DS3 (version A)

Exercice 1

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle $AM = MB$, d'inconnue M, dans l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On rappelle que si U_1, U_2, U_3, U_4 sont les matrices définies par :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) est une base de E, qui est donc de dimension 4. Si A et B sont deux matrices de E, l'ensemble des matrices M de E vérifiant $AM = MB$ est noté $V_{A,B}$.

1. Soient A et B deux matrices de E. Dans toute la suite, on considère l'application $\varphi_{A,B}$ définie comme suit :

$$\varphi_{A,B} \ : \ \begin{array}{ccc} M & \mapsto & AM - MB \\ E & \to & E \end{array}$$

a) Montrer que $\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de E et en déduire que $V_{A,B}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Dans le cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, construire la matrice carrée d'ordre 4 qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base (U_1, U_2, U_3, U_4).
Montrer que cette matrice est inversible et en déduire l'ensemble $V_{A,B}$.

2. Dans cette question, r et s désignent deux réels distincts et différents de 1, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de E. Démontrer :

$$M \in V_{D,\Delta} \quad \Leftrightarrow \quad y = z = t = 0$$

b) En déduire une base de $V_{D,\Delta}$.

3. Soit a, b, c, d des réels non nuls vérifiant $a - b \neq c - d$, $a - b \neq 1$, $c - d \neq 1$, A et B les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ d & 1-d \end{pmatrix}$$

On admet qu'il existe :

× une matrice inversible P de E telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$.

× une matrice inversible Q de E telle que $B = Q\Delta Q^{-1}$ où $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c-d \end{pmatrix}$.

Pour toute matrice M de E, démontrer :

$$M \in V_{A,B} \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta}$$

En déduire une base de $V_{A,B}$.

4. Dans cette question r, s et u, v désignent quatre réels vérifiant $r \neq s$, $r \neq v$, $u \neq s$, $u \neq v$, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

Par une méthode analogue à celle de la question 2, déterminer $V_{D,\Delta}$.

Exercice 2

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.
Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variables X_n prend ses valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 6, 3, alors $X_5 = 4$.
Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage.

Partie I : Étude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$.
L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. ***a)*** Exprimer l'évenement $[X_3 = 4]$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3. En déduire $\mathbb{P}([X_3 = 4])$.

b) Montrer que $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \dfrac{2}{3}$, et en déduire $\mathbb{P}([X_3 = 3])$.

2. Calculer l'espérance de X_3.

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.

4. Calculer $\mathbb{P}([X_n = n+1])$.

5. Montrer, pour tout i de $[\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}_{[N_1=i]}([X_n = 2]) = \dfrac{n-i+1}{n}$.

6. En déduire une expression simple de $\mathbb{P}([X_n = 2])$.

7. Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $[X_n > k] = [N_1 > N_2 > \ldots > N_k]$.

En déduire que $\mathbb{P}([X_n > k]) = \dfrac{1}{n^k} \dbinom{n}{k}$.

Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.

8. Exprimer, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!], \mathbb{P}([X_n = k])$ à l'aide de $\mathbb{P}([X_n > k-1])$ et de $\mathbb{P}([X_n > k])$.

9. En déduire : $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n > k])$. Calculer ensuite $\mathbb{E}(X_n)$.

10. Montrer : $\forall k \in [\![2, n+1]\!],\ \mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{k-1}{n^k} \dbinom{n+1}{k}$.

Partie III : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 2}$.

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{k-1}{k!}$.

12. Montrer que la série $\sum\limits_{k \geqslant 2} \dfrac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $[\![2, +\infty[\![$ telle que :

$$\forall k \in [\![2, +\infty[\![,\ \mathbb{P}([Z = k]) = \frac{k-1}{k!}$$

13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $\mathbb{E}(Z)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 3

Partie 1

Dans cette partie, la lettre r désigne un entier naturel et x est un réel fixé de $]0,1[$.

1. Montrer que lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a : $\displaystyle\binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$.

2. ***a)*** Donner la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{r+2}\, x^n$.

b) En déduire que la série $\sum \binom{n}{r} x^n$ est convergente.

3. ***a)*** Pour tout entier naturel r, on pose : $S_r = \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n$. Donner la valeur de S_0.

b) Établir, en utilisant la formule du triangle de Pascal : $(1-x)\, S_{r+1} = x\, S_r$.

c) En déduire : $\forall x \in]0,1[\ ,\ \forall r \in \mathbb{N}\ ,\ \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

d) Donner enfin la valeur de $\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

Partie 2

On désigne par α et p deux réels de $]0,1[$.
Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches.
Avant chaque manche y compris la première, le joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche en question, (on dit qu'il est disqualifié, et c'est définitif), et une probabilité $1-\alpha$ d'y être autorisé, et ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. A chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et perd un euro avec la probabilité $1-p$.
Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié, et on suppose que les manches sont jouées de façon indépendantes. On note :

× X le nombre de manches jouées par le joueur avant d'être disqualifié.

