

## DS3 (version B)

### Exercice I (HEC 2002)

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle  $AM = MB$ , d'inconnue  $M$ , dans l'espace vectoriel  $E$  des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On rappelle que si  $U_1, U_2, U_3, U_4$  sont les matrices définies par :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la famille  $(U_1, U_2, U_3, U_4)$  est une base de  $E$ , qui est donc de dimension 4. Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $E$ , l'ensemble des matrices  $M$  de  $E$  vérifiant  $AM = MB$  est noté  $V_{A,B}$ .

1. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $E$  et  $\varphi_{A,B}$  l'application qui, à toute matrice  $M$  de  $E$ , associe la matrice  $AM - MB$ .

a) Montrer que  $\varphi_{A,B}$  est un endomorphisme de  $E$  et en déduire que  $V_{A,B}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

*Démonstration.*

D'après l'énoncé,  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $\varphi_{A,B} : M \mapsto AM - MB$ .

- Démontrons tout d'abord que  $\varphi_{A,B}$  est à valeurs dans  $E$ .  
Soit  $M \in E$ . Alors  $\varphi_{A,B}(M) = AM - MB \in E$ .
- Démontrons maintenant que  $f$  est une application linéaire.  
Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  et soit  $(M, N) \in E^2$ . Alors :

$$\begin{aligned} \varphi_{A,B}(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) &= A(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) - (\lambda \cdot M + \mu \cdot N)B \\ &= \lambda \cdot AM + \mu \cdot AN - \lambda \cdot MB - \mu \cdot NB \\ &= \lambda \cdot (AM - MB) + \mu \cdot (AN - NB) \\ &= \lambda \cdot \varphi_{A,B}(M) + \mu \cdot \varphi_{A,B}(N) \end{aligned}$$

Ainsi,  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .

- Enfin :

$$\begin{aligned} V_{A,B} &= \{M \in E \mid AM - MB = 0\} \\ &= \{M \in E \mid \varphi_{A,B}(M) = 0\} \\ &= \text{Ker}(\varphi_{A,B}) \end{aligned}$$

Ainsi,  $V_{A,B}$  est un espace vectoriel car c'est le noyau d'un endomorphisme.

□

b) Dans le cas particulier où  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , construire la matrice carrée d'ordre 4 qui représente  $\varphi_{A,B}$  dans la base  $(U_1, U_2, U_3, U_4)$ .

Montrer que cette matrice est inversible et en déduire l'ensemble  $V_{A,B}$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \bullet \varphi_{A,B}(U_1) &= AU_1 - U_1B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 - 1 \cdot U_3 + 0 \cdot U_4 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \text{Mat}_{(U_1, U_2, U_3, U_4)}(\varphi_{A,B}(U_1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \varphi_{A,B}(U_2) &= AU_2 - U_2B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -2 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 + 0 \cdot U_3 - 1 \cdot U_4 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \text{Mat}_{(U_1, U_2, U_3, U_4)}(\varphi_{A,B}(U_2)) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \varphi_{A,B}(U_3) &= AU_3 - U_3B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -1 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 + 2 \cdot U_3 + 0 \cdot U_4 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \text{Mat}_{(U_1, U_2, U_3, U_4)}(\varphi_{A,B}(U_3)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \varphi_{A,B}(U_4) &= AU_4 - U_4B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \cdot U_1 - 1 \cdot U_2 - 2 \cdot U_3 + 0 \cdot U_4 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \text{Mat}_{U_1, U_2, U_3, U_4}(\varphi_{A,B}(U_4)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On en déduit que : } \text{Mat}_{(U_1, U_2, U_3, U_4)}(\varphi_{A,B}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Notons  $C$  cette matrice et déterminons son rang.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rg}(C) &= \operatorname{rg} \left( \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} \operatorname{rg} \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}{=} \operatorname{rg} \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &\stackrel{L_2 \leftrightarrow L_4}{=} \operatorname{rg} \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{=} \operatorname{rg} \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = 4
 \end{aligned}$$

- En effet, la réduite obtenue est **triangulaire** supérieure et à coefficients diagonaux non nuls. Elle est donc inversible et de rang 4.

La matrice  $C$ , est elle-même d'ordre 4 et de rang 4. Elle est donc inversible.

- On en déduit que l'endomorphisme  $\varphi_{A,B}$  est un isomorphisme. En particulier  $\varphi_{A,B}$  est injective. Or :  $V_{A,B} = \operatorname{Ker}(\varphi_{A,B})$ .

On en déduit que  $V_{A,B} = \{0_E\}$ .

□



3. Soit  $a, b, c, d$  des réels non nuls vérifiant  $a - b \neq c - d$ ,  $a - b \neq 1$ ,  $c - d \neq 1$ ,  $A$  et  $B$  les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ d & 1-d \end{pmatrix}$$

a) Montrer que les valeurs propres de  $A$  sont 1 et  $a - b$ .

En déduire qu'il existe une matrice inversible  $P$  de  $E$ , et une matrice  $D$  égale à celle de la question ?? pour une valeur convenable de  $r$ , telles que l'on ait :  $D = P^{-1}AP$ .

*Démonstration.*

• Démontrons que 1 est valeur propre de  $A$ .

$$\det(A - I_2) = \det \left( \begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ b & -b \end{pmatrix} \right) = -b(a-1) - b(1-a) = 0$$

La matrice  $A - I_2$  n'est pas inversible. On en déduit que 1 est valeur propre de  $A$ .

• Démontrons que  $a - b$  est valeur propre de  $A$ .

$$\begin{aligned} \det(A - (a-b)I_2) &= \det \left( \begin{pmatrix} a-(a-b) & 1-a \\ b & (1-b)-(a-b) \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \left( \begin{pmatrix} b & 1-a \\ b & 1-a \end{pmatrix} \right) = b(1-a) - b(1-a) = 0 \end{aligned}$$

La matrice  $A - (a-b)I_2$  n'est pas inversible. On en déduit que  $a - b$  est valeur propre de  $A$ .

• Ces deux valeurs propres sont distinctes car  $a - b \neq 1$ .

La matrice  $A$  est (carrée) d'ordre 2 et possède deux valeurs propres distinctes. Elle est donc diagonalisable.

On en déduit qu'il existe  $P$  inversible telle que :  $A = PDP^{-1}$  où  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$ .

### Commentaire

• L'énoncé ne demandait pas clairement de déterminer la matrice  $P$  mais simplement de démontrer son existence. Rappelons que la matrice  $P$  est constituée d'une base de vecteurs propres, ces vecteurs apparaissant dans l'ordre d'apparition des valeurs propres dans  $A$ .

• Effectuons ce calcul pour rappeler la méthode.

Ici,  $A - I_2 = \begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ b & -b \end{pmatrix}$ . Or :  $\begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ b & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

(on détermine ce vecteur en remarquant que les colonnes de  $A - I_2$  sont opposées)

Ainsi  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

De même,  $A - (a-b)I_2 = \begin{pmatrix} b & 1-a \\ b & 1-a \end{pmatrix}$ . Or :  $\begin{pmatrix} b & 1-a \\ b & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

(on détermine ce vecteur en remarquant que les colonnes de  $A - (a-b)I_2$  sont colinéaires)

Ainsi  $\begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix}$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $a - b$ .

Ainsi,  $P = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$  et, à l'aide de la formule d'inversion des matrices carrées d'ordre 2 :

$$P^{-1} = \frac{1}{b - (a-1)} \begin{pmatrix} b & 1-a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$



- b) Justifier de même l'existence d'une matrice inversible  $Q$  de  $E$ , et d'une matrice  $\Delta$  égale à celle de la question ?? pour une valeur convenable de  $s$ , telles que l'on ait :  $\Delta = Q^{-1}BQ$ .

*Démonstration.*

- À renommage des variables près, cette question est la même que la précédente.  
On en déduit que 1 et  $c - d$  sont valeurs propres de  $B$ .
- Ces deux valeurs propres sont distinctes car  $c - d \neq 1$ .  
La matrice  $B$  est (carrée) d'ordre 2 et possède deux valeurs propres distinctes.  
Elle est donc diagonalisable.

On en déduit qu'il existe  $Q$  inversible telle que :  $B = Q\Delta Q^{-1}$  où  $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c - d \end{pmatrix}$ .

**Commentaire**

- Comme dans la question précédente, l'énoncé ne demandait pas clairement de déterminer la matrice  $Q$  mais simplement de démontrer son existence.
- Cette question étant la même que la précédente à renommage près des variables, on obtient  $Q = \begin{pmatrix} 1 & c - 1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$  et  $Q^{-1} = \frac{1}{d - (c - 1)} \begin{pmatrix} d & 1 - c \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

□

- c) Pour toute matrice  $M$  de  $E$ , montrer qu'elle appartient à  $V_{A,B}$  si et seulement si la matrice  $P^{-1}MQ$  appartient à  $V_{D,\Delta}$ . En déduire une base de  $V_{A,B}$ .

*Démonstration.*

Soit  $M \in E$ .

$$\begin{aligned}
 M \in V_{A,B} &\Leftrightarrow AM - MB = 0 \\
 &\Leftrightarrow AM = MB \\
 &\Leftrightarrow PDP^{-1}M = MQ\Delta Q^{-1} && \text{(d'après les questions précédentes)} \\
 &\Leftrightarrow P^{-1}(PDP^{-1}M)Q = P^{-1}(MQ\Delta Q^{-1})Q \\
 &\Leftrightarrow DP^{-1}MQ = P^{-1}MQ\Delta \\
 &\Leftrightarrow D(P^{-1}MQ) - (P^{-1}MQ)\Delta = 0 \\
 &\Leftrightarrow P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta} \\
 &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, P^{-1}MQ = \alpha \cdot U_1 && \text{(car } V_{D,\Delta} = \text{Vect}(U_1)) \\
 &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha \cdot PU_1Q^{-1} \\
 &\Leftrightarrow M \in \text{Vect}(PU_1Q^{-1})
 \end{aligned}$$

On en déduit que  $V_{A,B} = \text{Vect}(PU_1Q^{-1})$ .

