

DS3 (version B) - cubes /199

Exercice 1 /40

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle $AM = MB$, d'inconnue M , dans l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On rappelle que si U_1, U_2, U_3, U_4 sont les matrices définies par :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) est une base de E , qui est donc de dimension 4. Si A et B sont deux matrices de E , l'ensemble des matrices M de E vérifiant $AM = MB$ est noté $V_{A,B}$.

1. Soit A et B deux matrices de E et $\varphi_{A,B}$ l'application qui, à toute matrice M de E , associe la matrice $AM - MB$.

a) Montrer que $\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de E et en déduire que $V_{A,B}$ est un sous-espace vectoriel de E .

- 1 pt : caractère endo

- 2 pts : $\varphi_{A,B}$ linéaire

- 1 pt : $V_{A,B} = \text{Ker}(\varphi_{A,B})$

b) Dans le cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, construire la matrice carrée d'ordre 4 qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base (U_1, U_2, U_3, U_4) .

Montrer que cette matrice est inversible et en déduire l'ensemble $V_{A,B}$.

- 1 pt : $\text{Mat}_{(U_1, U_2, U_3, U_4)}(\varphi_{A,B}(U_1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 1 pt $\text{Mat}_{(U_1, U_2, U_3, U_4)}(\varphi_{A,B}(U_2)) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\text{Mat}_{(U_1, U_2, U_3, U_4)}(\varphi_{A,B}(U_3)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\text{Mat}_{U_1, U_2, U_3, U_4}(\varphi_{A,B}(U_4)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 2 pts : $\text{rg}(C) = 4$

- 1 pt : C inversible

- 1 pt : $\varphi_{A,B}$ isomorphisme, donc injective

- 1 pt : $V_{A,B} = \text{Ker}(\varphi_{A,B}) = \{0\}$

2. Dans cette question, r et s désignent deux réels distincts et différents de 1, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de E .

Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur x, y, z, t pour que M appartienne à $V_{D,\Delta}$.

- 1 pt : écriture système
$$\begin{cases} x = x \\ y = sy \\ rz = z \\ rt = st \end{cases}$$

- 2 pts : résolution $y = z = t = 0$ (dont 1 pt pour $r \neq 1$ et $s \neq 1$ et $r \neq s$)

b) En déduire une base de $V_{D,\Delta}$.

- 1 pt : $V_{D,\Delta} = \text{Vect}(U_1)$ (0 si confusion d'objets)

- 1 pt : caractère générateur

- 1 pt : caractère libre

3. Soit a, b, c, d des réels non nuls vérifiant $a - b \neq c - d$, $a - b \neq 1$, $c - d \neq 1$, A et B les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ d & 1-d \end{pmatrix}$$

a) Montrer que les valeurs propres de A sont 1 et $a - b$.

En déduire qu'il existe une matrice inversible P de E , et une matrice D égale à celle de la question 2 pour une valeur convenable de r , telles que l'on ait : $D = P^{-1}AP$.

- 1 pt : $\det(A - I_2) = 0$

- 1 pt : $\det(A - (a - b)I_2) = 0$

- 1 pt : A admet 2 VP distinctes, donc elle est diagonalisable

- 1 pt : il existe P inversible telle que : $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a - b \end{pmatrix}$

b) Justifier de même l'existence d'une matrice inversible Q de E , et d'une matrice Δ égale à celle de la question 2 pour une valeur convenable de s , telles que l'on ait : $\Delta = Q^{-1}BQ$.

- 2 pts

c) Pour toute matrice M de E , montrer qu'elle appartient à $V_{A,B}$ si et seulement si la matrice $P^{-1}MQ$ appartient à $V_{D,\Delta}$. En déduire une base de $V_{A,B}$.

- 2 pts : $M \in V_{A,B} \Leftrightarrow P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta}$

- 2 pts : $P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta} \Leftrightarrow M \in \text{Vect}(PU_1Q^{-1})$

- 1 pt : $V_{A,B} = \text{Vect}(PU_1Q^{-1})$

- 1 pt : (PU_1Q^{-1}) génératrice de $V_{A,B}$

- 1 pt : $PU_1Q^{-1} \neq 0$

4. Dans cette question r, s et u, v désignent quatre réels vérifiant $r \neq s, r \neq v, u \neq s, u \neq v$, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Par une méthode analogue à celle de la question 2, déterminer $V_{D,\Delta}$.

