DS5 (version A)

Exercice 1 (ECRICOME 2021)

Soit $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On note I_3 la matrice identité de E et 0_3 la matrice nulle de E.
Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices M de E vérifiant l'égalité :

$$M\,(M + I_3)\,(M + 2\,I_3) \;=\; 0_3$$

Partie A : Exemple de matrices appartenant à $\mathscr{A}$

1. Déterminer l'ensemble des réels α tels que : $\alpha\, I_3 \in \mathscr{A}$.

Démonstration.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\alpha\, I_3 \in \mathcal{A} \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha\, I_3\ (\alpha\, I_3 + I_3)\ (\alpha\, I_3 + 2\, I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\
&\Leftrightarrow \quad (\alpha\, I_3) \times \big((\alpha+1)\, I_3\big) \times \big((\alpha+2)\, I_3\big) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\, I_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2) = 0 \qquad \textit{(car I_3 inversible)} \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \ \texttt{OU}\ \alpha = -1 \ \texttt{OU}\ \alpha = -2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que l'ensemble des réels } \alpha \text{ tels que } \alpha\, I_3 \in \mathscr{A} \text{ est : } \{0, -1, -2\}.}$$

□

2. L'ensemble $\mathscr{A}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Démonstration.
D'après la question précédente : $-I_3 \in \mathscr{A}$.
Cependant, toujours d'après la question précédente : $-(-I_3) = I_3 \notin \mathscr{A}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'ensemble } \mathscr{A} \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } E.}$$

Commentaire

- Lorsqu'on résultat à démontrer est formulé sous forme d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général), on pensera, dans une majorité de cas à répondre par la négative. À titre d'illustration, lorsqu'on rencontre les questions :
  - × « L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de E ? »
  - × « Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ? »
  - × « La v.a.r. X admet-elle une variance ? »
  - × « La matrice A est-elle diagonalisable ? »
  - × « La suite (u_n) est-elle majorée ? »

  la réponse est, généralement, « non » (à justifier évidemment).

Commentaire

- Pour montrer qu'un ensemble F n'est pas un sous-espace vectoriel de E, on pourra, dans cet ordre :
  1) vérifier : $0_E \notin F$ (si $0_E \in F$, on essaie de vérifier le point suivant)
  2) exhiber un vecteur $u \in F$ tel que $-u \notin F$ (si on ne parvient pas à trouver un tel vecteur u, on essaie de démontrer le point suivant)
  3) exhiber deux vecteurs $(u, v) \in F^2$ tels que $u + v \notin F$

$\square$

3. On note $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $B\,X_1$ et $B\,X_2$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$B\,X_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\,X_1$$

$$\boxed{B\,X_1 = -2\,X_1}$$

- Ensuite :

$$B\,X_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -X_2$$

$$\boxed{B\,X_2 = -X_2}$$

$\square$

b) En déduire deux valeurs propres de B.
Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres associés.

Démonstration.

- On sait :
  × $X_1 \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$,
  × $B\,X_1 = -2\,X_1$.

  On en déduit que -2 est valeur propre de B
  (et X_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre -2).

- On a aussi :
  × $X_2 \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$,
  × $B\,X_2 = -X_2$.

  On en déduit que -1 est valeur propre de B
  (et X_2 est un vecteur propre associé à la valeur propre -1).

- Déterminons $E_{-2}(B)$ le sous-espace propre de B associé à la valeur propre -2.
  Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
U \in E_{-2}(B) & \Longleftrightarrow & (B + 2\, I_3)\, U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[4pt]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[4pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \Longleftrightarrow & \{\ x = y - z
\end{array}$$

  On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-2}(B) & = & \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid B\,U = -2\,U\} \ = \ \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y - z\} \\[4pt]
& = & \{\begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \ = \ \{y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\[4pt]
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

- La famille $\mathcal{F}_{-2} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :
  × génératrice de $E_{-2}(B)$,
  × libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

$$\boxed{\text{Ainsi } \mathcal{F}_{-2} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_{-2}(B).}$$

- Déterminons $E_{-1}(B)$ le sous-espace propre de B associé à la valeur propre -1.

  Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
U \in E_{-1}(B) & \Longleftrightarrow & (B + I_3)\, U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} & - & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_1 \leftarrow L_3}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & 0 \\ x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 0 \\ & - & y & = & -z \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & z \\ & - & y & = & -z \end{array} \right. \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & z \\ & & y & = & z \end{array} \right.
\end{array}$$

  On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-1}(B) & = & \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid B\,U = -U\} \ = \ \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y = z \} \\[2mm]
& = & \{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \} \ = \ \{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \\[2mm]
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \ = \ \mathrm{Vect}\,(X_2)
\end{array}$$

- La famille $\mathcal{F}_{-1} = (X_2)$ est :
  - × génératrice de $E_{-1}(B)$,
  - × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi } \mathcal{F}_{-1} = (X_2) \text{ est une base de } E_{-1}(B).}$$

Commentaire

- On pouvait, dès la fin de la détermination de $\mathcal{F}_2$ conclure quant à la diagonalisabilité de B et déterminer une base de $\mathcal{F}_{-1}$ sans calcul supplémentaire. Détaillons cette rédaction.
  - × La famille $\mathcal{F}_{-2}$ est une base de $E_{-2}(B)$. D'où :
  $$\dim\big(E_{-2}(B)\big) \ = \ \text{Card}(\mathcal{F}_{-2}) \ = \ 2$$
  - × De plus, comme X_2 est un vecteur propre de B associé à la valeur propre -1 : $\text{Vect}\,(X_2) \subset E_{-1}(B)$. En particulier :
  $$\dim\big(E_{-1}(B)\big) \ \geqslant \ \dim\big(\text{Vect}\,(X_2)\,\big) = 1$$
  - × On sait alors :
    - d'une part :
    $$\dim\big(E_{-2}(B)\big) + \dim\big(E_{-1}(B)\big) \ \geqslant \ 3$$
    - d'autre part, comme B est une matrice carrée d'ordre 3 :
    $$\dim\big(E_{-2}(B)\big) + \dim\big(E_{-1}(B)\big) \ \leqslant \ 3$$

    Ainsi : $\dim\big(E_{-2}(B)\big) + \dim\big(E_{-1}(B)\big) = 3$. On en conclut que :
    - $\text{Sp}(B) = \{-2, -1\}$ (la matrice B n'admet pas d'autres valeurs propres que -2 et -1).
    - la matrice B est diagonalisable.
    - $\dim\big(E_{-1}(B)\big) = 1$.
  - × La famille (X_2) est donc :
    - une famille libre de $E_{-1}(B)$ car constituée uniquement d'un vecteur non nul de $E_{-1}(B)$,
    - telle que : $\text{Card}\,\big((X_2)\big) = 1 = \dim\big(E_{-1}(B)\big)$

    C'est donc une base de $E_{-1}(B)$.
- Ce n'est cependant pas la méthode que l'on choisit de présenter puisque la démonstration de la diagonalisabilité de B est demandée seulement en question suivante.

□

c) Démontrer que B est diagonalisable, et expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que : $B = PDP^{-1}$.

Démonstration.

- La famille $\mathcal{F}_{-2}$ est une base de $E_{-2}(B)$. D'où :
$$\dim\big(E_{-2}(B)\big) \ = \ \text{Card}(\mathcal{F}_{-2}) \ = \ 2$$
De même, la famille $\mathcal{F}_{-1}$ est une base de $E_{-1}(B)$. D'où :
$$\dim\big(E_{-1}(B)\big) \ = \ \text{Card}(\mathcal{F}_{-1}) \ = \ 1$$
On en déduit :
$$\dim\big(E_{-2}(B)\big) + \dim\big(E_{-1}(B)\big) \ = \ 3$$

Comme B est une matrice carrée d'ordre 3, on en déduit que B est diagonalisable.

- Il existe donc une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que : $B = P\,D\,P^{-1}$. Plus précisément :
  - × la matrice P est obtenue par concaténation de bases de sous-espaces propres de B,
  - × la matrice D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de B (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).

$$\boxed{\text{En posant } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ on a donc : } B = P\,D\,P^{-1}.}$$

□

d) Démontrer que $D \in \mathscr{A}$, puis que $B \in \mathscr{A}$.

Démonstration.