La famille  $(PU_1Q^{-1})$  est :

- × génératrice de  $V_{A,B}$ .
- × libre car uniquement constituée d'un vecteur non nul. En effet, comme  $U_1 \neq 0_E$  et que  $P$  et  $Q^{-1}$  sont inversibles, alors  $PU_1Q^{-1} \neq 0_E$ .

Ainsi,  $(PU_1Q^{-1})$  est une base de  $V_{A,B}$ .

□

4. Dans cette question  $r$ ,  $s$  et  $u$ ,  $v$  désignent quatre réels vérifiant  $r \neq s$ ,  $r \neq v$ ,  $u \neq s$ ,  $u \neq v$ , et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Par une méthode analogue à celle de la question ??, déterminer  $V_{D,\Delta}$ .

*Démonstration.*

Soit  $M \in E$ .

$$\begin{aligned} M \in V_{D,\Delta} &\Leftrightarrow DM - M\Delta = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ux & uy \\ rz & rt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xv & sy \\ zv & st \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} ux = vx \\ uy = sy \\ rz = vz \\ rt = st \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (u-v)x = 0 \\ (u-s)y = 0 \\ (r-v)z = 0 \\ (r-s)t = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u = v \quad \text{OU} & x = 0 \\ u = s \quad \text{OU} & y = 0 \\ r = v \quad \text{OU} & z = 0 \\ r = s \quad \text{OU} & t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad (\text{car on a supposé } u \neq v, \\ & \hspace{10em} u \neq s, r \neq v, r \neq s) \end{aligned}$$

On en déduit que :  $V_{D,\Delta} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid x = y = z = t = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{0_E\}$ . □

b) En déduire, par une méthode analogue à celle de la question ??, le sous-espace vectoriel  $V_{A,B}$  dans le cas où  $A$  et  $B$  sont deux matrices diagonalisables n'ayant aucune valeur propre commune.

*Démonstration.*

- Supposons que  $A$  est diagonalisable. Alors, il existe  $P$  inversible telle que :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{où} \quad D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

(éventuellement  $u = r$ )

- Supposons que  $B$  est diagonalisable. Alors, il existe  $Q$  inversible telle que :

$$B = Q\Delta Q^{-1} \quad \text{où} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

(éventuellement  $v = s$  mais d'après l'énoncé,  $v$  et  $s$  sont différents de  $u$  et  $r$ , ce qui correspond aux hypothèses de la question 3.)



- En raisonnant comme dans la question 3., on obtient :

$$\begin{aligned}M \in V_{A,B} &\Leftrightarrow P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta} \\&\Leftrightarrow P^{-1}MQ = 0 && \text{(car } V_{D,\Delta} = \{0\} \text{ en appliquant le} \\&&& \text{résultat de la question 3.)} \\&\Leftrightarrow M = 0\end{aligned}$$

Ainsi, sous les hypothèses de l'énoncé,  $V_{A,B} = \{0\}$ .

□

### Commentaire

- On a étudié dans cet exercice les solutions de l'équation matricielle  $AM = MB$ . La dimension de l'espace vectoriel des solutions peut être déterminée de manière exacte. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Cecioni-Frobenius (pour des matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ).
- Lorsque  $A = B$ , l'exercice consiste à chercher l'ensemble des matrices telles que :  $AM = MA$ , autrement dit l'ensemble des matrices qui commutent avec  $A$ . Cet ensemble est appelé le commutant de la matrice  $A$ .
- L'étude du commutant peut donner lieu à des sujets de concours. Dans ce cas, il faut s'attendre à des questions proches de celles développées dans cet exercice : l'étude est réalisée pour des matrices carrées d'ordre 2 ou 3 ; on commence par remarquer que le commutant de  $A$  est le noyau de l'endomorphisme  $\varphi : M \mapsto AM - MA$  ; on étudie (éventuellement) le cas particulier des matrices diagonalisables ; on étudie (éventuellement) le cas particulier des matrices nilpotentes ...
- De manière plus générale, il est fréquent de tomber sur l'étude d'endomorphisme définie sur un espace de matrice. C'était par exemple le cas du sujet EML 2014 où l'on étudiait l'endomorphisme  $\varphi : M \mapsto TMT$ .

## Exercice 2 (EML 2018 voie S)

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note  $E = \mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ , et  $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$  la base canonique de  $E$ .

On note, pour tout polynôme  $P$  de  $E$  :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP'$$

### Partie I : Étude d'un endomorphisme de polynômes

1. a) Montrer que  $\varphi$  est une application linéaire.

*Démonstration.*

Soit  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ . Soit  $(P_1, P_2) \in E^2$ .

$$\begin{aligned} & (\varphi(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2))(X) \\ &= \frac{1}{n} X(1-X)(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)'(X) + X(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)(X) \\ &= \frac{1}{n} X(1-X)(\lambda_1 \cdot P_1'(X) + \lambda_2 \cdot P_2'(X)) + \lambda_1 \cdot X P_1(X) + \lambda_2 \cdot X P_2(X) \\ &= \lambda_1 \cdot \left( \frac{1}{n} X(1-X)P_1'(X) + X P_1(X) \right) + \lambda_2 \cdot \left( \frac{1}{n} X(1-X)P_2'(X) + X P_2(X) \right) \\ &= \lambda_1 \cdot (\varphi(P_1))(X) + \lambda_2 \cdot (\varphi(P_2))(X) \end{aligned}$$

(par linéarité de la dérivation)

On en déduit que l'application  $\varphi$  est linéaire.

□

b) Calculer  $\varphi(X^n)$ .

*Démonstration.*

Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $Q_k(X) = X^k$ , et donc  $Q_k'(X) = kX^{k-1}$ .

$$\begin{aligned} (\varphi(Q_n))(X) &= \frac{1}{n} X(1-X) \cancel{n} X^{n-1} + X X^n \\ &= X^n(1-X) + X^{n+1} \\ &= X^n - \cancel{X^{n+1}} + \cancel{X^{n+1}} \\ &= X^n = Q_n(X) \end{aligned}$$

$$\varphi(Q_n) = Q_n$$

**Commentaire**

On remarque alors que le polynôme  $Q_n$  est vecteur propre de  $\varphi$  associé à la valeur propre 1.

□

c) Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .

*Démonstration.*

- On sait déjà d'après la question 1. tel que  $\varphi$  est une application linéaire.
- Montrons :  $\forall P \in E, \varphi(P) \in E$ .  
 Soit  $P \in E$ . Alors il existe  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k = \sum_{k=0}^n a_k Q_k(X)$$

× Comme  $\varphi$  est linéaire :  $\varphi(P) = \varphi\left(\sum_{k=0}^n a_k Q_k\right) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi(Q_k)$ .

On en déduit :  $\deg(\varphi(P)) \leq \max(\deg(\varphi(Q_0), \dots, \varphi(Q_n)))$ .

× Soit  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Par définition :

$$(\varphi(Q_k))(X) = \frac{1}{n} X(1-X)Q'_k(X) + XQ_k(X)$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } \deg\left((\varphi(Q_k))(X)\right) &= \deg\left(\frac{1}{n} X(1-X)Q'_k(X) + XQ_k(X)\right) \\ &\leq \max\left(\deg\left(\frac{1}{n} X(1-X)Q'_k(X)\right), \deg\left(XQ_k(X)\right)\right) \\ &= \max(k+1, k+1) = k+1 \end{aligned}$$

(on peut aussi calculer :  $(\varphi(Q_k))(X) = \frac{k}{n} X^k + \frac{n-k}{n} X^{k+1}$ )

On en déduit en particulier :  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \deg(\varphi(Q_k)) \leq k+1 \leq n$ .

× De plus, d'après la question précédente :  $\deg(\varphi(Q_n)) = n$

Finalement, on obtient :  $\deg(P) \leq n$ . Autrement dit :  $\varphi(P) \in E$ .

On en déduit que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .

□

2. On pose, pour tout  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$  :  $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$ .

a) Pour tout  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , calculer  $\varphi(P_k)$ .

*Démonstration.*

Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

- Tout d'abord : 
$$\begin{aligned} P'_k(X) &= kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-k-1} \\ &= X^{k-1}(1-X)^{n-k-1}(k(1-X) - (n-k)X) \\ &= X^{k-1}(1-X)^{n-k-1}(k-nX) \end{aligned}$$

• On en déduit :

$$\begin{aligned} (\varphi(P_k))(X) &= \frac{1}{n} X(1-X)X^{k-1}(1-X)^{n-k-1}(k-nX) + X X^k(1-X)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n} X^k(1-X)^{n-k}(k-nX) + X X^k(1-X)^{n-k} \\ &= X^k(1-X)^{n-k} \left( \frac{1}{n}(k-nX) + X \right) \\ &= X^k(1-X)^{n-k} \left( \frac{k}{n} - \cancel{X} + \cancel{X} \right) = \frac{k}{n} X^k(1-X)^{n-k} = \frac{k}{n} P_k(X) \end{aligned}$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \varphi(P_k) = \frac{k}{n} P_k$$

□

- b) Montrer que la famille  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est une base de  $E$  et expliciter la matrice de  $\varphi$  dans cette base.

*Démonstration.*

D'après la question précédente, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P_k$  est vecteur propre de  $\varphi$  associé à la valeur propre  $\frac{k}{n}$ . Ainsi, la famille  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est une famille de  $n + 1$  vecteurs associés à  $n + 1$  valeurs propres distinctes.

On en conclut que la famille  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est libre.

### Commentaire

On peut traiter cette question même si on n'a pas réussi la question précédente.

- Montrons que la famille  $\mathcal{B}' = (P_0, \dots, P_n)$  est libre.