- 1 pt : écriture système
$$\begin{cases} ux = vx \\ uy = sy \\ rz = vz \\ rt = st \end{cases}$$

- 1 pt : résolution système $x = y = z = t = 0$ car $r \neq s, r \neq v, u \neq s$ et $u \neq v$

- 1 pt : $V_{D,\Delta} = \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$ (0 si confusion d'objets)

b) En déduire, par une méthode analogue à celle de la question 3, le sous-espace vectoriel $V_{A,B}$ dans le cas où A et B sont deux matrices diagonalisables n'ayant aucune valeur propre commune.

- 1 pt : A est diagonalisable, donc il existe P inversible telle que : $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$

- 1 pt : B est diagonalisable, donc il existe Q inversible telle que : $B = Q\Delta Q^{-1}$ où $\Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$

- 1 pt : v et s distincts de u et r .

- 2 pts : $M \in V_{A,B} \Leftrightarrow M = 0$

Exercice 2 /100

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n , et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E .

On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP$$

Partie I : Étude d'un endomorphisme de polynômes /22

1. a) Montrer que φ est une application linéaire.

- 2 pts (dont 1 pt pour la linéarité de la dérivation)

b) Calculer $\varphi(X^n)$.

- 1 pt : $\varphi(X^n) = X^n$

c) Montrer que φ est un endomorphisme de E .

- 1 pt : φ linéaire d'après 1.

- 1 pt : $\varphi(X^k) = \frac{1}{n}X^k - \frac{n+1}{n}X^{k+1}$

- 1 pt : $\deg(\varphi(X^k)) \leq k+1$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

- 1 pt : $\deg(\varphi(X^n)) = n$ d'après question précédente

- 1 pt : conclure par linéarité de φ

2. On pose, pour tout k de $\llbracket 0, n \rrbracket$: $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$.

a) Pour tout k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, calculer $\varphi(P_k)$.

- 1 pt : $P'_k(X) = X^{k-1}(1 - X)^{n-k-1}(k - nX)$

- 1 pt : $(\varphi(P_k))(X) = \frac{k}{n} X^k(1 - X)^{n-k}$

- 1 pt : $\varphi(P_k) = \frac{k}{n} P_k$

b) Montrer que la famille (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base de E et expliciter la matrice de φ dans cette base.

- 1 pt : évaluation de $\lambda_0(1 - X)^n + \lambda_1 X(1 - X)^{n-1} + \dots + \lambda_n X^n = 0_E$ en 0

- 1 pt : évaluation de $\lambda_0(1 - X)^n + \lambda_1 X(1 - X)^{n-1} + \dots + \lambda_n X^n = 0_E$ en 1

- 1 pt : en déduire $\lambda_1(1 - X)^{n-2} + \dots + \lambda_{n-1} X^{n-2} = 0_E$

- 1 pt : en réitérant le processus d'évaluation en 0 et en 1, et de mise en facteur de $X(1 - X)$, on obtient : $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

- 2 pts : $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & \frac{n-1}{n} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Déterminer les sous-espaces propres de φ .

- 1 pt : $E_{\frac{k}{n}} \supset \text{Vect}(P_k)$

- 1 pt : $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ diagonale donc diagonalisable

- 1 pt : $\sum_{k=0}^n \dim\left(E_{\frac{k}{n}}(\varphi)\right) = \dim(\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})) = n + 1$

- 1 pt : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \dim\left(E_{\frac{k}{n}}(\varphi)\right) = 1$

- 1 pt : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, E_{\frac{k}{n}}(\varphi) = \text{Vect}(P_k)$

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires /78

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On note alors, pour tout k de \mathbb{N}^* , Y_k la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des k premiers tirages.

Par convention, on pose : $Y_0 = 0$.

3. On note, pour tout k de \mathbb{N}^* , Z_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le $k^{\text{ème}}$ tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon.

On pourra remarquer que, en particulier, $Z_1 = 1$.

a) Déterminer la loi de Z_2 .

- 1 pt : $Z_2(\Omega) = \{0, 1\}$

- 3 pts : $\mathbb{P}([Z_2 = 0]) = \frac{1}{n}$ (peu importe la méthode : dénombrement ou introduction de v.a.r.)