- On calcule :

$$(D + I_3)\,(D + 2\,I_3) \; = \; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Ainsi :

$$D\,(D + I_3)\,(D + 2\,I_3) \; = \; D \times 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \; = \; 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } D \in \mathscr{A}.}$$

- D'après le point précédent : $D\,(D + I_3)\,(D + 2\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Or :

$$D\,(D + I_3)\,D + 2\,I_3) \; = \; (D^2 + D)\,(D + 2\,I_3) \; = \; D^3 + 3\,D^2 + 2\,D$$

  De plus, d'après la question précédente : $B = PDP^{-1}$. Donc : $D = P^{-1}BP$. D'où :

$$(P^{-1}BP)^3 + 3\,(P^{-1}BP)^2 + 2\,(P^{-1}BP) \; = \; 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

- Or, par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(P^{-1}\,B\,P)^n = P^{-1}\,B^n\,P$. En particulier :

$$\begin{array}{llcll} & P^{-1}\,B^3\,P + 3\,P^{-1}\,B^2\,P + 2\,P^{-1}\,B\,P & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \\ \text{donc} & P^{-1}\,(B^3 + 3\,B^2 + 2\,B)\,P & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \\ \text{d'où} & (B^3 + 3\,B^2 + 2\,B)\,P & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \textit{(en multipliant à gauche par } P\textit{)} \\ \text{ainsi} & B^3 + 3\,B^2 + 2\,B & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \textit{(en multipliant à droite par } P^{-1}\textit{)} \\ \text{alors} & B\,(B + I_3)\,(B + 2\,I_3) & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \textit{(en effectuant le même calcul qu'au point précédent)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } B \in \mathscr{A}.}$$

□

4. Plus généralement, on suppose que M est une matrice de E diagonalisable, que le spectre de M soit inclus dans $\{0,-1,-2\}$.
Démontrer : $M \in \mathscr{A}$.

Démonstration.

- Comme la matrice M est diagonalisable, il existe :
  - × une matrice R inversible,
  - × une matrice Δ diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M,

  telles que : $M = R\,\Delta\,R^{-1}$.
  On remarque que, si on parvient à démontrer que $\Delta \in \mathscr{A}$, alors, avec le même raisonnement qu'en question précédente, on pourra conclure : $M \in \mathscr{A}$.
- On a supposé : $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0,-1,-2\}$. Il existe donc $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \{0,-1,-2\}^3$ tel que :

$$\Delta \ = \ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

- Démontrons : $\Delta \in \mathscr{A}$.
  - × Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \Delta\,(\Delta + I_3)\,(\Delta + 2\,I_3) \ &= \ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1+1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1+2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2+2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3+2 \end{pmatrix} \\ &= \ \begin{pmatrix} \lambda_1\,(\lambda_1+1)\,(\lambda_1+2) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2\,(\lambda_2+1)\,(\lambda_2+2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\,(\lambda_3+1)\,(\lambda_3+2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  - × Soit $i \in [\![1,3]\!]$. Par définition de λ_i, on a : $\lambda_i \in \{0,-1,-2\}$. D'où :

$$\lambda_i = 0 \ \texttt{OU} \ \lambda_i + 1 = 0 \ \texttt{OU} \ \lambda_i + 2 = 0$$

    Donc : $\lambda_i\,(\lambda_i+1)\,(\lambda_i+2) = 0$.

  On en conclut : $\Delta\,(\Delta + I_3)\,(\Delta + 2\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. D'où : $\Delta \in \mathscr{A}$.

$$\boxed{\text{En raisonnant comme dans les 2 derniers points de la question précédente, on obtient : } M \in \mathscr{A}.}$$

□

Partie B : Diagonalisabilité des matrices de $\mathscr{A}$

Soit M une matrice appartenant à $\mathscr{A}$. On note $\mathrm{Sp}(M)$ le spectre de M.

5. Déterminer un polynôme annulateur de M, et démontrer que le spectre de M est inclus dans $\{0,-1,-2\}$.

Démonstration.