Soit  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ . Supposons :

$$\lambda_0 \cdot P_0 + \lambda_1 \cdot P_1 + \dots + \lambda_{n-1} \cdot P_{n-1} + \lambda_n \cdot P_n = 0_E$$

Ainsi, par définition :

$$\lambda_0 \cdot (1 - X)^n + \lambda_1 \cdot X(1 - X)^{n-1} + \dots + \lambda_{n-1} \cdot X^{n-1}(1 - X) + \lambda_n \cdot X^n = 0_E$$

Ce qui revient à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0 (1 - x)^n + \lambda_1 x(1 - x)^{n-1} + \dots + \lambda_{n-1} \cdot x^{n-1}(1 - x) + \lambda_n x^n = 0 \quad (*)$$

- En appliquant l'égalité (\*) en  $x = 1$ , on obtient :

$$\lambda_0 \cancel{(1-1)^n} + \lambda_1 \cancel{1(1-1)^{n-1}} + \dots + \lambda_{n-1} \cancel{1^{n-1}(1-1)} + \lambda_n 1^n = 0$$

Et on a donc :  $\lambda_n = 0$ . L'égalité (\*) se réécrit alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0 (1 - x)^n + \lambda_1 x(1 - x)^{n-1} + \dots + \lambda_{n-1} x^{n-1}(1 - x) = 0$$

On peut alors factoriser par  $(1 - x)$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1 - x)(\lambda_0 (1 - x)^{n-1} + \lambda_1 x(1 - x)^{n-2} + \dots + \lambda_{n-1} x^{n-1}) = 0$$

Ce qui permet de conclure, en divisant par  $(1 - x)$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \lambda_0 (1 - x)^{n-1} + \lambda_1 x(1 - x)^{n-2} + \dots + \lambda_{n-1} x^{n-1} = 0$$

Enfin, comme la fonction  $P : x \mapsto \lambda_0 (1 - x)^{n-1} + \lambda_1 x(1 - x)^{n-2} + \dots + \lambda_{n-1} x^{n-1}$  est polynomiale, elle est continue et cette égalité est aussi vérifiée en 0 (par passage à la limite, on obtient :  $P(1) = \lim_{x \rightarrow 1} P(x) = 0$ ). Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0 (1 - x)^{n-1} + \lambda_1 x(1 - x)^{n-2} + \dots + \lambda_{n-1} x^{n-1} = 0 \quad (**)$$

- On peut alors itérer le procédé consistant à évaluer en 1 puis mettre en facteur et diviser par  $(1 - x)$ . On obtient alors au bout de  $n$  étapes :

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} = \dots = \lambda_1 = \lambda_0 = 0$$

- On en déduit que la famille  $\mathcal{B}'$  :
  - × est libre,
  - × vérifie :  $\text{Card}(\mathcal{B}') = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(E)$

La famille  $\mathcal{B}'$  est donc une base de  $E$ .

- Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .  
 D'après la question 2.a) :

$$\varphi(P_k) = 0 \cdot P_0 + \dots + 0 \cdot P_{k-1} + \frac{k}{n} \cdot P_k + 0 \cdot P_{k+1} + \dots + 0 \cdot P_n$$

Ainsi :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi(P_k)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{k}{n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  (où le coefficient  $\frac{k}{n}$  est en  $k^{\text{ème}}$  position).

On en déduit :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{n-1}{n} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

□

c) Déterminer les sous-espaces propres de  $\varphi$ .

*Démonstration.*

- D'après la question 2.a) :  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \varphi(P_k) = \frac{k}{n} P_k$ .  
 Autrement dit, les polynômes  $P_0, P_1, \dots, P_n$  sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres  $0, \frac{1}{n}, \dots, 1$ . On obtient ainsi les inclusions suivantes :

$$E_0(\varphi) \supset \text{Vect}(P_0), \quad E_{\frac{1}{n}}(\varphi) \supset \text{Vect}(P_1), \quad \dots, \quad E_1(\varphi) \supset \text{Vect}(P_n)$$

Comme  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$  est diagonale, alors elle est diagonalisable. On en déduit :

$$\sum_{k=0}^n \dim \left( E_{\frac{k}{n}}(\varphi) \right) = \dim (\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})) = n + 1$$

ce qui permet de conclure :  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \dim \left( E_{\frac{k}{n}}(\varphi) \right) = 1$  et ainsi de démontrer que les inclusions ci-dessus sont des égalités.

On a donc :  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, E_{\frac{k}{n}}(\varphi) = \text{Vect}(P_k)$ .

□

## Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère une urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ , indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

On note alors, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $Y_k$  la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des  $k$  premiers tirages.

Par convention, on pose :  $Y_0 = 0$ .

3. On note, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $Z_k$  la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le  $k^{\text{ème}}$  tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon.

On pourra remarquer que, en particulier,  $Z_1 = 1$ .

a) Déterminer la loi de  $Z_2$ .

*Démonstration.*

• En deux tirages, deux cas se présentent :

× soit on obtient le même numéro aux deux tirages, c'est-à-dire  $[Z_2 = 0]$  est réalisé,

× soit on obtient deux numéros distincts sur les deux tirages, c'est-à-dire  $[Z_2 = 1]$  est réalisé.

On en déduit :  $Z_2(\Omega) = \{0, 1\}$ .

• Pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ , on introduit la v.a.r.  $T_i$  correspondant au numéro obtenu au  $i^{\text{ème}}$  tirage.

Lors du  $i^{\text{ème}}$  tirage, l'expérience possède  $n$  issues différentes (on peut tirer n'importe laquelle des  $n$  boules) qui sont équiprobables.

On en déduit :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, T_i \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ .

Notons au passage que les v.a.r.  $T_i$  sont indépendantes car les tirages le sont.

• La famille  $([T_1 = k])_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  forme un système complet d'événements.

Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([Z_2 = 0]) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([T_1 = k] \cap [Z_2 = 0]) \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([T_1 = k] \cap [T_2 = k]) \quad (*) \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([T_1 = k]) \times \mathbb{P}([T_2 = k]) \quad (\text{car } T_1 \text{ et } T_2 \text{ sont} \\
 &\quad \text{indépendantes}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \quad (\text{car } T_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket) \\
 &\quad \text{et } T_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)) \\
 &= \cancel{n} \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

D'où :  $Z_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ .

(\*) : l'événement  $[T_1 = k] \cap [Z_2 = 0]$  est réalisé si et seulement si :

×  $[T_1 = k]$  est réalisé, c'est à dire qu'on a obtenu la boule numérotée  $k$  lors du 1<sup>er</sup> tirage.

× **et**  $[Z_2 = 0]$  est réalisé, c'est à dire que le 2<sup>ème</sup> tirage a amené un numéro qui a déjà été tiré. On a donc obtenu, lors de ce 2<sup>ème</sup> tirage, la même boule qu'au 1<sup>er</sup> tirage à savoir la la boule numérotée  $k$ .

On en déduit :  $[T_1 = k] \cap [Z_2 = 0] = [T_1 = k] \cap [T_2 = k]$ .

**Commentaire**

Comme l'énoncé introduit des variables aléatoires pour cet exercice (plutôt que des événements), on a ici privilégié l'introduction des v.a.r.  $T_i$ . Cependant, la démonstration s'effectue également en introduisant les événements  $B_{i,j}$  :

$$B_{i,j} = \text{« obtenir le numéro } j \text{ au } i^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$

□

b) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Calculer, pour tout  $j$  de  $\llbracket 1, k \rrbracket$ , la valeur de  $\mathbb{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1])$ .

En déduire :  $\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n}\mathbb{E}(Y_k)$ .

*Démonstration.*

• Commençons par déterminer  $Y_k(\Omega)$ . Deux cas se présentent :

× si  $k < n$ .

Dans ce cas, lors des  $k$  premiers tirages on obtient au maximum  $k$  numéros distincts.

$$\text{Si } k < n \text{ alors } Y_k(\Omega) = \llbracket 1, k \rrbracket.$$

× si  $k \geq n$ .

Dans ce cas, lors des  $k$  premiers tirages on obtient au maximum  $n$  numéros distincts (on ne peut obtenir plus de numéros distincts que de boules présentes dans l'urne).

$$\text{Si } k \geq n \text{ alors } Y_k(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket.$$

$$\text{On déduit de cette étude : } Y_k(\Omega) = \llbracket 1, \min(k, n) \rrbracket.$$

• Soit  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ . Deux cas se présentent :

× si  $j > \min(k, n)$ , alors :  $[Y_k = j] = \emptyset$ .

(comme on a supposé  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , cela correspond au cas où  $n < j \leq k$ )

Dans ce cas, la probabilité conditionnelle  $\mathbb{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1])$  n'est pas définie.

**Commentaire**

Il est assez naturel de faire cette disjonction de cas si on a déterminé correctement l'ensemble image dans la question précédente. Au vu de l'énoncé, il semble que le concepteur n'a pas pensé à ce cas. En conséquence, ne pas faire cette disjonction n'a certainement pas été sanctionné dans le barème officiel.

× si  $j \leq \min(k, n)$ .

(comme on a supposé  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , cela correspond au cas où  $j \leq n$ )

Si l'événement  $[Y_k = j]$  est réalisé, c'est que l'on a obtenu  $j$  numéros distincts lors des  $k$  premiers tirages. Dans ce cas, l'événement  $[Z_{k+1} = 1]$  est réalisé si et seulement si le  $(k+1)^{\text{ème}}$  tirage amène un numéro qui n'a pas été obtenu précédemment. Autrement dit, si l'on obtenu l'une des  $n - j$  boules non encore piochées lors des  $k$  premiers tirages.

