DS5 (version A)

Exercice 1

Soit $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On note I_3 la matrice identité de E et 0_3 la matrice nulle de E.
Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices M de E vérifiant l'égalité :

$$M\,(M+I_3)\,(M+2\,I_3) \;=\; 0_3$$

Partie A : Exemple de matrices appartenant à $\mathscr{A}$

1. Déterminer l'ensemble des réels α tels que : $\alpha\, I_3 \in \mathscr{A}$.

2. L'ensemble $\mathscr{A}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

3. On note $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- ***a)*** On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $B\,X_1$ et $B\,X_2$.
- ***b)*** En déduire deux valeurs propres de B.
  Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres associés.
- ***c)*** Démontrer que B est diagonalisable, et expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que : $B = PDP^{-1}$.
- ***d)*** Démontrer que $D \in \mathscr{A}$, puis que $B \in \mathscr{A}$.

4. Plus généralement, on suppose que M est une matrice de E diagonalisable, que le spectre de M soit inclus dans $\{0, -1, -2\}$.
Démontrer : $M \in \mathscr{A}$.

Partie B : Diagonalisabilité des matrices de $\mathscr{A}$

Soit M une matrice appartenant à $\mathscr{A}$. On note $\mathrm{Sp}(M)$ le spectre de M.

5. Déterminer un polynôme annulateur de M, et démontrer que le spectre de M est inclus dans $\{0, -1, -2\}$.

6. On suppose dans cette question que M admet 0, -1 et -2 comme valeurs propres.
Justifier que M est diagonalisable.

7. ***a)*** On suppose dans cette question que -1 est l'unique valeur propre de M.
Justifier que M et $M + 2\,I_3$ sont inversibles, puis démontrer : $M = -I_3$.

- ***b)*** Que peut-on dire de M si $\mathrm{Sp}(M) = \{-2\}$? Si $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$?

8. On suppose dans cette question que M n'admet aucune valeur propre.
Justifier que les matrices M, $M + I_3$ et $M + 2\,I_3$ sont inversibles. Aboutir à une contradiction.

9. Dans cette question, on suppose que M admet exactement deux valeurs propres distinctes.
On traite ici le cas où $\mathrm{Sp}(M) = \{-1, -2\}$ (et on admet que dans les autres situations, le résultat serait similaire).
On veut démontrer par l'absurde que la matrice M est diagonalisable, et on suppose donc que M ne l'est pas. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est M. On note enfin id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

a) Démontrer :

$$(f + \mathrm{id}) \circ (f + 2\,\mathrm{id}) \; = \; 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)} \qquad \text{et} \qquad (f + 2\,\mathrm{id}) \circ (f + \mathrm{id}) \; = \; 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$$

b) Démontrer : $\dim\big(\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})\big) \geqslant 1$ et $\dim\big(\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{id})\big) \geqslant 1$.

c) En utilisant que M n'est pas diagonalisable, démontrer :

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})\big) \; = \; 1 \qquad \text{et} \qquad \dim\big(\mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{id})\big) \; = \; 1$$

d) Soit u un vecteur propre de f associé à la valeur propre -1.
Soit v un vecteur propre de f associé à la valeur propre -2.

(i) Justifier que (u, v) forme une famille libre dans $\mathbb{R}^3$.

(ii) Soit w un vecteur de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}\,(u, v)$.
Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

(iii) En utilisant le fait que $\Big((f + \mathrm{id}) \circ (f + 2\,\mathrm{id})\Big)(w) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $\Big((f + 2\,\mathrm{id}) \circ (f + \mathrm{id})\Big) = 0_{\mathbb{R}^3}$, montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$f(w) + 2\,w \; = \; \alpha\,u \qquad \text{et} \qquad f(w) + w \; = \; \beta\,v$$

En déduire que w est une combinaison linéaire de u et v, et aboutir à une contradiction.

10. Montrer alors que pour tout matrice M de E :

$$M \in \mathscr{A} \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$$

Exercice 2

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose, si ces intégrales convergent :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt, \qquad J_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt, \qquad \text{et} \qquad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt$$

Partie A

Dans cette partie, on fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

1. ***a)*** Démontrer : $\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$.

b) Démontrer : $\forall y \in \,]0,1]$, $\displaystyle\int_y^1 \ln(t)\, dt = -1 + y - y\ln(y)$.

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\, dt$ converge et déterminer sa valeur.

c) Démontrer que l'intégrale définissant J_n converge.

2. ***a)*** Calculer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \left(t^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(t)}{1+t^n} \right)$.

b) En déduire la nature de l'intégrale définissant K_n.

3. Quelle est la nature de l'intégrale définissant I_n ?

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. ***a)*** Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\forall t \in \,]0,1], \qquad 0 \leqslant \frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leqslant -t^n \ln(t)$$

b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^n \ln(t)\, dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

c) Déduire des questions précédentes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = -1$.

5. ***a)*** Démontrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant \ln(x) \leqslant x$.
En déduire que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 :

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{x^{n-1}}$$

b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $0 \leqslant K_n \leqslant \dfrac{1}{n-2}$.

c) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n$, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Partie C

L'objectif de cette partie est d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale J_n à l'aide de **Scilab**.

5. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et y un réel de $]0,1]$.
À l'aide du changement de variable : $u = -\ln(t)$, démontrer :

$$\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt \;=\; \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\, \mathrm{e}^{-u}\, du$$

6. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

a) Donner une densité de X.

b) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose : $Y_n = \dfrac{-X}{1+\mathrm{e}^{-n\,X}}$.
Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, Y_n admet une espérance, et : $\mathbb{E}(Y_n) = J_n$.

7. On rappelle qu'en langage **Scilab**, l'instruction `grand(1, 1, 'exp', 1)` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
Recopier et compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument deux entiers n et m, et qui renvoie une matrice à une ligne et m colonnes dont chaque coefficient est une simulation de la réalisaion de Y_n.

```
function Y = simulY(n, m)
    Y = zeros(..., ...)
    for i = ........
        X = grand(1, 1, 'exp', 1)
        Y(i) = ........
    end
endfunction
```

8. ***a)*** `(CUBES uniquement)` Énoncer la loi faible des grands nombres.

b) `(CUBES uniquement)` On tape dans **Scilab** le script suivant :

```
n = input(' Entrer la valeur de n')
disp( mean( simulY(n, 1000) ) )
```

Expliquer ce que fait ce script dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. ***a)*** Vérifier que la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} \, \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire Y.

b) On note F la fonction de répartition de Y. Déterminer $F(x)$ selon que $x > 0$ ou $x \leqslant 0$.

2. ***a)*** Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X.

b) On note G la fonction de répartition de X. Déterminer $G(x)$ selon que $x \geqslant 1$ ou $x < 1$.

3. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X.
Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) On note G_n la fonction de répartition de M_n. Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction G puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de x.

b) On pose $Y_n = \dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la fonction de répartition F_n de Y_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) \ = \ \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

4. Déterminer, pour tout réel x négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. ***a)*** Soit x un réel strictement positif. Vérifier que, dès que n est supérieur strictement à la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$.

b) Donner un équivalent de $\ln(1+u)$ lorsque u est au voisinage de 0, puis en déduire, pour tout réel x strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. `(CUBES uniquement)` Conclure que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de Y.