
DS4 (version A)

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On note id l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^3 .

1. a) Démontrer : $(A - I_3)^2 (A - 3I_3) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

b) En déduire les valeurs propres possibles de f .

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .

On précisera la dimension des sous-espaces propres.

En particulier, on écrira : $\text{Ker}(f - 3\text{id}) = \text{Vect}(w)$ où w est un vecteur de \mathbb{R}^3 de première coordonnée 1.

d) L'endomorphisme f est-il bijectif?

L'endomorphisme f est-il diagonalisable?

2. Pour tout endomorphisme $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, on rappelle que l'on note g^2 l'endomorphisme défini par :

$$g^2 = g \circ g$$

a) Démontrer : $\text{Ker}(f - \text{id}) \subset \text{Ker}((f - \text{id})^2)$.

b) Démontrer : $\text{Ker}((f - \text{id})^2) = \text{Vect}(u, v)$ où $u = (0, 1, 1)$ et $v = (1, 0, 1)$.

3. a) Démontrer que la famille (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 .

Dans la suite, on notera \mathcal{B}' cette base.

b) On note $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Déterminer T .

c) On note P la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' .

Déterminer l'inverse de P .

d) Rappeler la formule liant les matrices A , T et P .

4. a) On note : $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exprimer T en fonction de J et N .

b) À l'aide de la formule du binôme, démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, T^n = J^n - 4nN$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer A^n .

5. a) Démontrer que A est inversible et déterminer son inverse.

b) La formule démontrée en 4.c) est-elle valable pour $n = -1$?

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0, 1[$ et on pose $q = 1 - p$. On dispose d'une pièce donnant Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité q . On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- × soit si l'on a obtenu Pile,
- × soit si l'on a obtenu n fois Face.

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k l'événement « on obtient Pile (respectivement Face) au $k^{\text{ème}}$ lancer ».

On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de Pile obtenus et enfin Y_n le nombre de Face obtenus. On admet que T_n , X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. Loi de T_n .

- a) Pour tout k de $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, déterminer, en distinguant le cas $k = 1$, la probabilité $\mathbb{P}([T_n = k])$.
- b) Déterminer $\mathbb{P}([T_n = n])$.
- c) Vérifier : $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}([T_n = k]) = 1$.
- d) Établir que T_n possède une espérance et vérifier : $\mathbb{E}(T_n) = \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

2. Loi de X_n .

- a) Donner la loi de X_n .
- b) Vérifier : $\mathbb{E}(X_n) = 1 - q^n$.

3. Loi de Y_n .

- a) Déterminer, pour tout k de $\llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, la probabilité $\mathbb{P}([Y_n = k])$.
- b) Déterminer $\mathbb{P}([Y_n = n])$.
- c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n , puis en déduire $\mathbb{E}(Y_n)$.

4. (CUBES uniquement - admis pour les autres)

Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire T dont on donnera la loi.

5. Simulation informatique.

On rappelle que l'appel `grand(1,1,'bin',1,p)` renvoie une réalisation d'une v.a.r. suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . Compléter les quatre instructions manquantes pour que le programme suivant simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus et pour qu'il affiche, dans cet ordre, les valeurs prises par les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n , à l'exécution de l'instruction `disp([t, x, y])`.

```

1  p = input('Entrez un reel p :')
2  n = input('Entrez un entier n :')
3  t = 0 ; x = 0 ; y = 0 ;
4  while (x == 0) & (t < n)
5      -----
6      if lancer == 0 then
7          -----
8          -----
9      else
10         -----
11     end
12 end
13 disp([t, x, y])

```

Exercice 3

- Si k est un entier naturel non nul, alors pour tout endomorphisme f d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E :
 - × on note $f^k = f \circ f \circ \dots \circ f$ (où l'endomorphisme f apparaît k fois dans cette composition),
 - × on pose $f^0 = \text{id}_E$, où id_E est l'endomorphisme identité de E .
- On dit que l'endomorphisme f est nilpotent d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si :

$$f^k = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad f^{k-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$$

- Enfin, on note I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si :

$$A^k = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad A^{k-1} \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

(avec la convention $A^0 = I_2$).

Partie 1

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $A^2 - (a+d)A$ en fonction de I_2 .
2. On suppose dans cette question que A est nilpotente d'indice k .
 - a) Établir l'égalité : $ad - bc = 0$.
 - b) Montrer que k est supérieur ou égal à 2.
 - c) En déduire alors : $a + d = 0$.
3. Conclure : A nilpotente $\Leftrightarrow A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

Partie 2

Dans cette partie, f désigne un endomorphisme non nul d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension 2.

