\,(n-j)!} \, \frac{1}{\cancel{n!}} = \frac{1}{j!\,(n-j)!}$.
On obtient :

$$\begin{aligned} r_j &= \mathrm{e}^{-\lambda}\, p^j \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{j!\,(n-j)!} (1-p)^{n-j} \lambda^n \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\, \frac{p^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} (1-p)^{n-j} \lambda^{(n-j)+j} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\, \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} (1-p)^{n-j} \lambda^{n-j} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } j \in \mathbb{N} : r_j = \mathrm{e}^{-\lambda}\, \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \big(\lambda\,(1-p)\big)^{n-j}.}$$

□

b) En déduire que X suit une loi de Poisson, et préciser son paramètre en fonction de p et λ.

Démonstration.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Donc : $U_k(\Omega) = \{0, 1\}$.
  De plus, comme $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$: $N(\Omega) = \mathbb{N}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par définition de } X : X(\Omega) \subset \mathbb{N}.}$$

- Soit $j \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
r_j &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \big(\lambda\,(1-p)\big)^{n-j} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} \big(\lambda\,(1-p)\big)^{\ell} && \textit{(avec le décalage d'indice } \ell = n-j\textit{)} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} e^{\lambda\,(1-p)} && \textit{(car on reconnaît la série exponentielle de paramètre } \lambda\,(1-p)\textit{)} \\
&= \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} e^{-\lambda+\lambda(1-p)} \\
&= \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} e^{-\lambda p}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } X(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda\, p)}$$

□

Partie II – La loi binomiale négative

On généralise la définition des coefficients binomiaux aux nombres réels en posant, pour tout y réel et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$: $\dbinom{y}{k} = \dfrac{1}{k!} \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} (y-i)$, et $\dbinom{y}{0} = 1$.

5. Écrire une fonction en **Scilab** d'entête `function c = CoeffBin(y, k)` qui calcule $\dbinom{y}{k}$.

Démonstration.

```
1 function c = CoeffBin(y, k)
2   c = 1
3   if k >= 1 then
4     for i = 0:(k-1)
5       c = c * (y - i) / (i + 1)
6     end
7   end
8 endfunction
```

Détaillons les différents éléments de ce code :

× en ligne 2, on initialise la variable `c` dont le but est de contenir en fin de programme
$$\begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \frac{1}{k!} \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} (y-i) & \text{si } k \geqslant 1 \end{cases}.$$
Cette variable `c` est donc initialisée à 1.

× Deux cas se présentent alors.

- si $k = 0$, alors la variable `c` contient déjà le bon résultat : 1.
  Aucune opération n'est donc nécessaire.
- si $k \geqslant 1$, alors on met à jour la variable `c` à l'aide d'une structure itérative (boucle `for`).
  Pour ce faire, on multiplie au $i^{\text{ème}}$ tour de boucle par la quantité $\frac{y-i}{i+1}$.
  Ainsi, `c` contient bien $\frac{1}{k!} \prod\limits_{i=0}^{k-1} (y-i)$ en sortie de boucle. En effet :

$$\binom{y}{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} \prod_{i=0}^{k} (y-i) = \frac{1}{k+1} \frac{1}{k!} \times (y-k) \prod_{i=0}^{k-1} (y-i) = \frac{y-k}{k+1} \binom{y}{k}$$

Commentaire

Notons que le choix d'initialiser `c` à 1 n'est pas annodin. La variable `c` étant un produit, on choisit le réel 1 car il s'agit de l'élément neutre pour le produit.
De même, pour initialiser une variable contenant une somme, on choisira plutôt l'élément neutre pour la somme, c'est-à-dire le réel 0.

□

6. *La formule du binôme négatif.*
Soit c un réel strictement positif, et x un réel de $[0, 1[$.

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} \, dt$.

On admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + c \binom{c+n}{n} I_n$$

a) Vérifier que pour tout $t \in [0, x]$: $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$.

En déduire l'encadrement : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$.

Démonstration.

- Soit $t \in [0, x]$.

$$\begin{array}{rcll} 0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x & \Leftrightarrow & 0 \leqslant x - t \leqslant x(1-t) & \textit{(car, comme } t \leqslant x < 1, \textit{ alors : } 1-t > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 0 \leqslant x - t \leqslant x - xt & \\ & \Leftrightarrow & -x \leqslant -t \leqslant -x\,t & \\ & \Leftrightarrow & x \geqslant t \geqslant x\,t & \end{array}$$

Or on sait déjà : $t \leqslant x$.
De plus, comme $x \in [0, 1[$, on a : $x\,t \leqslant t$.
Le dernier encadrement est donc vérifié.

$$\boxed{\text{Par équivalence : } \forall t \in [0, x],\ 0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [0, x]$.