- 1 pt : $Z_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout j de $\llbracket 1, k \rrbracket$, la valeur de $\mathbb{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1])$.

En déduire : $\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n} \mathbb{E}(Y_k)$.

- 2 pts : si $k < n$, $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\mathbb{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{j}{n}$

- 1 pt : si $k \geq n$, si $j \leq n$, $\mathbb{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{j}{n}$

- 1 pt : si $k \geq n$, si $j > n$, $\mathbb{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1])$ n'est pas définie

- 2 pts : $Y_k(\Omega) = \begin{cases} \llbracket 1, k \rrbracket & \text{si } k < n \\ \llbracket 1, n \rrbracket & \text{si } k \geq n \end{cases} = \llbracket 1, \min(k, n) \rrbracket$

- 5 pts : cas $k < n$ (1 pt pour $([Y_k = j])_{j \in \llbracket 1, k \rrbracket}$ SCE, 1 pt pour FPT, 1 pt pour $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\mathbb{P}([Y_k = j]) \neq 0$, 1 pt pour $\sum_{j=1}^k \mathbb{P}([Y_k = j]) = 1$, 1 pt pour $\sum_{j=1}^k j \mathbb{P}([Y_k = j]) = \mathbb{E}(Y_k)$)

- 3 pts : cas $k \geq n$ (1 pt pour $([Y_k = j])_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ SCE, 2 pts pour reste)

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $Y_k = \sum_{j=1}^k Z_j$, montrer :

$$\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \mathbb{P}([Z_j = 1])$$

- 1 pt : $1 - \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^k Z_j\right) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \mathbb{E}(Z_j)$ par linéarité de l'espérance

- 1 pt : $\mathbb{E}(Z_j) = \mathbb{P}([Z_j = 1])$

d) En déduire, pour tout k de \mathbb{N}^* : $\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$.

- 1 pt : initialisation

- 4 pts : hérédité (récurrence forte)

e) Déterminer alors, pour tout k de \mathbb{N} , l'espérance de Y_k .

- 1 pt : $-n(\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) - 1) = \mathbb{E}(Y_k)$ d'après 3.b)

- 1 pt : $\mathbb{E}(Y_k) = -n\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k - 1\right) = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right)$ d'après question précédente

- 1 pt : $\mathbb{E}(Y_0) = 0$

4. On note, pour tout k de \mathbb{N} , G_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$G_k = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}([Y_k = i]) X^i$$

a) Déterminer les polynômes G_0 , G_1 et G_2 .

- 1 pt : $G_0(X) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}([Y_0 = i]) X^i$
- 1 pt : $\mathbb{P}([Y_0 = 0]) = 1$ et $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y_0 = i]) = 0$ car $Y_0 = 0$
- 1 pt : $G_0(X) = 1$
- 1 pt : Y_1 est la v.a.r. constante égale à 1
- 2 pts : $G_1(X) = X$
- 1 pt : $Y_2(\Omega) = \{1, 2\}$
- 1 pt : $\mathbb{P}([Y_2 = 1]) = \frac{1}{n}$
- 1 pt : $\mathbb{P}([Y_2 = 2]) = 1 - \frac{1}{n}$
- 1 pt : $G_2(X) = \frac{1}{n} X + \left(1 - \frac{1}{n}\right) X^2$

b) Montrer, pour tout k de \mathbb{N} et tout i de $\llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\mathbb{P}([Y_{k+1} = i]) = \frac{i}{n} \mathbb{P}([Y_k = i]) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}([Y_k = i-1])$$

- 1 pt : $([Y_k = j])_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ SCE + FPT
- 1 pt : si $j \neq i$ et $j \neq i-1$, $[Y_k = j] \cap [Y_{k+1} = i] = \emptyset$
- 1 pt : $\mathbb{P}([Y_k = i-1] \cap [Y_{k+1} = i]) = \mathbb{P}([Y_k = i-1]) \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)$
- 1 pt : $\mathbb{P}([Y_k = i] \cap [Y_{k+1} = i]) = \mathbb{P}([Y_k = i]) \frac{i}{n}$
- 3 pts : formule toujours vraie pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $i = 1$
- 1 pt : formule toujours vraie pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $i = 0$
- 2 pts : formule toujours vraie pour $k = 0$

c) Montrer, pour tout k de \mathbb{N} :