Chaque boule étant piochée de manière équiprobable :

$$\mathbb{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1]) = \frac{n-j}{n} = 1 - \frac{j}{n}$$

$$\forall j \in \llbracket 1, \min(k, n) \rrbracket, \mathbb{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{j}{n}.$$



- La famille  $([Y_k = j])_{j \in \llbracket 1, \min(k, n) \rrbracket}$  forme un système complet d'événements (SCE).  
 Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) &= \sum_{j=1}^{\min(k, n)} \mathbb{P}([Y_k = j] \cap [Z_{k+1} = 1]) \\
 &= \sum_{j=1}^{\min(k, n)} \mathbb{P}([Y_k = j]) \mathbb{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1]) \quad (\text{car : } \forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \\
 &\quad \mathbb{P}([Y_k = j]) \neq 0) \\
 &= \sum_{j=1}^{\min(k, n)} \mathbb{P}([Y_k = j]) \left(1 - \frac{j}{n}\right) \\
 &= \sum_{j=1}^{\min(k, n)} \mathbb{P}([Y_k = j]) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\min(k, n)} j \mathbb{P}([Y_k = j]) \\
 &= 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\min(k, n)} j \mathbb{P}([Y_k = j]) \quad (\text{car } ([Y_k = j])_{j \in \llbracket 1, \min(k, n) \rrbracket} \\
 &\quad \text{est un SCE}) \\
 &= 1 - \frac{1}{n} \mathbb{E}(Y_k) \quad (\text{par définition de l'espérance})
 \end{aligned}$$

Finalement :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n} \mathbb{E}(Y_k)$

□

- c) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . En remarquant que  $Y_k = \sum_{j=1}^k Z_j$ , montrer :

$$\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \mathbb{P}([Z_j = 1])$$

*Démonstration.*

- Comme  $Y_k = \sum_{j=1}^k Z_j$ , d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) &= 1 - \frac{1}{n} \mathbb{E} \left( \sum_{j=1}^k Z_j \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \mathbb{E}(Z_j) \quad (\text{par linéarité de} \\
 &\quad \text{l'espérance})
 \end{aligned}$$

- Or, par définition de l'espérance, pour tout  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$  :

$$\mathbb{E}(Z_j) = \cancel{0 \times \mathbb{P}([Z_j = 0])} + 1 \times \mathbb{P}([Z_j = 1]) = \mathbb{P}([Z_j = 1])$$

On en déduit :  $\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \mathbb{P}([Z_j = 1])$ .

□

d) En déduire, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$  :  $\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$ .

*Démonstration.*

Démontrons par récurrence :  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{P}(k)$  où  $\mathcal{P}(k) : \mathbb{P}([Z_k = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$ .

► **Initialisation :**

D'une part,  $Z_1$  est la v.a.r. constante égale à 1. En particulier, on a donc :  $\mathbb{P}([Z_1 = 1]) = 1$ .

D'autre part, :  $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^0 = 1$ .

D'où  $\mathcal{P}(1)$ .

► **Hérédité :** soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Supposons :  $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $\mathcal{P}(j)$ , et démontrons  $\mathcal{P}(k+1)$  (i.e.  $\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$ ).

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) &= 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \mathbb{P}([Z_j = 1]) && \text{(d'après la question précédente)} \\
 &= 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1} && \text{(par hypothèses de récurrence)} \\
 &= 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j \\
 &= 1 - \frac{1}{n} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}{\cancel{\chi} - \left(\cancel{\chi} - \frac{1}{n}\right)} && \text{(car } 1 - \frac{1}{n} \neq 1) \\
 &= 1 - \cancel{\frac{1}{n}} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}{\cancel{\frac{1}{n}}} \\
 &= \cancel{\chi} - \cancel{\chi} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k
 \end{aligned}$$

D'où  $\mathcal{P}(k)$ .

Par principe de récurrence :  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$ .

□

e) Déterminer alors, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , l'espérance de  $Y_k$ .

*Démonstration.*

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

- On rappelle qu'on a démontré en question 3.b) :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) &= 1 - \frac{1}{n} \mathbb{E}(Y_k) \\
 \text{donc } \mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) - 1 &= -\frac{1}{n} \mathbb{E}(Y_k) \\
 \text{d'où } -n(\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) - 1) &= \mathbb{E}(Y_k)
 \end{aligned}$$

- On obtient, grâce à la question précédente :

$$\mathbb{E}(Y_k) = -n \left( \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k - 1 \right) = n \left( 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \right)$$

- De plus, d'après l'énoncé :  $Y_0 = 0$ . Donc :  $\mathbb{E}(Y_0) = 0$ .

$$\mathbb{E}(Y_0) = 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(Y_k) = n \left( 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \right)$$

□

4. On note, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ ,  $G_k$  le polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  défini par :

$$G_k = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}([Y_k = i]) X^i$$

a) Déterminer les polynômes  $G_0$ ,  $G_1$  et  $G_2$ .

*Démonstration.*

- Par définition de  $G_0$  :

$$G_0(X) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}([Y_0 = i]) X^i$$

Or  $Y_0$  est la v.a.r. constante égale à 0. Donc :

$$\mathbb{P}([Y_0 = 0]) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([Y_0 = i]) = 0$$

On en déduit :

$$G_0(X) = \mathbb{P}([Y_0 = 0]) X^0 + \sum_{i=1}^n \mathbb{P}([Y_0 = i]) X^i = 1$$

$$G_0(X) = 1$$

- Par définition de  $G_1$  :

$$G_1(X) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}([Y_1 = i]) X^i$$

× Déterminons la loi de  $Y_1$ .

En un seul tirage, on obtient obligatoirement un numéro (distinct). Donc  $Y_1(\Omega) = \{1\}$ .

La v.a.r.  $Y_1$  est la v.a.r. constante égale à 1.

× En particulier :

$$\mathbb{P}([Y_1 = 1]) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \mathbb{P}([Y_1 = i]) = 0$$

× On en déduit :

$$G_1(X) = \mathbb{P}([Y_1 = 0]) X^0 + \mathbb{P}([Y_1 = 1]) X^1 + \sum_{i=2}^n \mathbb{P}([Y_1 = i]) X^i = X$$

$$G_1(X) = X$$

- Par définition de  $G_2$  :

$$G_2(X) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}([Y_2 = i]) X^i$$

- × Déterminons la loi de  $Y_2$ .

En deux tirages, deux cas se présentent :

- soit on obtient le même numéro aux deux tirages, c'est-à-dire  $[Y_2 = 1]$  est réalisé,
- soit on obtient deux numéros distincts sur les deux tirages, c'est-à-dire  $[Y_2 = 2]$  est réalisé.

On en déduit :  $Y_2(\Omega) = \{1, 2\}$ .

- × L'événement  $[Y_2 = 1]$  est réalisé si et seulement si un seul numéro a été tiré lors des deux premiers tirages. Autrement dit, le 2<sup>ème</sup> tirage a amené le même numéro que le premier.

$Ainsi : [Y_2 = 1] = [Z_2 = 0].$

On en déduit, d'après la question **3.a)** :

$$\mathbb{P}([Y_2 = 1]) = \mathbb{P}([Z_2 = 0]) = \frac{1}{n}$$

Comme la famille  $([Y_2 = 1], [Y_2 = 2])$  est un système complet d'événements :

$$\mathbb{P}([Y_2 = 2]) = 1 - \mathbb{P}([Y_2 = 1]) = 1 - \frac{1}{n}$$

Et donc, bien sûr :

$$\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}, \mathbb{P}([Y_2 = i]) = 0$$

- × Finalement :

$$\begin{aligned} G_2(X) &= \cancel{\mathbb{P}([Y_2 = 0]) X^0} + \mathbb{P}([Y_2 = 1]) X^1 + \mathbb{P}([Y_2 = 2]) X^2 + \cancel{\sum_{i=3}^n \mathbb{P}([Y_2 = i]) X^i} \\ &= \frac{1}{n} X + \left(1 - \frac{1}{n}\right) X^2 \end{aligned}$$

$G_2(X) = \frac{1}{n} X + \left(1 - \frac{1}{n}\right) X^2$

□

- b) Montrer, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$  et tout  $i$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$\mathbb{P}([Y_{k+1} = i]) = \frac{i}{n} \mathbb{P}([Y_k = i]) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}([Y_k = i-1])$$

*Démonstration.*

Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

- Traitons tout d'abord le cas  $k = 0$  qui amène à une étude particulière. En effet, rappelons que les v.a.r.  $Y_0$  et  $Y_1$  sont constantes :

$$Y_0 = 0 \quad \text{et} \quad Y_1 = 1$$

Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Par définition des v.a.r.  $Y_0$  et  $Y_1$  :

$$\mathbb{P}([Y_0 = i]) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \in \llbracket 2, n \rrbracket \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Y_1 = i]) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \in \llbracket 2, n \rrbracket \end{cases}$$

On en déduit :

$$\frac{i}{n} \mathbb{P}([Y_0 = i]) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}([Y_0 = i-1]) = \begin{cases} \frac{0}{n} & \text{si } i = 0 \\ 1 - \frac{1-1}{n} & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \in \llbracket 2, n \rrbracket \end{cases}$$

et on retrouve bien la valeur de  $\mathbb{P}([Y_1 = i])$  puisque :

$$\mathbb{P}([Y_1 = i]) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \in \llbracket 2, n \rrbracket \end{cases}$$

Finalemment :  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}([Y_1 = i]) = \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}([Y_0 = i-1]) + \frac{i}{n} \mathbb{P}([Y_0 = i]).$

- Considérons maintenant  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ .  
(Les cas  $i = 0$  et  $i = 1$  sont un peu à part car amène à considérer un nombre négatif de numéros distincts puisqu'alors  $i - 1 \leq 0$ . Ces cas sont traités en fin de question.)

L'événement  $[Y_{k+1} = i]$  est réalisé si et seulement si  $i$  numéros distincts ont été tirés lors des  $k + 1$  premiers tirages. Cela résulte de deux cas :

- × soit on a obtenu  $i$  numéros distincts lors des  $k$  premiers tirages et le tirage suivant (le  $(k + 1)^{\text{ème}}$ ) a amené un numéro déjà obtenu.

Autrement dit, l'événement :  $[Y_k = i] \cap [Z_{k+1} = 0]$  est réalisé.

- × soit on a obtenu  $i - 1$  numéros distincts lors des  $k$  premiers tirages et le tirage suivant (le  $(k + 1)^{\text{ème}}$ ) a amené un nouveau numéro.

Autrement dit, l'événement :  $[Y_k = i - 1] \cap [Z_{k+1} = 1]$  est réalisé.

On en déduit :  $[Y_{k+1} = i] = ([Y_k = i] \cap [Z_{k+1} = 0]) \cup ([Y_k = i - 1] \cap [Z_{k+1} = 1]).$

Par incompatibilité des événements :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_{k+1} = i]) &= \mathbb{P}([Y_k = i - 1] \cap [Z_{k+1} = 1]) + \mathbb{P}([Y_k = i] \cap [Z_{k+1} = 0]) \\ &= \mathbb{P}([Y_k = i - 1]) \mathbb{P}_{[Y_k = i - 1]}([Z_{k+1} = 1]) + \mathbb{P}([Y_k = i]) \mathbb{P}_{[Y_k = i]}([Z_{k+1} = 0]) \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est valide car  $\mathbb{P}([Y_k = i - 1]) \neq 0$  et  $\mathbb{P}([Y_k = i]) \neq 0$  puisque  $i \geq 2$ .