$$0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x \quad \Leftrightarrow \quad 0^n \leqslant \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \leqslant x^n \qquad \textit{(car la fonction } t \mapsto t^n \textit{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[\textit{)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{(x-t)^n}{(1-t)^n} \leqslant x^n$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leqslant \frac{x^n}{(1-t)^{c+1}} \qquad \textit{(car } \frac{1}{(1-t)^{c+1}} > 0\textit{)}$$

Or : $t \leqslant x$. Donc : $1 - t \geqslant 1 - x$.
Par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^{c+1}$ sur $[0, +\infty[$: $(1-t)^{c+1} \geqslant (1-x)^{c+1}$. Ainsi :

$$0 \leqslant \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leqslant \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}$$

Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$) :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} \, dt \leqslant \int_0^x \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} \, dt$$

Donc :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} \int_0^x dt = \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} \Big[\, t \,\Big]_0^x = \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} \, x$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \, 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}.}$$

- Si $n = 0$. On a déjà montré : $(1-t)^{c+1} \geqslant (1-x)^{c+1}$. Donc, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$:

$$\frac{1}{(1-t)^{c+1}} \leqslant \frac{1}{(1-x)^{c+1}}$$

Comme $t < 1$, on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{(1-t)^{c+1}} \leqslant \frac{1}{(1-x)^{c+1}}$$

Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$) :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{1}{(1-t)^{c+1}} \, dt \leqslant \int_0^x \frac{1}{(1-x)^{c+1}} \, dt$$

Donc :

$$0 \leqslant I_0 \leqslant \frac{1}{(1-x)^{c+1}} \int_0^x dt = \frac{1}{(1-x)^{c+1}} \Big[\, t \,\Big]_0^x = \frac{1}{(1-x)^{c+1}} \, x$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } 0 \leqslant I_0 \leqslant \frac{x}{(1-x)^{c+1}}.}$$

Commentaire

On isole ici le cas $n = 0$, car l'argument « la fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ » est faux si $n = 0$. On traite donc ce cas à part. □

b) (i) Montrer, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\dbinom{c+n}{n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{c}{k}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Par définition du coefficient binomial :

$$\begin{aligned}
\binom{c+n}{n} &= \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} \big((c+n) - i\big) \\
&= \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} (c+k) && \textit{(avec le changement d'indice } k = n - i\textit{)} \\
&= \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (c+k)}{\prod\limits_{k=1}^{n} k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{c+k}{k} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{c}{k} + 1\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{c}{k}\right)}$$

□

(ii) Montrer que pour tout réel t positif, $\ln(1+t) \leqslant t$.

Démonstration.
La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $]-1, +\infty[$. Sa courbe représentative est donc située sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0, droite d'équation :

$$y = x$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in \,]-1, +\infty[, \ \ln(1+t) \leqslant t.}$$

Commentaire

L'énoncé demande seulement de montrer que cette inégalité est vraie pour tout $t \in [0, +\infty[$. Bien évidemment, celle-ci étant vraie sur $]-1, +\infty[$, elle l'est en particulier sur $[0, +\infty[$. □

(iii) Établir, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$: $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$.

Démonstration.

- Soit $k \geqslant 2$.

$$\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k} \leqslant \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k} \leqslant -\ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{k} \geqslant \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{k} \geqslant \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

Or, comme $k \geqslant 2$: $-\dfrac{1}{k} \in \,]-1, +\infty[$. On peut donc appliquer la question précédente et ainsi la dernière inégalité est vraie.

$$\boxed{\text{Par équivalence : } \forall k \geqslant 2,\ \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1).}$$

Commentaire

- La démonstration présentée nécessite d'avoir démontré l'inégalité de la question précédente pour tout $t \in \,]-1, +\infty[$.
- On pouvait également utiliser l'inégalité des accroissements finis.
On note $g : t \mapsto \ln(t)$. On sait :
  × g est dérivable sur $[k-1, k]$,
  × $\forall t \in [k-1, k]$, $\dfrac{1}{k} \leqslant g'(t)$.

  On en déduit, par inégalités des accroissements finis :
$$\forall (x, y) \in [k-1, k]^2,\ \frac{1}{k}(y - x) \leqslant g(y) - g(x)$$
  En appliquant cette inégalité à $y = k$ et $x = k - 1$, on obtient :
$$\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$$
- On pouvait également procéder par intégration.
Tout d'abord : $\forall t \in [k-1, k]$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{t}$.
Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant $(k - 1 \leqslant k)$:
$$\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\, dt = \Big[\ \ln(t)\ \Big]_{k-1}^{k} = \ln(k) - \ln(k-1)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On somme l'inégalité précédente pour k variant de 2 à n. On obtient :
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \big(\ln(k) - \ln(k-1)\big) = \ln(n) - \cancel{\ln(1)}$$

On ajoute 1 de chaque côté de l'inégalité :

$$\begin{array}{ccc} 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} & \leqslant & 1 + \ln(n) \\ \shortparallel & & \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} & & \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)}$$

□

(iv) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\ln\left(\dbinom{c+n}{n}\right) \leqslant c\,(1 + \ln(n))$.