× Y le nombre de manches gagnées par le joueur.

× G le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que X, Y et G sont des variables aléatoires définies toutes les trois sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

4. ***a)*** Donner la loi de X.
(pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on pourra noter D_k l'événement « Le joueur ne joue pas la $k^{\text{ème}}$ manche »)

b) On pose $T = X + 1$. Démontrer que T suit la loi géométrique de paramètre α.

c) En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

5. ***a)*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$.
Déterminer, en distinguant les cas $k \leqslant n$ et $k > n$ la probabilité $\mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y=k]\big)$.

b) En déduire à l'aide de la **Partie 1** :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\big([Y=k]\big) = \frac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\, p}\left(1 - \frac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\, p}\right)^k$$

6. Calculer l'espérance de Y, puis montrer que $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{p\,(1-\alpha)\,(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}$.

7. ***a)*** Exprimer G en fonction de X et Y.

b) En déduire l'espérance de G.

8. ***a)*** On rappelle que :

× l'appel `grand(m,N,'geom',p)` permet de simuler m échantillons de N v.a.r. indépendantes suivant toutes la même loi géométrique de paramètre p.

× l'appel `grand(m,N,'bin',n,p)` permet de simuler m échantillons de N v.a.r. indépendantes suivant toutes la même loi binomiale de paramètre (n, p).

Compléter les commandes **Scilab** suivantes pour qu'elles simulent l'expérience aléatoire étudiée et affichent les valeurs prises par X et Y.

```
alpha = input('entrer la valeur de alpha : ')
p = input('entrer la valeur de p : ')
X = ----
Y = ----
disp(X)
disp(Y)
```

b) Quelles commandes faut-il ajouter aux précédentes pour calculer et afficher la valeur prise par G ?

Exercice 4

On appelle *durée de vie* d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle. On considère un composant électronique dont la durée de vie est modélisée par une variable aléatoire T définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Si F est la fonction de répartition de cette variable aléatoire, on appelle *loi de survie* du composant la fonction D définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ D(t) = 1 - F(t) = 1 - \mathbb{P}([T \leqslant t]) = \mathbb{P}([T > t])$$

Le problème se compose de deux parties pouvant être traitées indépendamment.

Partie 1 : Cas discret

On suppose dans cette partie que T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui vérifie, pour tout entier naturel n, $D(n) \neq 0$.

1. **Coefficient d'avarie.**

Le composant est mis en service à l'instant 0. Pour tout entier naturel n non nul, on appelle coefficient d'avarie à l'instant n du composant, la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant n, sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $n-1$, c'est-à-dire le nombre π_n défini par l'égalité :

$$\pi_n = \mathbb{P}_{[T>n-1]}([T = n])$$

a) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\big(\,[T = n]\,\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\,[T > n-1]\,\big) - \mathbb{P}\big(\,[T > n]\,\big)$$

En déduire l'égalité :

$$\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$$

b) On suppose que p est un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et que T suit la loi géométrique de paramètre p.

(i) Quelle est l'espérance de la variable aléatoire T ?

(ii) Calculer, pour tout entier naturel n, $D(n)$ en fonction de n.

(iii) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\pi_n = p$.

c) Réciproquement, on suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif α tel que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \pi_n = \alpha$.

(i) Établir, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $D(n) = (1-\alpha)\ D(n-1)$.

(ii) En déduire que T suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

2. **Nombre de pannes successives dans le cas d'une loi géométrique.**

Un premier composant est mis en service à l'instant 0 et, quand il tombe en panne, est remplacé instantanément par un composant identique qui sera remplacé à son tour à l'instant de sa première panne dans les mêmes conditions, et ainsi de suite.

On suppose à nouveau, dans cette partie, que p est un réel de l'intervalle $]0,1[$ et que T suit la loi géométrique de paramètre p et que, pour tout entier strictement positif i, la durée de vie du i-ème composant est une variable aléatoire T_i définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de même loi que T.

Les variables aléatoires T_i sont supposées mutuellement indépendantes et, pour tout entier naturel k non nul, on pose : $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} T_i$.

(S_k désigne donc l'instant où se produit la k-ième panne et le k-ième remplacement)

a) Soit m un entier naturel.
Démontrer par récurrence sur n, pour tout entier naturel n vérifiant $n \geqslant m$, l'égalité :

$$\sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

b) (i) Déterminer la loi de la variable aléatoire S_2 égale à $T_1 + T_2$.

(ii) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul k, la loi de S_k est donnée par :

$$\forall n \geqslant k,\ \mathbb{P}([S_k = n]) = \binom{n-1}{k-1}\ p^k (1-p)^{n-k}$$