Déterminons maintenant  $\mathbb{P}_{[Y_k = i - 1]}([Z_{k+1} = 1])$  et  $\mathbb{P}_{[Y_k = i]}([Z_{k+1} = 0])$ .

- × Si l'événement  $[Y_k = i - 1]$  est réalisé, c'est que lors des  $k$  premiers tirages, on a tiré  $i - 1$  numéros distincts. Dans ce cas, l'événement  $[Z_{k+1} = 1]$  est réalisé si et seulement si on pioche l'un des  $n - (i - 1)$  numéros restants.

On en déduit :  $\mathbb{P}_{[Y_k = i - 1]}([Z_{k+1} = 1]) = \frac{n - (i - 1)}{n} = 1 - \frac{i - 1}{n}.$

- × Si l'événement  $[Y_k = i]$  est réalisé, c'est que lors des  $k$  premiers tirages, on a tiré  $i$  numéros distincts. Dans ce cas, l'événement  $[Z_{k+1} = 0]$  est réalisé si et seulement si on pioche l'un de ces  $i$  numéros.

On en déduit :  $\mathbb{P}_{[Y_k = i]}([Z_{k+1} = 0]) = \frac{i}{n}.$

Finalement, on obtient bien :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \mathbb{P}([Y_{k+1} = i]) = \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}([Y_k = i-1]) + \frac{i}{n} \mathbb{P}([Y_k = i]).$$

**Commentaire**

On pouvait aussi démontrer ce résultat en utilisant la formule des probabilités totales.

La famille  $([Y_k = j])_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  forme un système complet d'événements.

Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_{k+1} = i]) &= \sum_{j=0}^n \mathbb{P}([Y_k = j] \cap [Y_{k+1} = i]) \\ &= \sum_{j=0}^{i-2} \mathbb{P}([Y_k = j] \cap [Y_{k+1} = i]) + \mathbb{P}([Y_k = i-1] \cap [Y_{k+1} = i]) \\ &\quad + \mathbb{P}([Y_k = i] \cap [Y_{k+1} = i]) + \sum_{j=i+1}^k \mathbb{P}([Y_k = j] \cap [Y_{k+1} = i]) \end{aligned}$$

En effet, pour tout  $j \notin \{i-1, i\}$  :  $[Y_k = j] \cap [Y_{k+1} = i] = \emptyset$ .

Il suffit alors de remarquer :

$$[Y_k = i-1] \cap [Y_{k+1} = i] = [Y_k = i-1] \cap [Z_{k+1} = 1]$$

$$\text{et } [Y_k = i] \cap [Y_{k+1} = i] = [Y_k = i] \cap [Z_{k+1} = 0]$$

- Il reste alors à traiter les cas où  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $i \in \{0, 1\}$ .

- × Si  $i = 0$ , il suffit de remarquer :

$$[Y_{k+1} = 0] = \emptyset \quad \text{et} \quad [Y_k = -1] = \emptyset \quad \text{et} \quad [Y_k = 0] = \emptyset$$

$$\text{On a bien : } \mathbb{P}([Y_{k+1} = 0]) = 0 = \left(1 - \frac{0-1}{n}\right) \times 0 + \frac{0}{n} \times 0.$$

- × Si  $i = 1$ , on remarque, en raisonnant comme précédemment :

$$[Y_{k+1} = 1] = [Y_k = 1] \cap [Y_{k+1} = 1]$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_{k+1} = 1]) &= \mathbb{P}([Y_k = 1] \cap [Y_{k+1} = 1]) \\ &= \mathbb{P}([Y_k = 1] \cap [Z_{k+1} = 0]) \\ &= \mathbb{P}([Y_k = 1]) \mathbb{P}_{[Y_k=1]}([Z_{k+1} = 0]) \\ &= \mathbb{P}([Y_k = 1]) \frac{1}{n} \quad (\text{en raisonnant une nouvelle fois comme précédemment}) \\ &= \left(1 - \frac{1-1}{n}\right) \mathbb{P}([Y_k = 1-1]) + \frac{1}{n} \mathbb{P}([Y_k = 1]) \end{aligned}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([Y_{k+1} = 1]) = \left(1 - \frac{1-1}{n}\right) \mathbb{P}([Y_k = 1-1]) + \frac{1}{n} \mathbb{P}([Y_k = 1])$$

□

c) Montrer, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$  :

$$G_{k+1} = \frac{1}{n} X(1-X)G'_k + XG_k$$

*Démonstration.*

Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

- Tout d'abord :  $G'_k(X) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}([Y_k = i]) i X^{i-1} = \sum_{i=1}^n i \mathbb{P}([Y_k = i]) X^{i-1}$ .
- Ensuite, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} G_{k+1}(X) &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}([Y_{k+1} = i]) X^i \\ &= \sum_{i=0}^n \left( \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}([Y_k = i-1]) + \frac{i}{n} \mathbb{P}([Y_k = i]) \right) X^i \\ &= \sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}([Y_k = i-1]) X^i + \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} \mathbb{P}([Y_k = i]) X^i \quad (*) \end{aligned}$$

- Étudions la première somme de l'égalité (\*).

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}([Y_k = i-1]) X^i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}([Y_k = i-1]) X^i \quad (\text{car } [Y_k = -1] = \emptyset) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \mathbb{P}([Y_k = i]) X^{i+1} \quad (\text{par décalage d'indice}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}([Y_k = i]) X^{i+1} - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} i \mathbb{P}([Y_k = i]) X^{i+1} \\ &= X \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}([Y_k = i]) X^i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i \mathbb{P}([Y_k = i]) X^{i+1} \quad (\text{car } 0 \mathbb{P}([Y_k = 0]) X^1 = 0) \\ &= X(G_k(X) - \mathbb{P}([Y_k = n]) X^n) - \frac{1}{n} X^2 \sum_{i=1}^{n-1} i \mathbb{P}([Y_k = i]) X^{i-1} \\ &= X G_k(X) - \mathbb{P}([Y_k = n]) X^{n+1} - \frac{1}{n} X^2 (G'_k(X) - n \mathbb{P}([Y_k = n]) X^{n-1}) \\ &= X G_k(X) - \cancel{\mathbb{P}([Y_k = n]) X^{n+1}} - \frac{1}{n} X^2 G'_k(X) + \cancel{\mathbb{P}([Y_k = n]) X^{n+1}} \\ &= X G_k(X) - \frac{1}{n} X^2 G'_k(X) \end{aligned}$$

- Étudions la seconde somme de l'égalité (\*).

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} \mathbb{P}([Y_k = i]) X^i &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i \mathbb{P}([Y_k = i]) X^i \quad (\text{car } 0 \mathbb{P}([Y_k = 0]) X^0 = 0) \\ &= \frac{1}{n} X \sum_{i=1}^n i \mathbb{P}([Y_k = i]) X^{i-1} = \frac{1}{n} X G'_k(X) \end{aligned}$$

En reprenant (\*), on obtient :

$$G_{k+1}(X) = X G_k(X) - \frac{1}{n} X^2 G'_k(X) + \frac{1}{n} X G'_k(X) = X G_k(X) + \frac{1}{n} X(1-X)G'_k(X).$$





d) En déduire, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$  :  $G_k = \varphi^k(G_0)$ .

*Démonstration.*

Démontrons par récurrence :  $\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k)$  où  $\mathcal{P}(k) : G_k = \varphi^k(G_0)$ .

► **Initialisation :**

Comme  $\varphi^0 = \text{id}_E$ , on a :  $\varphi^0(G_0) = G_0$ .

D'où  $\mathcal{P}(0)$ .

► **Hérédité :** soit  $k \in \mathbb{N}$ .

Supposons  $\mathcal{P}(k)$  et démontrons  $\mathcal{P}(k+1)$  (i.e.  $G_{k+1} = \varphi^{k+1}(G_0)$ ).

$$\begin{aligned} G_{k+1}(X) &= \frac{1}{n} X(1-X) G'_k(X) + X G_k(X) && \text{(d'après la question précédente)} \\ &= (\varphi(G_k))(X) && \text{(par définition de } \varphi) \\ &= (\varphi(\varphi^k(G_0)))(X) && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= (\varphi^{k+1}(G_0))(X) \end{aligned}$$

D'où  $\mathcal{P}(k+1)$ .

Par principe de récurrence :  $\forall k \in \mathbb{N}, G_k = \varphi^k(G_0)$ .

□

5. a) Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , calculer  $G_k(1)$  et  $G'_k(1)$ .

*Démonstration.*

Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

- Par définition de  $G_k$  :

$$G_k(1) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}([Y_k = i]) 1^i = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}([Y_k = i])$$

Or la famille  $([Y_k = i])_{i \in [0, n]}$  est un système complet d'événements, donc :  $\sum_{i=0}^n \mathbb{P}([Y_k = i]) = 1$

Ainsi :  $G_k(1) = 1$ .

- Par définition de  $G'_k$  :

$$G'_k(1) = \sum_{i=0}^n i \mathbb{P}([Y_k = i]) 1^i = \sum_{i=0}^n i \mathbb{P}([Y_k = i]) = \mathbb{E}(Y_k)$$

$G'_k(1) = \mathbb{E}(Y_k)$ .

□

b) En déduire, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$  :  $\mathbb{E}(Y_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbb{E}(Y_k) + 1$ .