En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \ln\left(\dbinom{c+n}{n}\right) & = & \ln\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{c}{k}\right)\right) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.b)(i)}}\textit{)} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{c}{k}\right) & \\ & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{c}{k} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.b)(ii)}}\textit{)} \\ & \leqslant & c \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} & \\ & \leqslant & c\big(1 + \ln(n)\big) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.b)(iii)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\binom{c+n}{n}\right) \leqslant c\big(1 + \ln(n)\big)}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on déduit de l'inégalité précédente :

$$\binom{c+n}{n} \leqslant \exp\big(c(1 + \ln(n))\big)$$

$$\boxed{\text{De plus } x^{n+1} \geqslant 0, \text{ donc : } 0 \ \leqslant\ \binom{c+n}{n} x^{n+1} \ \leqslant\ \exp(c + c\ \ln(n))\, x^{n+1}.}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl} \exp(c + c\ \ln(n))\, x^{n+1} & = & \exp(c + c\ \ln(n))\ \exp((n+1)\ln(x)) \\ & = & \exp\big(c + c\ \ln(n) + (n+1)\ln(x)\big) \\ & = & \exp\big(c + \ln(x) + c\ \ln(n) + n\ \ln(x)\big) \\ & = & \exp\left(n\ \ln(x) \left(\dfrac{c + \ln(x)}{n\ \ln(x)} + \dfrac{c\ \ln(n)}{n\ \ln(x)} + 1\right)\right) \end{array}$$

  De plus : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{c + \ln(x)}{n\ \ln(x)} = 0$ et, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{c}{\ln(x)}\ \frac{\ln(n)}{n} = 0$.

  Ainsi : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{c + \ln(x)}{n\ \ln(x)} + \frac{c\ \ln(n)}{n\ \ln(x)} + 1 = 1$.

Comme $x \in [0, 1[$, alors $\ln(x) < 0$. D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} n \, \ln(x) = -\infty$.

On a donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} n \, \ln(x) \left(\dfrac{c + \ln(x)}{n \, \ln(x)} + \dfrac{c \, \ln(n)}{n \, \ln(x)} + 1 \right) = -\infty$.

Par composition par la fonction exp, on en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \exp \left(n \, \ln(x) \left(\frac{c + \ln(x)}{n \, \ln(x)} + \frac{c \, \ln(n)}{n \, \ln(x)} + 1 \right) \right) \;=\; 0$$

- Finalement :

  × $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$

  × $\lim\limits_{n \to +\infty} \exp(c + c \, \ln(n)) \, x^{n+1} = 0$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n \to +\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0.}$$

□

c) En conclure que la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \dbinom{c+k-1}{k} x^k$ est convergente, et établir la formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$$

Démonstration.

- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k \;=\; \frac{1}{(1-x)^c} - c \binom{c+n}{n} I_n$$

  Pour démontrer que la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \dbinom{c+k-1}{k} x^k$ est convergente et que sa somme vaut $\dfrac{1}{(1-x)^c}$, on va donc démontrer :

$$\lim_{n \to +\infty} c \binom{c+n}{n} I_n = 0$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***6.a)*** :

$$0 \;\leqslant\; I_n \;\leqslant\; \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$$

  On en déduit :

$$0 \;\leqslant\; c \binom{c+n}{n} I_n \;\leqslant\; \frac{c}{(1-x)^{c+1}} \binom{c+n}{n} x^{n+1}$$

  Or, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dbinom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$.

  Ainsi :

  × $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$

  × $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{c}{(1-x)^{c+1}} \dbinom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n \to +\infty} c \binom{c+n}{n} I_n = 0.}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la série } \sum_{k \geqslant 0} \binom{c+k-1}{k} x^k \text{ converge et : } \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k \;=\; \frac{1}{(1-x)^c}.}$$

□

7. Soit p un réel de $]0,1[$ et r un réel strictement positif. Montrer que la suite de nombres $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $p_k = \binom{r+k-1}{k}(1-p)^k\, p^r$ définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On l'appelle *loi binomiale négative* de paramètres r et p.

Démonstration.