- Comme $M \in \mathscr{A}$, alors :

$$M\,(M + I_3)\,(M + 2\,I_3) \ = \ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

$$\boxed{\text{Le polynôme } Q(X) = X\,(X+1)\,(X+2) \text{ est donc un polynôme annulateur de } M.}$$

- Ainsi : $\mathrm{Sp}(M) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0,-1,-2\}$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) \subset \{0,-1,-2\}}$$

Commentaire

- Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul Q.
  On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si Q est un polynôme annulateur de M alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, Q$ est toujours un polynôme annulateur de M puisque :
  $$(\alpha\, Q)(M) \;=\; \alpha\, Q(M) \;=\; 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
  Cela suffit à démontrer que M possède une infinité de polynômes annulateurs.
  On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur de M puisqu'on a alors :
  $$R(M) \;=\; (M - 5\, I_3)\, Q(M) \;=\; 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
  Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de M. Si c'était le cas, M aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

□

6. On suppose dans cette question que M admet 0, -1 et -2 comme valeurs propres.
Justifier que M est diagonalisable.

Démonstration.
On sait :

× $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,

× M possède 3 valeurs propres distinctes.

$$\boxed{\text{On en déduit que } M \text{ est diagonalisable.}}$$

□

7. a) On suppose dans cette question que -1 est l'unique valeur propre de M.
Justifier que M et $M + 2\, I_3$ sont inversibles, puis démontrer : $M = -I_3$.

Démonstration.

- Comme -1 est l'unique valeur propre de M, alors 0 et -2 ne sont pas valeurs propres de M.
  $$\boxed{\text{On en déduit que } M \text{ et } M + 2\, I_3 \text{ sont inversibles.}}$$
- Comme $M \in \mathscr{A}$:
  $$\begin{array}{rrcll} & M\,(M+I_3)\,(M+2\,I_3) & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \\ \text{donc} & (M+I_3)\,(M+2\,I_3) & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \textit{(en multipliant à gauche par } M^{-1}\textit{)} \\ \text{d'où} & M+I_3 & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \textit{(en multipliant à droite par } (M+2\,I_3)^{-1}\textit{)} \end{array}$$
  $$\boxed{\text{Finalement : } M = -I_3.}$$

□

b) Que peut-on dire de M si $\mathrm{Sp}(M) = \{-2\}$? Si $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$?

Démonstration.

- Si $\mathrm{Sp}(M) = \{-2\}$, alors M et $M + I_3$ sont inversibles.
  Comme $M \in \mathscr{A}$, on a toujours : $M\,(M+I_3)\,(M+2\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

  $\boxed{\text{En multipliant à gauche l'égalité successivement par } M^{-1} \text{ puis } (M+I_3)^{-1}\text{, on obtient : } M = -2\,I_3.}$

- Si $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$, alors $M + I_3$ et $M + 2\,I_3$ sont inversibles.
  Comme $M \in \mathscr{A}$, on a toujours : $M\,(M+I_3)\,(M+2\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

  $\boxed{\text{En multipliant à droite l'égalité successivement par } (M+2\,I_3)^{-1} \text{ puis } (M+I_3)^{-1}\text{, on obtient : } M = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$

□

8. On suppose dans cette question que M n'admet aucune valeur propre.
Justifier que les matrices M, $M + I_3$ et $M + 2\,I_3$ sont inversibles. Aboutir à une contradiction.

Démonstration.

- Comme M n'admet aucune valeur propre, alors 0, -1 et -2 ne sont pas valeurs propres de M.

  $\boxed{\text{On en déduit que } M,\ M+I_3 \text{ et } M+2\,I_3 \text{ sont inversibles.}}$

- Comme $M \in \mathscr{A}$:

$$\begin{array}{lrcll} & M\,(M+I_3)\,(M+2\,I_3) & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \\ \text{donc} & (M+I_3)\,(M+2\,I_3) & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \textit{(en multipliant à gauche par } M^{-1}\textit{)} \\ \text{d'où} & M+2\,I_3 & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \textit{(en multipliant à gauche par } (M+I_3)^{-1}\textit{)} \\ \text{ainsi} & I_3 & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \textit{(en multipliant par } (M+2\,I_3)^{-1}\textit{)} \end{array}$$

Absurde !