*Démonstration.*

Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

- Tout d'abord, d'après la question précédente :  $\mathbb{E}(Y_{k+1}) = G'_{k+1}(1)$ .
- Or, d'après la question 4.c) :

$$G_{k+1}(X) = \frac{1}{n} X(1-X) G'_k(X) + X G_k(X)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} G'_{k+1}(X) &= \frac{1}{n} \left( (1-X) G'_k(X) + X(-G'_k(X) + (1-X)G''_k(X)) \right) + G_k(X) + X G'_k(X) \\ &= \frac{1}{n} (1-2X)G'_k(X) + \frac{1}{n} (1-X)G''_k(X) + G_k(X) + X G'_k(X) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{k+1}) &= G'_{k+1}(X) \\ &= \frac{1}{n} (1-2)G'_k(1) + \frac{1}{n} (1-1)G''_k(1) + G_k(1) + 1 G'_k(1) \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) G'_k(1) + G_k(1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbb{E}(Y_k) + 1 \quad (d'après 5.a) \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(Y_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbb{E}(Y_k) + 1$$

□

c) Retrouver alors, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , l'expression de  $\mathbb{E}(Y_k)$  obtenue en question 6.e).

*Démonstration.*

- Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $u_k = \mathbb{E}(Y_k)$ .  
 Alors, d'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) u_k + 1$$

La suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est donc arithmético-géométrique.

- L'équation de point fixe associée à la suite  $(u_k)$  est :

$$x = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x + 1$$

Elle admet pour unique solution :  $\lambda = n$ .

- On écrit : 
$$u_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times u_k + 1 \quad (L_1)$$
  

$$\lambda = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \lambda + 1 \quad (L_2)$$

et donc 
$$u_{k+1} - \lambda = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times (u_k - \lambda) \quad (L_1)-(L_2)$$

Notons alors  $(v_k)$  la suite de terme général  $v_k = u_k - \lambda$ .

- La suite  $(v_k)$  est géométrique de raison  $1 - \frac{1}{n}$ .  
 Ainsi, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$v_k = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \times v_0 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \times (u_0 - \lambda)$$

On a donc, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$u_k = v_k + \lambda = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \times (u_0 - \lambda) + \lambda$$

- Enfin :  $u_0 = \mathbb{E}(Y_0) = 0$ .

On en déduit :  $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(Y_k) = -n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k + n = n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right)$ .

□

6. On rappelle que les polynômes  $P_0, \dots, P_n$  sont définis à la question 5. par :

$$\text{pour tout } j \text{ de } \llbracket 0, n \rrbracket, P_j = X^j(1 - X)^{n-j}$$

a) Calculer  $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j$ .

*Démonstration.*

On calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j(X) &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} X^j (1 - X)^{n-j} \quad (\text{par définition de } P_j) \\ &= (X + (1 - X))^n \quad (\text{par formule du binôme de Newton}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j(X) = 1$$

□

b) Montrer, pour tout  $j$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$P_j = \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i$$

*Démonstration.*

On calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i &= \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-1)^k X^{k+j} \quad (\text{avec le changement d'indice } k = i - j) \\ &= X^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-1)^k X^k \\ &= X^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-X)^k 1^{n-j-k} \\ &= X^j (-X + 1)^{n-j} \quad (\text{par formule du binôme de Newton}) \\ &= P_j(X) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i = P_j(X)$$

□

c) En déduire, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$  :

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i$$

*Démonstration.*

• Tout d'abord, d'après la question **6.a** :

$$G_0(X) = 1 = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j(X)$$

• Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Comme  $\varphi$  est une application linéaire, il en est de même de  $\varphi^k$ . Ainsi :

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \varphi^k(P_j)$$

• De plus, d'après la question **2.a** :  $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \varphi(P_j) = \frac{j}{n} P_j$ .

On en déduit, par récurrence immédiate :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \varphi^k(P_j) = \left(\frac{j}{n}\right)^k P_j$$

On en déduit :

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k P_j$$

• Enfin, d'après la question précédente :

$$P_j(X) = \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i$$

D'où :

$$\begin{aligned} (\varphi^k(G_0))(X) &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \left( \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i \right) \\ &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq n} \left( \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} X^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \left( \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} X^i \right) \end{aligned}$$

On en déduit :  $\forall k \in \mathbb{N}, (\varphi^k(G_0))(X) = \sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i$

□

d) Montrer finalement, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$  et pour tout  $i$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$\mathbb{P}([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k$$

*Démonstration.*

Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

• D'après la question 4.d) :

$$\begin{array}{ccc} G_k & = & \varphi^k(G_0) \\ \parallel & & \parallel \\ \sum_{i=0}^n \mathbb{P}([Y_k = i]) X^i & & \sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i \quad (\text{d'après la question précédente}) \end{array}$$

• Or la famille  $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

(on rappelle :  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, Q_i(X) = X^i$ )

Donc la décomposition du polynôme  $G_k$  sur cette base est unique.

En particulier, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$\mathbb{P}([Y_k = i]) = \sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j}$$

• Montrons alors maintenant, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $j \leq i$  :

$$\binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} = \binom{n}{i} \binom{i}{j}$$

× D'une part :

$$\binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} = \frac{n!}{j! \cancel{(n-j)!}} \frac{\cancel{(n-j)!}}{(i-j)! ((n-j) - (i-j))!} = \frac{n!}{j! (i-j)! (n-i)!}$$

× D'autre part :

$$\binom{i}{j} \binom{n}{i} = \frac{\cancel{i!}}{j! (i-j)!} \frac{n!}{\cancel{i!} (n-i)!} = \frac{n!}{j! (i-j)! (n-i)!}$$

Ainsi, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $j \leq i$  :  $\binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} = \binom{n}{i} \binom{i}{j}$ .

• On en déduit :

$$\mathbb{P}([Y_k = i]) = \sum_{j=0}^i \binom{n}{i} \binom{i}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j}$$

**Commentaire**

La relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se faire par dénombrement.

Pour ce faire, on considère un ensemble  $E$  à  $n$  éléments.

*(on peut penser à une pièce qui contient  $n$  individus)*

On souhaite alors construire une partie  $P$  à  $i$  éléments de cet ensemble contenant  $j$  éléments distingués *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de  $i$  individus dans lequel figurent  $j$  représentants de ces individus)*.

Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à  $i$  éléments de  $E$  :  $\binom{n}{i}$  possibilités.

On distingue ensuite  $j$  éléments de cet ensemble  $P$  :  $\binom{i}{j}$  possibilités.

*(on choisit d'abord les  $i$  individus et on élit ensuite  $j$  représentants de ces individus)*

Ainsi, il y a  $\binom{i}{j} \binom{n}{i}$  manières de construire  $P$ .

2) On choisit d'abord, dans  $E$ , les  $j$  éléments à distinguer :  $\binom{n}{j}$  possibilités.

On choisit ensuite  $i - j$  éléments dans  $E$ , pour former  $P$ , en y ajoutant les  $j$  éléments précédents :  $\binom{n-j}{i-j}$  possibilités.

*(on choisit d'abord les  $j$  représentants puis on leur adjoint un groupe de  $i - j$  individus)*

Ainsi, il y a  $\binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j}$  manières de construire  $P$ .

On retrouve ainsi le résultat. □

### Exercice 3 (ESCP 2003)

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls et  $s$  leur somme.

Une urne contient initialement  $a$  boules noires et  $b$  boules blanches indiscernables au toucher.

On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant :

- × si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne,
- × si la boule tirée est noire, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

Avant chaque tirage, l'urne contient donc toujours  $s$  boules.

On désigne par  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé qui modélise cette expérience et, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note :

- ×  $B_n$  l'événement « la  $n^{\text{ème}}$  boule tirée est blanche » ;
- ×  $X_n$  la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches tirées au cours des  $n$  premiers tirages ;
- ×  $u_n$  l'espérance de la variable aléatoire  $X_n$ , c'est-à-dire  $u_n = \mathbb{E}(X_n)$ .

### 1. Étude d'un ensemble de suites

Soit  $A$  l'ensemble des suites  $(x_n)_{n \geq 1}$  de réels qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s x_{n+1} = (s-1)x_n + b + n$$

- a) Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels et  $(v_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \alpha n + \beta$ .  
Déterminer en fonction de  $b$  et de  $s$  les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  pour que la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  appartienne à  $A$ .

*Démonstration.*

- Supposons que  $(v_n) \in A$ . Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s v_{n+1} = (s-1)v_n + b + n$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On obtient :

$$\begin{aligned} s v_{n+1} &= (s-1)v_n + b + n \\ \Leftrightarrow s(\alpha(n+1) + \beta) &= (s-1)(\alpha n + \beta) + n + b \\ \Leftrightarrow s(n+1)\alpha + s\beta &= n(s-1)\alpha + (s-1)\beta + n + b \\ \Leftrightarrow (s(n+1) - n(s-1))\alpha + (s - (s-1))\beta &= n + b \\ \Leftrightarrow (s\cancel{n} + s - \cancel{ns} + n)\alpha + \beta &= n + b \\ \Leftrightarrow (s+n)\alpha + \beta &= n + b \end{aligned}$$

En particulier, pour  $n = 1$  et  $n = 2$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \begin{cases} (s+1)\alpha + \beta = 1+b \\ (s+2)\alpha + \beta = 2+b \end{cases} &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (s+1)\alpha + \beta = 1+b \\ \alpha = 1 \end{cases} \\ &\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - (s+1)L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \beta = b-s \\ \alpha = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = n + b - s$ .

- Vérifions maintenant que la suite  $(v_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = n + b - s$$

appartient bien à  $A$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

× D'une part :

$$s v_{n+1} = s(n+1) + b - s = sn + s + sb - s^2$$

× D'autre part :

$$\begin{aligned} (s-1)v_n + b + n &= (s-1)(n + b - s) + b + n \\ &= sn - \cancel{n} + bs - \cancel{b} - s^2 + s + \cancel{b} + \cancel{n} \\ &= sn + bs - s^2 + s \end{aligned}$$

On a bien, pour tout  $n \in \mathbb{N}^* : s v_{n+1} = (s-1)v_n + b + n$ .

La suite  $(v_n)$  appartient à  $A$  si et seulement si  $\alpha = 1$  et  $\beta = b - s$ .

□



- b) Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite appartenant à  $A$ ,  $(v_n)_{n \geq 1}$  la suite déterminée à la question précédente et  $(y_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $y_n = x_n - v_n$ .  
Montrer que la suite  $(y_n)_{n \geq 1}$  est une suite géométrique et expliciter, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $y_n$  puis  $x_n$  en fonction de  $x_1$ ,  $b$ ,  $s$  et  $n$ .