- Comme $p \in\ ]0,1[$, alors :
$$p_k = \binom{r+k-1}{k}(1-p)^k p^r \ \geqslant\ 0$$
- Montrons que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} p_k$ converge et que sa somme vaut 1.
Soit $n\in\mathbb{N}$.
$$\sum_{k=0}^{n} p_k \ =\ \sum_{k=0}^{n}\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k\, p^r \ =\ p^r \sum_{k=0}^{n}\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k$$
On applique la question précédente à $c=r$ et $x=1-p$ (on a bien $c>0$ et $x\in[0,1[$. On obtient que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k$ converge et :
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k \ =\ \frac{1}{(\cancel{1}-(\cancel{1}-p))^r} \ =\ \frac{1}{p^r}$$
On en déduit que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} p_k$ converge et :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k \ =\ \cancel{p^r}\,\frac{1}{\cancel{p^r}} \ =\ 1$$

$\boxed{\text{On en conclut que la suite } (p_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ définit une loi de probabilité.}}$

□

8. Si Y est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres 1 et p, reconnaître la loi de $Y+1$.

Démonstration.
On note $V=Y+1$.

- Tout d'abord, comme $Y(\Omega)=\mathbb{N}$, on a : $V(\Omega)=\mathbb{N}^*$.
- Soit $k\in\mathbb{N}^*$.
$$[V=k] \ =\ [Y+1=k] \ =\ [Y=k-1]$$
On en déduit :
$$\begin{array}{rcll}\mathbb{P}([V=k]) & = & \mathbb{P}([Y=k-1]) \ =\ p_{k-1} & \\ & = & \dbinom{1+(k-1)-1}{k-1}(1-p)^{k-1}\,p^1 & \textit{(car } Y \textit{ suit la loi binomiale négative de paramètres } 1 \textit{ et } p\textit{)} \\ & = & (1-p)^{k-1}\,p & \end{array}$$

$\boxed{\text{On reconnaît la loi géométrique de paramètre } p : V \hookrightarrow \mathcal{G}(p).}$

□

9. *Espérance et variance.*
Soit Z une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres r réel strictement positif et $p \in \,]0,1[$.

a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$: $k \binom{r+k-1}{k} = r \binom{r+k-1}{k-1}$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$.

- D'une part :

$$k \binom{r+k-1}{k} \;=\; k \, \frac{(r+k-1)!}{k!\,(r+k-1-k)!} \;=\; \cancel{k} \, \frac{(r+k-1)!}{\cancel{k}\,(k-1)!\,(r-1)!} \;=\; \frac{(r+k-1)!}{(k-1)!\,(r-1)!}$$

- D'autre part :

$$r \binom{r+k-1}{k-1} \;=\; r \, \frac{(r+k-1)!}{(k-1)!\,(r+k-1-(k-1))!} \;=\; \cancel{r} \, \frac{(r+k-1)!}{(k-1)!\,\cancel{r}\,(r-1)!} \;=\; \frac{(r+k-1)!}{(k-1)!\,(r-1)!}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \geqslant 1,\ k \binom{r+k-1}{k} = r \binom{r+k-1}{k-1}.}$$

Commentaire

La relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se faire par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à $r+k-1$ éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient $r+k-1$ individus)
On souhaite alors construire une partie P à k éléments de cet ensemble contenant 1 élément distingué *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de k individus dans lequel figure 1 représentant de ces individus)*.
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à k éléments de E : $\binom{r+k-1}{k}$ possibilités.
On distingue ensuite 1 élément de cet ensemble P : $\binom{k}{1} = k$ possibilités.
(on choisit d'abord les k individus et on élit ensuite 1 représentant de ces individus)
Ainsi, il y a $k \binom{r+k-1}{k}$ manières de construire P.

2) On choisit d'abord, dans E, une partie à $(k-1)$ éléments : $\binom{r+k-1}{k-1}$ possibilités.
On forme alors P en ajoutant à ces $k-1$ éléments, l'élément à distinguer. Cet élément est choisi parmi les $r+k-1-(k-1) = r$ éléments restants dans E : $\binom{r}{1} = r$ possibilités.
(on choisit d'abord $k-1$ individus puis on leur adjoint 1 individu parmi les r restants dans E)
Ainsi, il y a $\binom{r+k-1}{k-1}\, r$ manières de construire P.

On retrouve ainsi le résultat.

□

b) Montrer que Z admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p}$.

Démonstration.

