DS3 (version B)

Exercice 1

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle $AM = MB$, d'inconnue M, dans l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On rappelle que si U_1, U_2, U_3, U_4 sont les matrices définies par :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) est une base de E, qui est donc de dimension 4. Si A et B sont deux matrices de E, l'ensemble des matrices M de E vérifiant $AM = MB$ est noté $V_{A,B}$.

1. Soient A et B deux matrices de E. Dans toute la suite, on considère l'application $\varphi_{A,B}$ définie comme suit :

$$\varphi_{A,B} \ : \ \begin{array}{ccc} M & \mapsto & AM - MB \\ E & \to & E \end{array}$$

a) Montrer que $\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de E et en déduire que $V_{A,B}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Dans le cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, construire la matrice carrée d'ordre 4 qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base (U_1, U_2, U_3, U_4).
Montrer que cette matrice est inversible et en déduire l'ensemble $V_{A,B}$.

2. Dans cette question, r et s désignent deux réels distincts et différents de 1, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de E. Démontrer :

$$M \in V_{D,\Delta} \quad \Leftrightarrow \quad y = z = t = 0$$

b) En déduire une base de $V_{D,\Delta}$.

3. Soit a, b, c, d des réels non nuls vérifiant $a - b \neq c - d$, $a - b \neq 1$, $c - d \neq 1$, A et B les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ d & 1-d \end{pmatrix}$$

a) `(CUBES uniquement - admis pour les autres)`
Montrer que les valeurs propres de A sont 1 et $a - b$.
En déduire qu'il existe une matrice inversible P de E, et une matrice D égale à celle de la question 2 pour une valeur convenable de r, telles que l'on ait : $D = P^{-1}AP$.

b) `(CUBES uniquement - admis pour les autres)` Justifier de même l'existence d'une matrice inversible Q de E, et d'une matrice Δ égale à celle de la question 2 pour une valeur convenable de s, telles que l'on ait : $\Delta = Q^{-1}BQ$.

c) Pour toute matrice M de E, démontrer :

$$M \in V_{A,B} \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta}$$

En déduire une base de $V_{A,B}$.

4. Dans cette question r, s et u, v désignent quatre réels vérifiant $r \neq s$, $r \neq v$, $u \neq s$, $u \neq v$, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

- ***a)*** Par une méthode analogue à celle de la question 2, déterminer $V_{D,\Delta}$.
- ***b)*** `(CUBES uniquement - admis pour les autres)` En déduire, par une méthode analogue à celle de la question 3, le sous-espace vectoriel $V_{A,B}$ dans le cas où A et B sont deux matrices diagonalisables n'ayant aucune valeur propre commune.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathscr{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n} X(1-X)P' + XP$$

Partie I : Étude d'un endomorphisme de polynômes

1. ***a)*** Montrer que φ est une application linéaire.

- ***b)*** Calculer $\varphi\left(X^n\right)$.
- ***c)*** Montrer que φ est un endomorphisme de E.

2. On pose, pour tout k de $[\![0, n]\!]$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

- ***a)*** Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, calculer $\varphi(P_k)$.
- ***b)*** Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E et expliciter la matrice de φ dans cette base.
- ***c)*** `(CUBES uniquement - admis pour les autres)` Déterminer les sous-espaces propres de φ.

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On note alors, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Y_k la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des k premiers tirages.
Par convention, on pose : $Y_0 = 0$.

3. On note, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Z_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le $k^{\text{ème}}$ tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon.
On pourra remarquer que, en particulier, $Z_1 = 1$.

- ***a)*** Déterminer la loi de Z_2.
- ***b)*** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout j de $[\![1, k]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}_{[Y_k = j]}\big([Z_{k+1} = 1]\big)$.
  En déduire : $\mathbb{P}\big([Z_{k+1} = 1]\big) = 1 - \dfrac{1}{n}\, \mathbb{E}(Y_k)$.
- ***c)*** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $Y_k = \sum\limits_{j=1}^{k} Z_j$, montrer :

$$\mathbb{P}\big([Z_{k+1} = 1]\big) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}\big([Z_j = 1]\big)$$

d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}\big([Z_k = 1]\big) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$.

e) Déterminer alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'espérance de Y_k.