$$G_{k+1} = \frac{1}{n} X(1-X)G'_k + XG_k$$

- 1 pt : $G'_k(X) = \sum_{i=1}^n i \mathbb{P}([Y_k = i]) X^{i-1}$
- 1 pt : $G_{k+1}(X) = \sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}([Y_k = i-1]) X^i + \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} \mathbb{P}([Y_k = i]) X^i$ (question précédente)
- 1 pt : $\sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}([Y_k = i-1]) X^i = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}([Y_k = i-1]) X^i$ (car $[Y_k = -1] = \emptyset$)
- 1 pt : $= \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \mathbb{P}([Y_k = i]) X^{i+1}$ (par décalage d'indice)
- 1 pt : $= X \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}([Y_k = i]) X^i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i \mathbb{P}([Y_k = i]) X^{i+1}$ (car $0 \mathbb{P}([Y_k = 0]) X^1 = 0$)
- 2 pts : $= X G_k(X) - \frac{1}{n} X^2 G'_k(X)$

- **2 pts** : $\sum_{i=0}^n \frac{i}{n} \mathbb{P}([Y_k = i]) X^i = \frac{1}{n} X G'_k(X)$

- **1 pt : conclusion** $G_{k+1}(X) = \frac{1}{n} X(1-X)G'_k(X) + XG_k(X)$

d) En déduire, pour tout k de \mathbb{N} :

$$G_k = \varphi^k(G_0)$$

- **1 pt : initialisation**

- **3 pts : hérédité (1 pt pour $G_{k+1}(X) = \frac{1}{n} X(1-X) G'_k(X) + X G_k(X)$ (qst précédente), 1 pt pour $\frac{1}{n} X(1-X) G'_k(X) + X G_k(X) = (\varphi(G_k))(X)$, 1 pt pour reste)**

5. a) Pour tout k de \mathbb{N} , calculer $G_k(1)$ et $G'_k(1)$.

- **1 pt** : $G_k(1) = 1$ car $([Y_k = i])_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ SCE

- **1 pt** : $G'_k(1) = \mathbb{E}(Y_k)$

b) En déduire, pour tout k de \mathbb{N} :

$$\mathbb{E}(Y_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbb{E}(Y_k) + 1$$

- **1 pt** : $\mathbb{E}(Y_{k+1}) = G'_{k+1}(1)$ (qst précédente)

- **1 pt** : $G_{k+1}(X) = \frac{1}{n} X(1-X) G'_k(X) + X G_k(X)$

- **1 pt** : $G'_{k+1}(X) = \frac{1}{n} (1-2X)G'_k(X) + \frac{1}{n} (1-X)G''_k(X) + G_k(X) + X G'_k(X)$

- **2 pts** : $\mathbb{E}(Y_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbb{E}(Y_k) + 1$ (d'après 5.a)

c) Retrouver alors, pour tout k de \mathbb{N} , l'expression de $\mathbb{E}(Y_k)$ obtenue en question 3.e).

- **1 pt** : (u_n) arithmético-géométrique

- **1 pt** : solution de l'équation de point fixe $\lambda = n$

- **1 pt** : $(u_n - \lambda)$ géométrique de raison $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

- **1 pt** : $v_k = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \times (u_0 - \lambda)$

- **1 pt** : $u_0 = \mathbb{E}(Y_0) = 0$

- **1 pt** : $\mathbb{E}(Y_k) = -n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k + n = n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right)$

6. On rappelle que les polynômes P_0, \dots, P_n sont définis à la question 2. par :

$$\text{pour tout } j \text{ de } \llbracket 0, n \rrbracket, P_j = X^j(1 - X)^{n-j}$$

a) Calculer $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j$.