- La v.a.r. Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n\, \mathbb{P}([Z = n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rll}
& \sum\limits_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}([Z = k]) & \\
= & \sum\limits_{k=0}^{n} k \dbinom{r+k-1}{k} (1-p)^k\, p^r & \\
= & p^r \sum\limits_{k=1}^{n} k \dbinom{r+k-1}{k} (1-p)^k & \\
= & p^r \sum\limits_{k=1}^{n} r \dbinom{r+k-1}{k-1} (1-p)^k & \textit{(d'après la question précédente)} \\
= & r\, p^r \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dbinom{r+k}{k} (1-p)^{k+1} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
= & r\, \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dbinom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k\, p^{r+1} & \\
= & r\, \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([W = k]) & \textit{(où } W \textit{ suit la loi binomiale négative de paramètres } r+1 \textit{ et } p\textit{)}
\end{array}$$

Or la famille $([W = k])_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. Donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathbb{P}([W = n])$ converge et sa somme vaut 1.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Z \text{ admet une espérance.}}$$

De plus :

$$\mathbb{E}(Z) \;=\; r\, \frac{1-p}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([W = k]) \;=\; r\, \frac{1-p}{p}\, 1$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) \;=\; r\, \frac{1-p}{p}}$$

□

c) Montrer que Z admet une variance et que l'on a : $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$.
On pourra commencer par calculer l'espérance de $Z(Z-1)$.

Démonstration.

- La v.a.r. $Z(Z-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n(n-1)\, \mathbb{P}([Z = n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{cll}
 & \sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)\,\mathbb{P}([Z=k]) & \\
= & \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)\,\mathbb{P}([Z=k]) & \\
= & \sum\limits_{k=2}^{n} (k-1)k \dbinom{r+k-1}{k}(1-p)^k\,p^r & \\
= & p^r \sum\limits_{k=2}^{n} (k-1)\,r \dbinom{r+k-1}{k-1}(1-p)^k & \textit{(d'après la question } \textbf{9.a)}\textit{)} \\
= & r\,p^r \sum\limits_{k=1}^{n-1} k \dbinom{r+k}{k}(1-p)^{k+1} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
= & r\, \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=1}^{n-1} k \dbinom{(r+1)+k-1}{k}(1-p)^k p^{r+1} & \\
= & r\, \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} k \dbinom{(r+1)+k-1}{k}(1-p)^k p^{r+1} & \\
= & r\, \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\,\mathbb{P}([W=k]) & \textit{(où } W \textit{ suit la loi binomiale négative de paramètres } r+1 \textit{ et } p\textit{)}
\end{array}$$

Or, d'après la question précédente, la v.a.r. W admet une espérance et $\mathbb{E}(W) = (r+1)\,\dfrac{1-p}{p}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } Z(Z-1) \text{ admet une espérance.}}$$

De plus :

$$\mathbb{E}\big(Z(Z-1)\big) \ = \ r\,\frac{1-p}{p}\,\mathbb{E}(W) \ = \ r\,\frac{1-p}{p}\,(r+1)\,\frac{1-p}{p}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big(Z(Z-1)\big) \ = \ (r+1)r\,\left(\frac{1-p}{p}\right)^2}$$

- D'autre part :

$$Z^2 \ = \ Z(Z-1)+Z$$

Ainsi, Z^2 admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance.

$$\boxed{\text{On en conclut que la v.a.r. } Z \text{ admet une variance.}}$$

- De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Z^2) \ = \ \mathbb{E}\big(Z(Z-1)\big)+\mathbb{E}(Z) \ = \ (r+1)r\,\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + r\,\frac{1-p}{p}$$

Enfin, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{V}(Z) & = & \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2 \\
& = & (r+1)r \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^2 + r\,\dfrac{1-p}{p} - r^2 \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^2 \\
& = & r \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^2 (\cancel{r} + 1 - \cancel{r}) + r\,\dfrac{1-p}{p} \\
& = & r \left(\dfrac{1-p}{p}\right) \left(\dfrac{1-p}{p} + 1\right) \ = \ r \left(\dfrac{1-p}{p}\right) \left(\dfrac{1-\cancel{p}+\cancel{p}}{p}\right) \\
& = & r\,\dfrac{1-p}{p^2}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Z) \ = \ r\,\dfrac{1-p}{p^2}}$$

□

Partie III – Les lois de Panjer

On reprend les notations du début du problème : la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ a sa loi donnée par $p_k = \mathbb{P}([N=k])$ pour $k \in \mathbb{N}$.
On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de N vérifie la relation de Panjer : il existe deux réels a et b, avec $a < 1$ et $a + b > 0$, tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

On dira alors que N suit la loi $\mathcal{P}(a,b)$.

10. *Détermination des lois de Panjer.*

a) Montrer que pour tout entier k strictement positif, on a : $p_k = p_0 \prod\limits_{i=1}^{k} \left(a + \dfrac{b}{i}\right)$.

Démonstration. Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k) : p_k = p_0 \prod\limits_{i=1}^{k} \left(a + \dfrac{b}{i}\right)$.

▸ **Initialisation** :

$$p_0 \prod_{i=1}^{1} \left(a + \frac{b}{i}\right) \ = \ p_0 \left(a + \frac{b}{1}\right) \ = \ \left(a + \frac{b}{1}\right) p_{1-1} \ = \ p_1$$

D'où $\mathcal{P}(1)$.