4. On note, pour tout k de $\mathbb{N}$, G_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$G_k = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}\big([Y_k = i]\big)\ X^i$$

a) Déterminer les polynômes G_0, G_1 et G_2.

b) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout i de $[\![0, n]\!]$:

$$\mathbb{P}([Y_{k+1} = i]) = \frac{i}{n}\ \mathbb{P}\big([Y_k = i]\big) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)\ \mathbb{P}\big([Y_k = i-1]\big)$$

c) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$G_{k+1} = \frac{1}{n}\ X(1-X)G_k' + XG_k$$

d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$G_k = \varphi^k(G_0)$$

5. ***a)*** Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer $G_k(1)$ et $G_k'(1)$.

b) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}(Y_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\ \mathbb{E}(Y_k) + 1$$

c) Retrouver alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'expression de $\mathbb{E}(Y_k)$ obtenue en question ***3.e)***.

6. On rappelle que les polynômes $P_0, \ldots, P_n$ sont définis à la question ***2.*** par :

$$\text{pour tout } j \text{ de } [\![0, n]\!],\ \ P_j = X^j(1-X)^{n-j}$$

a) Calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j$.

b) Montrer, pour tout j de $[\![0, n]\!]$:

$$P_j = \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}X^i$$

c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i$$

d) Montrer finalement, pour tout k de $\mathbb{N}$ et pour tout i de $[\![0, n]\!]$:

$$\mathbb{P}([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}(-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k$$

Exercice 3

Soient a et b deux entiers naturels non nuls et s leur somme.
Une urne contient initialement a boules noires et b boules blanches indiscernables au toucher.
On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne,
- si la boule tirée est noire, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

Avant chaque tirage, l'urne contient donc toujours s boules.

On désigne par $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience et, pour tout entier naturel n non nul, on note :

× B_n l'événement « la $n^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche » ;

× X_n la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages ;

× u_n l'espérance de la variable aléatoire X_n, c'est-à-dire $u_n = \mathbb{E}(X_n)$.

1. **Étude d'un ensemble de suites**

Soit A l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de réels qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s\, x_{n+1} = (s-1)\, x_n + b + n$$

a) Soit α et β deux réels et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \alpha\, n + \beta$.
Déterminer en fonction de b et de s les valeurs de α et β pour que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ appartienne à A.

b) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite appartenant à A, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite déterminée à la question précédente et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = x_n - v_n$.
Montrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique et expliciter, pour tout entier naturel n non nul, y_n puis x_n en fonction de x_1, b, s et n.

2. **Expression de la probabilité $\mathbb{P}(B_{n+1})$ à l'aide de u_n**

a) Donner, en fonction de b et de s, les valeurs respectives de $\mathbb{P}(B_1)$ et du nombre u_1.

b) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(B_2)$ et vérifier l'égalité : $\mathbb{P}(B_2) = \dfrac{b+1-u_1}{s}$.

c) Soit n un entier naturel vérifiant $1 \leqslant n \leqslant a$.

Montrer : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}$.

En déduire l'égalité : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$.

d) Soit n un entier naturel vérifiant $n > a$.
Si $k \in [\![0, n-a-1]\!]$, quel est l'événement $[X_n = k]$?

Si $k \in [\![n-a, n]\!]$, justifier l'égalité : $\mathbb{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}$.

Montrer enfin que l'égalité : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$ est encore vérifiée.

3. **Calcul des nombres u_n et $\mathbb{P}(B_n)$**

a) Soit n un entier naturel non nul. établir, pour tout entier $k \in [\![n+1-a, n]\!]$ l'égalité :

$$\mathbb{P}\big([X_{n+1} = k]\big) \;=\; \frac{a-n+k}{s}\, \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) + \frac{b+n-k+1}{s}\, \mathbb{P}\big([X_n = k-1]\big)$$

Vérifier cette égalité pour $k = n+1$, $k = n-a$ et pour tout $k \in [\![1, n-a-1]\!]$.

b) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} en fonction de u_n et de n.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ appartient à l'ensemble A étudié dans la question 1.

c) Donner, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs de u_n et de $\mathbb{P}(B_{n+1})$ en fonction de b, s et n.

d) Quelles sont les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $\big(\mathbb{P}(B_n)\big)_{n\geqslant 1}$?