- 2 pts : $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j(X) = 1$

b) Montrer, pour tout j de $\llbracket 0, n \rrbracket$:

$$P_j = \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i$$

- 2 pts : $\sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i = P_j(X)$ (1 pt pour changement d'indice $k = i - j$, 1 pt pour binôme de Newton)

c) En déduire, pour tout k de \mathbb{N} :

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i$$

- 1 pt : $G_0(X) = 1 = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j(X)$ (qst 6.a)

- 1 pt : $\varphi^k(G_0) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \varphi^k(P_j)$ (φ linéaire)

- 1 pt : $\varphi(P_j) = \frac{j}{n} P_j$

- 1 pt : $\varphi^k(P_j) = \left(\frac{j}{n}\right)^k P_j$ (récurrence immédiate)

- 1 pt : $(\varphi^k(G_0))(X) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(\sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i \right)$ (qst précédente)

- 1 pt : $(\varphi^k(G_0))(X) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i$

d) Montrer finalement, pour tout k de \mathbb{N} et pour tout i de $\llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\mathbb{P}([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k$$

- 2 pts : $\sum_{i=0}^n \mathbb{P}([Y_k = i]) X^i = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i$ (qst précédente et 4.d)

- 1 pt : décomposition du polynôme G_k sur la base $(1, X, \dots, X^n)$ est unique donc

$$\mathbb{P}([Y_k = i]) = \sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j}$$

- 2 pts : $\binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} = \binom{n}{i} \binom{i}{j}$

- 1 pt : conclusion $\mathbb{P}([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k$

Exercice 3 / 59

Soient a et b deux entiers naturels non nuls et s leur somme.

Une urne contient initialement a boules noires et b boules blanches indiscernables au toucher.

On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant :

- × si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne,
- × si la boule tirée est noire, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

Avant chaque tirage, l'urne contient donc toujours s boules.

On désigne par $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience et, pour tout entier naturel n non nul, on note :

- × B_n l'événement « la $n^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche » ;
- × X_n la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages ;
- × u_n l'espérance de la variable aléatoire X_n , c'est-à-dire $u_n = \mathbb{E}(X_n)$.

1. Étude d'un ensemble de suites

Soit A l'ensemble des suites $(x_n)_{n \geq 1}$ de réels qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s x_{n+1} = (s-1)x_n + b + n$$

a) Soit α et β deux réels et $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \alpha n + \beta$.

Déterminer en fonction de b et de s les valeurs de α et β pour que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ appartienne à A .

- **2 pts** : $s v_{n+1} = (s-1)v_n + b + n \Leftrightarrow (s+n)\alpha + \beta = n + b$

- **1 pt** : $\alpha = 1$ et $\beta = b - s$

- **2 pts** : synthèse

b) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite appartenant à A , $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite déterminée à la question précédente et $(y_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = x_n - v_n$.

Montrer que la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique et expliciter, pour tout entier naturel n non nul, y_n puis x_n en fonction de x_1 , b , s et n .

- **1 pt** : (y_n) est donc géométrique de raison $\frac{s-1}{s}$

- **1 pt** : $\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} (x_1 - 1 - b + s)$

- **1 pt** : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} (x_1 - 1 - b + s) + n + b - s$

2. Expression de la probabilité $\mathbb{P}(B_{n+1})$ à l'aide de u_n

a) Donner, en fonction de b et de s , les valeurs respectives de $\mathbb{P}(B_1)$ et du nombre u_1 .

- **1 pt** : $\mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{s}$

- **2 pts** : $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{b}{s}\right)$

- **1 pt** : $u_1 = \frac{b}{s}$

b) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(B_2)$ et vérifier l'égalité : $\mathbb{P}(B_2) = \frac{b+1-u_1}{s}$.

- 1 pt : $(B_1, \overline{B_1})$ SCE

- 1 pt : FPT $\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2)$

- 1 pt : $\mathbb{P}(B_1) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{B_1}) \neq 0$

- 1 pt : $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{b}{s}$

- 1 pt : $\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{b+1}{s}$

- 1 pt : $\mathbb{P}(B_2) = \frac{b+1-u_1}{s}$

c) Soit n un entier naturel vérifiant $1 \leq n \leq a$.

Montrer : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \frac{b+n-k}{s}$.

En déduire l'égalité : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}$.

- 2 pts : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \frac{b+n-k}{s}$ (dont 1 pt pour l'utilisation de $n \leq a$)

- 1 pt : $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$

- 1 pt : $([X_n = k])_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ SCE + FPT

- 1 pt : $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$

- 1 pt : $\sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{E}(X_n) = u_n$

- 1 pt : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}$

d) Soit n un entier naturel vérifiant $n > a$.

Si $k \in \llbracket 0, n-a-1 \rrbracket$, quel est l'événement $[X_n = k]$?

Si $k \in \llbracket n-a, n \rrbracket$, justifier l'égalité : $\mathbb{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \frac{b+n-k}{s}$.