▸ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $p_{k+1} = p_0 \prod\limits_{i=1}^{k+1} \left(a + \dfrac{b}{i}\right)$).

$$\begin{array}{rcll}
p_{k+1} & = & \left(a + \dfrac{b}{k+1}\right) p_k & \textit{(d'après l'énoncé)} \\
& = & \left(a + \dfrac{b}{k}\right) \times p_0 \prod\limits_{i=1}^{k} \left(a + \dfrac{b}{i}\right) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
& = & p_0 \prod\limits_{i=1}^{k+1} \left(a + \dfrac{b}{i}\right) &
\end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right).}$$

□

b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$.
Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre b.

Démonstration.

- On a déjà : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  Si $a = 0$, alors, d'après la question précédente :
  $$p_k \ = \ p_0 \prod_{i=1}^{k} \frac{b}{i} \ = \ p_0 \ \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} b}{\prod\limits_{i=1}^{k} i} \ = \ p_0 \ \frac{b^k}{k!}$$
- On sait de plus que la famille $([N = k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, donc :
  $$1 \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) \ = \ \mathbb{P}([N = 0]) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) \ = \ p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} p_k$$
  Or, en reconnaissant une série exponentielle de paramètre b :
  $$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k \ = \ \sum_{k=1}^{+\infty} p_0 \frac{b^k}{k!} \ = \ p_0 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{k!}$$
  $$= \ p_0 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} - 1 \right) \ = \ p_0 \left(\mathrm{e}^b - 1 \right)$$
  On en déduit :
  $$1 = p_0 + p_0(\mathrm{e}^b - 1)$$
  $$\text{donc} \qquad 1 = \mathrm{e}^b \, p_0$$
  $$\text{d'où} \qquad \mathrm{e}^{-b} = p_0$$
  Finalement :
  $$\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}([N = k]) = \mathrm{e}^{-b} \ \frac{b^k}{k!}$$

  On reconnaît une loi de Poisson de paramètre b : $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$.

Commentaire

D'après l'énoncé, la variable aléatoire N est « à valeurs dans $\mathbb{N}$ ». Cela signifie exactement : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ (et non $N(\Omega) = \mathbb{N}$).

□

c) Dans cette question, on suppose que $a < 0$.

(i) Montrer qu'il existe un unique entier naturel r, tel que : $\forall k > r$, $p_k = 0$ et $\forall k \leqslant r$, $p_k \neq 0$.
On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les p_k tous strictement positifs.

Démonstration.
Raisonnons par l'absurde. Supposons : $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k > 0$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait :
  $$p_{k+1} \ = \ \left(a + \frac{b}{k+1} \right) p_k$$
  On va donc chercher à démontrer qu'il existe un entier k_0 tel que :
  $$a + \frac{b}{k_0 + 1} < 0$$

En effet, si c'est le cas, on aura :

× d'une part $p_{k_0+1} > 0$ par hypothèse,

× d'autre part, comme $p_{k_0} > 0$ et $a + \dfrac{b}{k_0+1} < 0$: $p_{k_0+1} = \left(a + \dfrac{b}{k_0+1}\right) p_{k_0} < 0$.

Ce qui est absurde.

- On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} a + \frac{b}{k+1} < 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{b}{k+1} < -a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k+1} < -\frac{a}{b} \\ & \Leftrightarrow \quad k+1 > -\frac{b}{a} \qquad \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{, avec } -\frac{b}{a} > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \quad k > -\frac{b}{a} - 1 \end{aligned}$$

On choisit alors : $k_0 = \left\lceil -\dfrac{b}{a} - 1 \right\rceil$ pour obtenir la contradiction voulue.

$$\boxed{\text{On en déduit qu'il existe } i_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } p_{i_0} = 0.}$$

- On note alors : $s = \min(i \in \mathbb{N} \mid p_i = 0)$.
L'entier s existe car l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid p_i = 0\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ non vide (l'entier k_0 appartient à cet ensemble).
Soit $k \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent.

× si $k < s$ (*i.e.* $k \leqslant s-1$), alors, par définition de s : $p_k > 0$.

× si $k \geqslant s$, alors : $p_k = 0$.
En effet, on sait, par définition de s : $p_s = 0$.
De plus, d'après la question ***10.a)*** :

$$p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) = p_0 \prod_{i=1}^{s} \left(a + \frac{b}{i}\right) \prod_{i=s+1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) = p_s \prod_{i=s+1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) = 0$$

$$\boxed{\text{En choisissant } r = s-1, \text{ on a bien : } \forall k \leqslant r,\ p_k > 0 \text{ et } \forall k > r,\ p_k = 0.}$$

□

(ii) Montrer : $b = -a(r+1)$.