*Démonstration.*

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} - v_{n+1} \\ &= \frac{1}{s}((s-1)x_n + b + n) - \frac{1}{s}((s-1)v_n + b + n) \\ &= \frac{s-1}{s}(x_n - v_n) \\ &= \frac{s-1}{s}y_n \end{aligned}$$

La suite  $(y_n)$  est donc géométrique de raison  $\frac{s-1}{s}$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On en déduit :

$$y_n = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} y_1$$

Or :  $y_1 = x_1 - v_1 = x_1 - (1 + b - s)$ .

Ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $y_n = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} (x_1 - 1 - b + s)$ .

- De plus :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n = y_n + v_n$ .

Finalement :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} (x_1 - 1 - b + s) + n + b - s$ .

□

## 2. Expression de la probabilité $\mathbb{P}(B_{n+1})$ à l'aide de $u_n$

- a) Donner, en fonction de  $b$  et de  $s$ , les valeurs respectives de  $\mathbb{P}(B_1)$  et du nombre  $u_1$ .

*Démonstration.*

- Lors du premier tirage, on pioche parmi les  $s$  boules disponibles, dont  $b$  blanches. Chaque issue est équiprobable.

Ainsi :  $\mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{s}$ .

- Tout d'abord :  $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ .

En effet, au premier tirage, seules deux issues sont possibles :

- × on pioche une boule blanche, c'est-à-dire  $[X_1 = 1]$  est réalisé,
- × on pioche une boule noire, c'est-à-dire  $[X_1 = 0]$  est réalisé.

De plus :  $\mathbb{P}([X_1 = 1]) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{s}$ .

On en déduit :  $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{b}{s}\right)$ . Donc :  $u_1 = \mathbb{E}(X_1) = \frac{b}{s}$ .

□

b) Calculer la probabilité  $\mathbb{P}(B_2)$  et vérifier l'égalité :  $\mathbb{P}(B_2) = \frac{b+1-u_1}{s}$ .

*Démonstration.*

La famille  $(B_1, \overline{B_1})$  forme un système complet d'événements.

Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2) \\ &= \mathbb{P}(B_1) \mathbb{P}_{B_1}(B_2) + \mathbb{P}(\overline{B_1}) \mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2) \quad (\text{car } \mathbb{P}(B_1) \neq 0 \text{ et } \mathbb{P}(\overline{B_1}) \neq 0) \end{aligned}$$

Déterminons  $\mathbb{P}_{B_1}(B_2)$  et  $\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2)$ .

- Si l'événement  $B_1$  est réalisé, c'est qu'on a pioché une boule blanche au premier tirage. Elle est remise dans l'urne.

Dans ce cas, l'événement  $B_2$  est réalisé si et seulement si on a pioché une boule blanche au 2<sup>ème</sup> tirage dans l'urne contenant toujours  $a$  boules noires et  $b$  boules blanches. Ainsi :

$$\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{b}{s}$$

- Si l'événement  $\overline{B_1}$  est réalisé, c'est qu'on a pioché une boule noire au premier tirage. Elle est remplacée par une boule blanche dans l'urne.

Dans ce cas, l'événement  $B_2$  est réalisé si et seulement si on a pioché une boule blanche au 2<sup>ème</sup> tirage dans l'urne contenant alors  $a-1$  boules noires et  $b+1$  boules blanches. Ainsi :

$$\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{b+1}{s}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_2) &= \frac{b}{s} \times \frac{b}{s} + \left(1 - \frac{b}{s}\right) \left(\frac{b+1}{s}\right) \\ &= \frac{1}{s} \left(\frac{b^2}{s} + (b+1) \left(1 - \frac{b}{s}\right)\right) \\ &= \frac{1}{s} \left(\cancel{\frac{b^2}{s}} + b - \cancel{\frac{b^2}{s}} + 1 - \frac{b}{s}\right) = \frac{b+1-u_1}{s} \end{aligned}$$

Or  $u_1 = \frac{b}{s}$  d'après la question précédente, donc :  $\mathbb{P}(B_2) = \frac{b+1-u_1}{s}$ .

□

c) Soit  $n$  un entier naturel vérifiant  $1 \leq n \leq a$ .

Montrer :  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \frac{b+n-k}{s}$ . En déduire l'égalité :  $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}$ .

*Démonstration.*

- Notons tout d'abord qu'en  $n$  tirages, on peut piocher de 0 à  $n$  boules blanches.

On en déduit :  $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ .

- Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Si l'événement  $[X_n = k]$  est réalisé c'est qu'on a tiré  $k$  boules blanches au cours des  $n$  premiers tirages. On a donc également tiré  $(n-k)$  boules noires que l'on a toutes remplacées par des boules blanches.

Dans ce cas, l'événement  $B_{n+1}$  est réalisé si et seulement si on a tiré une boule blanche lors du  $(n+1)$ <sup>ème</sup> tirage dans une urne qui contient alors  $a-(n-k)$  boules noires et  $b+(n-k)$  boules blanches (ce qui est possible car  $n \leq a$ ).

Ainsi :  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \frac{b+n-k}{s}$ .

- La famille  $([X_n = k])_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est un système complet d'événements.  
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(B_{n+1}) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_n = k] \cap B_{n+1}) \\
 &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_n = k]) \mathbb{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) && \text{(car } \mathbb{P}([X_n = k]) \neq 0 \text{)} \\
 &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_n = k]) \frac{b+n-k}{s} && \text{(d'après le point précédent)} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{b+n}{s} \mathbb{P}([X_n = k]) - \frac{1}{s} \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X_n = k]) \\
 &= \frac{b+n}{s} \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_n = k]) - \frac{1}{s} \mathbb{E}(X_n) && \text{(par définition de l'espérance)} \\
 &= \frac{b+n}{s} \times 1 - \frac{1}{s} \mathbb{E}(X_n) && \text{(car } ([X_n = k])_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \text{ est un système complet d'événements)} \\
 &= \frac{b+n}{s} - \frac{1}{s} u_n && \text{(par définition de } u_n \text{)} \\
 &= \frac{b+n-u_n}{s}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}}$$

□

d) Soit  $n$  un entier naturel vérifiant  $n > a$ .

Si  $k \in \llbracket 0, n-a-1 \rrbracket$ , quel est l'événement  $[X_n = k]$  ?

Si  $k \in \llbracket n-a, n \rrbracket$ , justifier l'égalité :  $\mathbb{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \frac{b+n-k}{s}$ .

Montrer enfin que l'égalité :  $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}$  est encore vérifiée.

*Démonstration.*

- Si  $k \in \llbracket 0, n-a-1 \rrbracket$ , alors l'événement  $[X_n = k]$  est réalisé si et seulement si on a pioché  $k$  boules blanches lors des  $n$  premiers tirages. Cela signifie que l'on a pioché  $n-k$  boules noires.  
Or :

$$0 \leq k \leq n-a-1 \Leftrightarrow 0 \geq -k \geq -n+a+1 \Leftrightarrow n \geq n-k \geq \cancel{n} - \cancel{n} + a + 1$$

L'urne contient initialement  $a$  boules noires, il est donc impossible d'en piocher plus de  $a+1$ .

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in \llbracket 0, n-a-1 \rrbracket, [X_n = k] = \emptyset.}$$

- Si  $k \in \llbracket n-a, n \rrbracket$ .

Si l'événement  $[X_n = k]$  est réalisé, alors on a tiré  $k$  boules blanches au cours des  $n$  premiers tirages. On a donc également tiré  $(n-k)$  boules noires que l'on a toutes remplacées par des boules blanches. À la fin du  $n^{\text{ème}}$  tirage, l'urne contient donc  $a - (n-k)$  boules noires et  $b + (n-k)$  boules blanches. Ce qui est possible car :

$$n-a \leq k \leq n \Leftrightarrow -n+a \geq -k \geq -n \Leftrightarrow \cancel{n} - \cancel{n} + a \geq n-k \geq 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in \llbracket n-a, n \rrbracket, \mathbb{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \frac{b+n-k}{s}.}$$

- Comme, pour tout  $k \in \llbracket 0, n - a - 1 \rrbracket$ ,  $[X_n = k] = \emptyset$ , on en déduit :  $X(\Omega) = \llbracket n - a, n \rrbracket$ .  
Donc la famille  $([X_n = k])_{k \in \llbracket n - a, n \rrbracket}$  forme un système complet d'événements.

Ainsi, en appliquant la formule des probabilités totales sur ce système complet d'événements et avec les mêmes arguments qu'en question précédente, on obtient :

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{b + n - u_n}{s}$$

□

### 3. Calcul des nombres $u_n$ et $\mathbb{P}(B_n)$

- a) Soit  $n$  un entier naturel non nul. établir, pour tout entier  $k$  de l'intervalle  $[n + 1 - a, n]$  l'égalité :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = \frac{a - n + k}{s} \mathbb{P}([X_n = k]) + \frac{b + n - k + 1}{s} \mathbb{P}([X_n = k - 1])$$

Vérifier cette égalité pour  $k = n + 1$ ,  $k = n - a$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, n - a - 1 \rrbracket$ .