Montrer enfin que l'égalité : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}$ est encore vérifiée.

- 1 pt : $\forall k \in \llbracket 0, n-a-1 \rrbracket, [X_n = k] = \emptyset$ (0 si non justifié)

- 1 pt : $\forall k \in \llbracket n-a, n \rrbracket, \mathbb{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \frac{b+n-k}{s}$ (0 si non justifié)

- 1 pt : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \sum_{k=n-a}^n \mathbb{P}([X_n = k] \cap B_{n+1})$ (car $\forall k \in \llbracket 0, n-a-1 \rrbracket, [X_n = k] = \emptyset$)

- 1 pt : $\forall k \in \llbracket n-a, n \rrbracket, \mathbb{P}([X_n = k]) \neq 0$

- 1 pt : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \sum_{k=n-a}^n \mathbb{P}([X_n = k]) \frac{b+n-k}{s}$

- 1 pt : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{b+n}{s} \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_n = k]) - \frac{1}{s} \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X_n = k])$ (car : $\forall k \in \llbracket 0, n-a-1 \rrbracket, \mathbb{P}([X_n = k]) = 0$)

- 1 pt : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}$

3. Calcul des nombres u_n et $\mathbb{P}(B_n)$

a) Soit n un entier naturel non nul. établir, pour tout entier $k \in \llbracket n+1-a, n \rrbracket$ l'égalité :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = \frac{a-n+k}{s} \mathbb{P}([X_n = k]) + \frac{b+n-k+1}{s} \mathbb{P}([X_n = k-1])$$

Vérifier cette égalité pour $k = n+1$, $k = n-a$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n-a-1 \rrbracket$.

- **6 pts : cas $k \in \llbracket n+1-a, n \rrbracket$ (1 pt pour $([X_n = i])_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ SCE + FPT, 1 pt pour tout $i \in \llbracket 0, k-2 \rrbracket$, $[X_n = i] \cap [X_{n+1} = k] = \emptyset$, 1 pt pour $[X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k] = [X_n = k-1] \cap B_{n+1}$, 1 pt pour $[X_n = k] \cap [X_{n+1} = k] = [X_n = k] \cap \overline{B_{n+1}}$, 1 pt pour fin calcul)**

- **2 pts : cas $k = n+1$ (dont 1 pt pour $[X_{n+1} = n+1] = [X_n = n] \cap B_{n+1}$**

- **3 pts : cas $k = n-a$ (dont 1 pt pour $[X_{n+1} = n-a] = [X_n = n-a] \cap \overline{B_{n+1}}$)**

- **1 pt : cas $k = n-a$**

b) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} en fonction de u_n et de n .

En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ appartient à l'ensemble A étudié dans la question 1.

- **1 pt : $k \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = \frac{b+n+1}{s} k \mathbb{P}([X_n = k-1]) - \frac{1}{s} k^2 \mathbb{P}([X_n = k-1])$**

- **1 pt : sommation pour k variant de 1 à $n+1$**

- **1 pt : décalage d'indice**

- **1 pt : $[X_n = n+1] = \emptyset$**

- **1 pt : $\sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{E}(X_n) = u_n$ et $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$**

- **2 pts : reste du calcul pour $u_{n+1} = \frac{s-1}{s} u_n + \frac{b+n}{s}$**

- **1 pt : $s u_{n+1} = (s-1)u_n + b+n$ donc $(u_n) \in A$**

c) Donner, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs de u_n et de $\mathbb{P}(B_{n+1})$ en fonction de b , s et n .

- **1 pt : $u_n = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} (u_1 - 1 - b + s) + n + b - s$ (qst 1.b)**

- **1 pt : $u_n = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} \left(\frac{b}{s} - 1 - b + s\right) + n + b - s$ (qst 2.a)**

- **2 pts : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = 1 - \frac{1}{s} \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} \left(\frac{b}{s} - 1 - b + s\right)$ (qst 2.c), 2.d) et précédente)**

d) Quelles sont les limites des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(\mathbb{P}(B_n))_{n \geq 1}$?

- **1 pt : $\left(\left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\frac{s-1}{s}$ avec $\left|\frac{s-1}{s}\right| < 1$**

- **1 pt : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$**

- **1 pt : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_{n+1}) = 1$**