Démonstration.
Par définition de r :

× $p_r > 0$,

× $p_{r+1} = 0$.

Or : $p_{r+1} = \left(a + \dfrac{b}{r+1}\right) p_r$. On en déduit :

$$\begin{aligned} & a + \frac{b}{r+1} = 0 \\ \text{donc} \quad & \frac{b}{r+1} = -a \\ \text{d'où} \quad & b = -a(r+1) \end{aligned}$$

$$\boxed{b = -a(r+1)}$$

□

(iii) Établir que pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0$.

En déduire que $p_0 = \dfrac{1}{(1-a)^r}$.

Démonstration.

- Soit $k \in [\![1, r]\!]$. D'après les questions ***10.a)*** et ***10.c)(ii)*** :

$$\begin{aligned} p_k &= p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a - \frac{a(r+1)}{i} \right) = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(-a \left(-1 + \frac{r+1}{i} \right) \right) \\ &= p_0\ (-a)^k \prod_{i=1}^{k} \frac{r+1-i}{i} = p_0\ (-a)^k \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} (r+1-i)}{\prod\limits_{i=1}^{k} i} \\ &= p_0\ (-a)^k\ \frac{r\ (r-1) \cdots (r+1-k)}{k!} \\ &= p_0\ (-a)^k\ \frac{\frac{r!}{(r-k)!}}{k!} = p_0\ (-a)^k\ \frac{r!}{k!\,(r-k)!} \\ &= p_0\ (-a)^k \binom{r}{k} \end{aligned}$$

- De plus : $(-a)^0 \binom{r}{0} p_0 = p_0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in [\![0, r]\!],\ p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0.}$$

- La famille $([N = k])_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. Donc :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) = \mathbb{P}([N=0]) + \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}([N=k]) + \sum_{k=r+1}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) \\ &= p_0 + \sum_{k=1}^{r} (-a)^k \binom{r}{k} p_0 + 0 \qquad \textit{(d'après ce qui précède)} \\ &= p_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} (-a)^k \right) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} (-a)^k &= \binom{r}{0} (-a)^0 + \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} (-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-a)^k = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-a)^k 1^{r-k} \\ &= (-a+1)^r \qquad \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } p_0 = \frac{1}{(1-a)^r}.}$$

Commentaire

- Dans cette partie, on a seulement l'inclusion : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$. On ne peut donc pas considérer de plus petit système complet d'événements que la famille $([N = k])_{k\in\mathbb{N}}$.
- On rappelle que ceci est licite car on autorise un système complet d'événements à contenir l'ensemble vide.

(iv) En conclure que N suit une loi binomiale et préciser les paramètres en fonction de a et b.

Démonstration.

- Tout d'abord : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent :

  × si $k \in [\![0, r]\!]$, alors, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([N = k]) &= p_k = (-a)^k \binom{r}{k} \frac{1}{(1-a)^r} \\ &= \binom{r}{k} (-a)^k \left(\frac{1}{1-a}\right)^r \\ &= \binom{r}{k} \left(-\frac{a}{1-a}\right)^k \left(\frac{1}{1-a}\right)^{r-k}\end{aligned}$$

  De plus, on a bien : $1 - \dfrac{1}{1-a} = \dfrac{1-a-1}{1-a} = -\dfrac{a}{1-a}$.

  × si $k \geqslant r+1$, alors, par définition de r :

$$\mathbb{P}([N = k]) = p_k = 0$$

  On reconnaît alors la loi binomiale de paramètres r et $-\dfrac{a}{1-a}$.

- On cherche enfin à exprimer r en fonction de a et b.
  D'après la question ***10.c)(ii)*** :

$$b = -a(r+1) \Leftrightarrow -\frac{b}{a} = r+1 \Leftrightarrow -\frac{b}{a} - 1 = r$$

$$\boxed{\text{Finalement : } N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(-\frac{b}{a} - 1, -\frac{a}{1-a}\right).}$$

Commentaire

Cette question amène une remarque sur la notation $X(\Omega)$ lorsque X est une v.a.r.

- Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
  Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
  Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{array}$$

- Il faut bien noter que, dans la définition de $X(\Omega)$, aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît. Même si cela ne correspond pas directement à la définition, il est d'usage courant de confondre, dans le cas des v.a.r. discrètes, l'ensemble de valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$) et l'ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle (dans le cas où X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\text{Supp}(X)$).
- Ainsi, s'il est fréquent de considérer qu'une v.a.r. X suit une loi binomiale de paramètres n et p si et seulement si :
  × $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$,
  × $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}([X = k]) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

  on trouvera aussi :
  × $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$,
  × $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}([X = k]) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
  × $\forall k \in [\![n+1, +\infty[\![$, $\mathbb{P}([X = k]) = 0$.