*Démonstration.*

- Soit  $k \in \llbracket n + 1 - a, n \rrbracket$ .  
La famille  $(B_{n+1}, \overline{B_{n+1}})$  est un système complet d'événements.  
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = \mathbb{P}([X_{n+1} = k] \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}([X_{n+1} = k] \cap \overline{B_{n+1}})$$

- Or :

× tout d'abord :

$$[X_{n+1} = k] \cap B_{n+1} = [X_n = k - 1] \cap B_{n+1}$$

× de plus :

$$[X_{n+1} = k] \cap \overline{B_{n+1}} = [X_n = k] \cap \overline{B_{n+1}}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) \\ &= \mathbb{P}([X_n = k - 1] \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}([X_n = k] \cap \overline{B_{n+1}}) \\ &= \mathbb{P}([X_n = k - 1]) \mathbb{P}_{[X_n = k - 1]}(B_{n+1}) + \mathbb{P}([X_n = k]) \mathbb{P}_{[X_n = k]}(\overline{B_{n+1}}) \quad (\text{car } (k - 1, k) \in (X_n(\Omega))^2 \\ & \quad \text{avec } X_n(\Omega) = \llbracket n - a, n \rrbracket) \\ &= \mathbb{P}([X_n = k - 1]) \frac{b + n - k + 1}{s} + \mathbb{P}([X_n = k]) (1 - \mathbb{P}_{[X_n = k]}(B_{n+1})) \quad (\text{d'après 2.d}) \\ &= \mathbb{P}([X_n = k - 1]) \frac{b + n - k + 1}{s} + \mathbb{P}([X_n = k]) \left(1 - \frac{b + n - k}{s}\right) \quad (\text{d'après 2.d}) \\ &= \frac{b + n - k + 1}{s} \mathbb{P}([X_n = k - 1]) + \mathbb{P}([X_n = k]) \frac{a - n + k}{s} \quad (\text{car } a = s - b) \end{aligned}$$

On en déduit, pour tout  $k \in \llbracket n - a, n \rrbracket$  :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = \frac{b + n - k + 1}{s} \mathbb{P}([X_n = k - 1]) + \frac{a - n + k}{s} \mathbb{P}([X_n = k]).$$

• Cas  $k = n + 1$ .

× D'une part, l'événement  $[X_{n+1} = n + 1]$  est réalisé si et seulement si on a tiré que des boules blanches. Donc :

$$[X_{n+1} = n + 1] = [X_n = n] \cap B_{n+1}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{n+1} = n + 1]) &= \mathbb{P}([X_n = n] \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}([X_n = n]) \mathbb{P}_{[X_n = n]}(B_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}([X_n = n]) \frac{b + \cancel{x} - \cancel{x}}{s} && \text{(d'après 2.d)} \\ &= \frac{b}{s} \mathbb{P}([X_n = n]) \end{aligned}$$

× D'autre part, comme  $[X_n = n + 1] = \emptyset$  :

$$\frac{a - n + (n + 1)}{s} \mathbb{P}(\cancel{[X_n = n + 1]}) + \frac{b + \cancel{x} - (\cancel{x} + \cancel{x}) + \cancel{x}}{s} \mathbb{P}([X_n = n]) = \frac{b}{s} \mathbb{P}([X_n = n])$$

L'égalité est toujours vérifiée pour  $k = n + 1$ .

• Cas  $k = n - a$ .

× D'une part, on a toujours :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = n - a]) = \mathbb{P}([X_n = n - a - 1] \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}([X_n = n - a] \cap \overline{B_{n+1}})$$

Or :

$$[X_n = n - a - 1] \cap B_{n+1} = \emptyset \cap B_{n+1} = \emptyset$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{n+1} = n - a]) &= \mathbb{P}([X_n = n - a] \cap \overline{B_{n+1}}) \\ &= \mathbb{P}([X_n = n - a]) \mathbb{P}_{[X_n = n - a]}(\overline{B_{n+1}}) \\ &= \mathbb{P}([X_n = n - a]) (1 - \mathbb{P}_{[X_n = n - a]}(B_{n+1})) \\ &= \mathbb{P}([X_n = n - a]) \left(1 - \frac{b + n - (n - a)}{s}\right) \\ &= \left(1 - \frac{a + b}{s}\right) \mathbb{P}([X_n = n - a]) \\ &= \cancel{(1 - 1)} \mathbb{P}([X_n = n - a]) = 0 \end{aligned}$$

× D'autre part :

$$\begin{aligned} &\frac{a - n + (n - a)}{s} \mathbb{P}([X_n = n - a]) + \frac{b + n - (n - a) + 1}{s} \mathbb{P}([X_n = n - a - 1]) \\ &= 0 \times \mathbb{P}([X_n = n - a]) + \frac{b + a + 1}{s} \times 0 = 0 \end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité est vérifiée car  $[X_n = n - a - 1] = \emptyset$ .

L'égalité est toujours vérifiée pour  $k = n - a$ .

- Cas  $k \in \llbracket 1, n - a - 1 \rrbracket$ .

× D'une part, l'événement  $[X_{n+1} = k]$  est réalisé si et seulement si on a pioché  $k$  boules blanches lors des  $(n + 1)$  premiers tirages. Cela signifie que l'on a pioché  $n - k$  boules noires. Or :

$$1 \leq k \leq n - a - 1 \Leftrightarrow -1 \geq -k \geq -n + a + 1 \Leftrightarrow n - 1 \geq n - k \geq \cancel{n} - \cancel{n} + a + 1$$

L'urne contient initialement  $a$  boules noires, il est donc impossible d'en piocher plus de  $a + 1$ . On en déduit :  $\forall k \in \llbracket 1, n - a - 1 \rrbracket, [X_{n+1} = k] = \emptyset$ . Donc :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = 0$$

× D'autre part, comme d'après **2.d)**  $[X_n = k] = \emptyset$  et  $[X_n = k - 1] = \emptyset$ , on a :

$$\frac{a - n + k}{s} \cancel{\mathbb{P}([X_n = n + 1])} + \frac{b + n - k + 1}{s} \cancel{\mathbb{P}([X_n = n])} = 0$$

L'égalité est vérifiée pour  $k \in \llbracket 1, n - a - 1 \rrbracket$ .

□

- b)** Calculer, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$  et de  $n$ .  
En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  appartient à l'ensemble  $A$  étudié dans la question ??.

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Par définition de  $u_{n+1} = \mathbb{E}(X_{n+1})$  :

$$\begin{aligned} & u_{n+1} \\ = & \sum_{k=0}^{n+1} k \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = \sum_{k=1}^{n+1} k \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) \\ = & \sum_{k=1}^{n+1} k \left( \frac{b + n - k + 1}{s} \mathbb{P}([X_n = k - 1]) + \frac{a - n + k}{s} \mathbb{P}([X_n = k]) \right) \quad (\text{d'après 3.a}) \\ = & \sum_{k=1}^{n+1} k \frac{b + n - k + 1}{s} \mathbb{P}([X_n = k - 1]) + \sum_{k=1}^{n+1} k \frac{a - n + k}{s} \mathbb{P}([X_n = k]) \\ = & \sum_{k=0}^n (k + 1) \frac{b + n - k}{s} \mathbb{P}([X_n = k]) + \sum_{k=1}^{n+1} k \frac{a - n + k}{s} \mathbb{P}([X_n = k]) \quad (\text{par décalage d'indice}) \\ = & \sum_{k=0}^n k \frac{b + n - k}{s} \mathbb{P}([X_n = k]) + \sum_{k=0}^n \frac{b + n - k}{s} \mathbb{P}([X_n = k]) \\ & + \sum_{k=1}^n k \frac{a - n + k}{s} \mathbb{P}([X_n = k]) + (n + 1) \frac{a + 1}{s} \mathbb{P}([X_n = n + 1]) \\ = & \sum_{k=0}^n k \frac{b + n - k}{s} \mathbb{P}([X_n = k]) + \sum_{k=0}^n \frac{b + n - k}{s} \mathbb{P}([X_n = k]) \\ & + \sum_{k=0}^n k \frac{a - n + k}{s} \mathbb{P}([X_n = k]) \quad (\text{car } [X_n = n + 1] = \emptyset) \\ = & \sum_{k=0}^n k \left( \frac{b + n - k}{s} + \frac{a - n + k}{s} \right) \mathbb{P}([X_n = k]) + \mathbb{P}(B_{n+1}) \end{aligned}$$

En effet, d'après les questions **2.c)** et **2.d)** :

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{b + n - k}{s} \mathbb{P}([X_n = k])$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= \sum_{k=0}^n k \frac{a+b}{s} \mathbb{P}([X_n = k]) + \frac{b+n-u_n}{s} \quad (\text{d'après 2.d}) \\
 &= \sum_{k=0}^n k \frac{s}{s} \mathbb{P}([X_n = k]) + \frac{b+n-u_n}{s} \\
 &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X_n = k]) + \frac{b+n-u_n}{s} \\
 &= \mathbb{E}(X_n) + \frac{b+n-u_n}{s} \\
 &= u_n + \frac{b+n-u_n}{s}
 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{s-1}{s} u_n + \frac{b+n}{s}$$

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

En multipliant par  $s$  l'égalité précédente, on obtient :

$$s u_{n+1} = (s-1)u_n + b+n$$

La suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  appartient à  $A$ . □

- c) Donner, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , les valeurs de  $u_n$  et de  $\mathbb{P}(B_{n+1})$  en fonction de  $b$ ,  $s$  et  $n$ .

*Démonstration.*

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après la question 1.b) :

$$u_n = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} (u_1 - 1 - b + s) + n + b - s$$

$$\text{D'après 2.a) : } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} \left(\frac{b}{s} - 1 - b + s\right) + n + b - s.$$

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après les questions 2.c) et 2.d) :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(B_{n+1}) &= \frac{b+n-u_n}{s} \\
 &= \frac{1}{s} \left( \cancel{b+n} - \left( \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} (u_1 - 1 - b + s) + \cancel{n+b-s} \right) \right) \quad (\text{d'après le point précédent}) \\
 &= -\frac{1}{s} \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} \left(\frac{b}{s} - 1 - b + s\right) + 1
 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(B_{n+1}) = 1 - \frac{1}{s} \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} \left(\frac{b}{s} - 1 - b + s\right)$$
□

d) Quelles sont les limites des suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(\mathbb{P}(B_n))_{n \geq 1}$  ?

*Démonstration.*

- La suite  $\left( \left( \frac{s-1}{s} \right)^{n-1} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite géométrique de raison  $\frac{s-1}{s}$  avec  $\left| \frac{s-1}{s} \right| < 1$ .

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{s-1}{s} \right)^{n-1} = 0$$

- De plus  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + b - s = +\infty$ .

On en déduit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

- Enfin :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_{n+1}) = 1 - \frac{1}{s} \times 0 \times \left( \frac{b}{s} - 1 - b + s \right) = 1 - 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_{n+1}) = 1$$

□