4. a) Montrer que, si $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$, alors on a : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 - b) On suppose : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.
Établir alors : $\text{rg}(f) = 1$ puis conclure : $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.
 - c) En déduire, à l'aide de la **Partie 1**, l'équivalence : f est nilpotent $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.
- On suppose dans toute la suite que f est nilpotent d'indice 2 et on en étudie quelques propriétés.
5. a) L'endomorphisme f est-il bijectif?
 - b) Déterminer les valeurs propres possibles de f . En déduire $\text{Sp}(f)$.
 - c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable?
 6. Montrer qu'il existe une base (e'_1, e'_2) de E telle que : $\text{Mat}_{(e'_1, e'_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 7. On souhaite montrer par l'absurde qu'il est impossible de trouver deux endomorphismes u et v de E , nilpotents et tels que $f = u \circ v$. On suppose donc que ces deux endomorphismes existent.
 - a) Montrer les inclusions : $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(f)$.
 - b) En déduire les égalités : $\text{Im}(f) = \text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(v) = \text{Ker}(f)$.
 - c) En déduire l'égalité : $\text{Ker}(u) = \text{Im}(v)$.
 - d) Conclure.

Problème

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité p , élément de $]0, 1[$, et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

Partie 1 : un jeu naïf

Deux joueurs A et B s'affrontent lors de lancers de ces pièces de la façon suivante, les lancers de chaque pièce étant supposés indépendants :

Pour la première manche, A et B lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.

Pour tout k de \mathbb{N}^* , on note X_k (resp. Y_k) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du 1^{er} pile par A (resp. par B) lors de la $k^{\text{ème}}$ manche.

On note, toujours pour k dans \mathbb{N}^* , E_k l'événement « Il y a égalité à la fin de la $k^{\text{ème}}$ manche ».

On note E l'événement « Il y a perpétuellement égalité ».

On note G (resp. H) l'événement « A (resp. B) gagne à ce jeu », et pour tout entier naturel n non nul, on note G_n (resp. H_n) l'événement « A (resp. B) gagne le jeu à la $n^{\text{ème}}$ manche ».

1. Étude de la première manche.

a) Donner la loi commune à X_1 et Y_1 . En déduire qu'il est quasi-impossible que la première manche dure éternellement. On admet alors qu'il en est de même pour chaque manche jouée.

b) Écrire l'événement E_1 à l'aide des variables X_1 et Y_1 .

c) Montrer que $\mathbb{P}(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i]) \mathbb{P}([Y_1 = i])$ et en déduire l'expression explicite de $\mathbb{P}(E_1)$ en fonction de p et q .

d) Justifier sans aucun calcul que les événements G_1 et H_1 sont équiprobables. En déduire la probabilité de G_1 en fonction de p et q .

2. Calcul de la probabilité de l'événement G .

a) Écrire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'événement G_n à l'aide des événements E_k et de l'événement $[X_n \leq Y_n]$.

b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, calculer $\mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}(E_k)$ puis en déduire :

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbb{P}(G_n) = \left(\frac{p}{1+q} \right)^{n-1} \frac{q}{1+q}$$

c) Vérifier que le résultat précédent reste valable pour $n = 1$.

d) Exprimer G en fonction des G_n puis conclure, après calcul : $\mathbb{P}(G) = \frac{1}{2}$.

e) Expliquer comment obtenir la probabilité de l'événement H : « B gagne à ce jeu » et en déduire que le ce jeu a presque sûrement une fin, c'est à dire que $\mathbb{P}(E) = 0$.

Partie 2 : un autre jeu

En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et B parie le contraire.

3. a) À l'aide du système complet d'événements $([X_1 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$, démontrer : $\mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1]) = \frac{pq}{1+q}$.

- b) En déduire la probabilité u que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart.
4. a) Utiliser les événements E_k pour écrire l'événement K_n « l'un des deux joueurs gagne à la $n^{\text{ème}}$ manche par un lancer d'écart », ceci pour tout n de \mathbb{N}^* .
- b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $\mathbb{P}(K_n)$.
5. Donner finalement la probabilité de l'événement K : « A gagne ce pari ».

Partie 3 : informatique

On rappelle que la commande `grand(1, 1, 'geom', p)` permet à **Scilab** de simuler une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p .

6. Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné.

```
1  p = input('entrez une valeur pour p : ')
2  c = 1
3  X = grand(1, 1, 'geom', p)
4  Y = grand(1, 1, 'geom', p)
5  while X == Y
6      X = ----
7      Y = ----
8      c = ----
9  end
10 if X < Y then ----
11     else ----
12 end
13 disp(c)
```

7. Compléter la commande suivante afin qu'une fois ajoutée au script précédent elle permette de simuler le deuxième jeu et d'en donner le nom du vainqueur.

```
11 if ----- then disp('A gagne le deuxième jeu') else ----- end
```