  La première définition est axée sur l'ensemble image et la seconde sur le support de X. □

d) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

(i) Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $p_k = \dbinom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k\, p_0$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.
Par définition des coefficients binomiaux donnée en partie II :

$$\begin{array}{rcll} \dbinom{\frac{b}{a} + k}{k} & = & \dfrac{1}{k!} \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} \left(\dfrac{b}{a} + k - i\right) & \\ & = & \dfrac{1}{k!} \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \left(\dfrac{b}{a} + j\right) & \textit{(avec le changement d'indice } j = k - i\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{j=1}^{k} j} \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \left(\dfrac{b}{a} + j\right) & \\ & = & \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \dfrac{\frac{b}{a} + j}{j} \ = \ \prod_{j=1}^{k} \left(\dfrac{b}{a\, j} + 1\right) & \end{array}$$

On en déduit :

$$\binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k \ = \ \left(\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{b}{a\,j}+1\right)\right)\left(\prod_{j=1}^{k} a\right) \ = \ \prod_{j=1}^{k}\left(\left(\frac{b}{a\,j}+1\right)a\right) \ = \ \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{b}{j}+a\right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in \mathbb{N},\ p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k}\left(a+\frac{b}{i}\right) = p_0 \binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k.}$$

□

(ii) En déduire que N suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de a et b.

Démonstration.

- Commençons par déterminer p_0.
  La famille $([N=k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. Donc :

$$\begin{aligned} 1 \ &= \ \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) \ = \ \mathbb{P}([N=0]) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) \\ &= \ p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} p_0 \binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k \ = \ p_0\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^k\right) \end{aligned}$$

  Or :

$$\begin{aligned} 1+\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^k \ &= \ \binom{\frac{b}{a}+0}{0}a^0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^k \\ &= \ \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^k \\ &= \ \frac{1}{(1-a)^{\frac{b}{a}+1}} && \textit{d'après } \textbf{\textit{6.c)}} \textit{ appliquée à } c=\frac{b}{a}+1 \textit{ et } x=a) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } p_0 = (1-a)^{\frac{b}{a}+1}.}$$

- Ensuite : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$p_k \ = \ \binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k (1-a)^{\frac{b}{a}+1} \ = \ \binom{(\frac{b}{a}+1)+k-1}{k} a^k (1-a)^{\frac{b}{a}+1}$$

$$\boxed{\text{On obtient que } N \text{ suit la loi binomiale négative de paramètres } \frac{b}{a}+1 \text{ et } 1-a.}$$

□

11. Montrer que, dans tous les cas, N admet une espérance et une variance, et qu'elles sont données par : $\mathbb{E}(N) = \dfrac{a+b}{1-a}$ et $\mathbb{V}(N) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$.

Démonstration.
Trois cas se présentent.

- si $a=0$: $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La v.a.r. } N \text{ admet donc une espérance et une variance et :}\\ \mathbb{E}(N) = b = \dfrac{0+b}{1-0} \text{ et } \mathbb{V}(N) = b = \dfrac{0+b}{(1-0)^2}.\end{array}}$$

- si $a < 0$: $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(-\dfrac{b}{a} - 1, -\dfrac{a}{1-a}\right)$.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } N \text{ admet donc une espérance et une variance.}}$$

De plus :

$$\mathbb{E}(N) = \left(-\frac{b}{a} - 1\right)\left(-\frac{a}{1-a}\right) = \frac{b+a}{\cancel{a}}\,\frac{\cancel{a}}{1-a} = \frac{b+a}{1-a}$$

Enfin :

$$\mathbb{V}(N) = \left(-\frac{b}{a} - 1\right)\left(-\frac{a}{1-a}\right)\left(1 + \frac{a}{1-a}\right) = \frac{b+a}{1-a}\,\frac{1}{1-a} = \frac{b+a}{(1-a)^2}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(N) = \frac{a+b}{1-a} \text{ et } \mathbb{V}(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}}$$

- si $a > 0$: N suit une loi binomiale négative de paramètres $\dfrac{b}{a} + 1$ et $1 - a$.

$$\boxed{\text{D'après les questions } \textbf{\textit{9.b)}} \text{ et } \textbf{\textit{9.c)}}, \text{ la v.a.r. } N \text{ admet une espérance et une variance.}}$$

De plus :

$$\mathbb{E}(N) = \frac{\left(\frac{b}{a} + 1\right) a}{1-a} = \frac{b+a}{1-a}$$

Enfin :

$$\mathbb{V}(N) = \frac{\left(\frac{b}{a} + 1\right) a}{(1-a)^2} = \frac{b+a}{(1-a)^2}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(N) = \frac{a+b}{1-a} \text{ et } \mathbb{V}(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}}$$

□