$\boxed{\text{On en déduit que } M \text{ admet au moins une valeur propre.}}$

□

9. Dans cette question, on suppose que M admet exactement deux valeurs propres distinctes.
On traite ici le cas où $\mathrm{Sp}(M) = \{-1, -2\}$ (et on admet que dans les autres situations, le résultat serait similaire).
On veut démontrer par l'absurde que la matrice M est diagonalisable, et on suppose donc que M ne l'est pas. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est M. On note enfin id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

a) Démontrer :

$$(f + \mathrm{id}) \circ (f + 2\,\mathrm{id}) \ = \ 0 \qquad \text{et} \qquad (f + 2\,\mathrm{id}) \circ (f + \mathrm{id}) \ = \ 0$$

Commentaire

La notation « 0 » de l'énoncé est ici un peu malheureuse puisqu'elle symbolise **l'endomorphisme** nul (et non le réel 0). Dans la suite, on privilégiera la notation $0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ pour éviter toute confusion.

Démonstration.

- Comme $M \in \mathscr{A}$:
$$M\,(M+I_3)\,(M+2\,I_3) \ = \ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$
Comme de plus $\text{Sp}(M) = \{-1,-2\}$, alors 0 n'est pas valeur propre de f. On en déduit que M est inversible.
Ainsi, en multipliant à gauche l'égalité précédente par M^{-1}, on obtient :
$$(M+I_3)\,(M+2\,I_3) \ = \ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$
De plus, M est la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}$.

Par isomorphisme de représentation, on en déduit donc :
$(f+\text{id}) \circ (f+2\,\text{id}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.

- On remarque :
  × d'une part :
$$(M+I_3)\,(M+2\,I_3) \ = \ M^2+3\,M+2\,I_3$$
  × d'autre part :
$$(M+2\,I_3)\,(M+I_3) \ = \ M^2+3\,M+2\,I_3$$
Ainsi :
$$(M+2\,I_3)\,(M+I_3) \ = \ (M+I_3)\,(M+2\,I_3)$$

Par isomorphisme de représentation, on obtient :
$(f+2\text{id}) \circ (f+\text{id}) = (f+\text{id}) \circ (f+2\,\text{id}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.

□

b) Démontrer : $\dim\big(\text{Ker}(f+\text{id})\big) \geqslant 1$ et $\dim\big(\text{Ker}(f+2\text{id})\big) \geqslant 1$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme M est une matrice représentative de f, alors :
$$\text{Sp}(f) \ = \ \text{Sp}(M) \ = \ \{-1,-2\}$$
- On en déduit :
$$\text{Ker}(f+\text{id}) \ = \ E_{-1}(f) \ \neq \ \{0_{\mathbb{R}^3}\} \qquad \text{et} \qquad \text{Ker}(f+2\,\text{id}) \ = \ E_{-2}(f) \ \neq \ \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

D'où : $\dim\big(\text{Ker}(f+\text{id})\big) \geqslant 1$ et $\dim\big(\text{Ker}(f+2\text{id})\big) \geqslant 1$.

□

c) En utilisant que M n'est pas diagonalisable, démontrer :
$$\dim\big(\text{Ker}(f+\text{id})\big) \ = \ 1 \qquad \text{et} \qquad \dim\big(\text{Ker}(f+2\,\text{id})\big) \ = \ 1$$

Démonstration.

- On sait que :
  × $\text{Sp}(f) = \{-1,-2\}$,
  × la matrice M n'est pas diagonalisable, donc l'endomorphisme f non plus.

  On en déduit :
$$\dim\big(E_{-1}(f)\big) + \dim\big(E_{-2}(f)\big) \ < \ \dim(\mathbb{R}^3)$$

Ainsi :

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})\big)+\dim\big(\mathrm{Ker}(f+2\,\mathrm{id})\big) \ < \ 3$$

Or la dimension d'un espace vectoriel est un entier. On en conclut :

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})\big)+\dim\big(\mathrm{Ker}(f+2\,\mathrm{id})\big) \ \leqslant \ 2$$

- Par ailleur, d'après la question précédente :

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})\big)+\dim\big(\mathrm{Ker}(f+2\,\mathrm{id})\big) \ \geqslant \ 2$$

On en déduit :

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})\big)+\dim\big(\mathrm{Ker}(f+2\,\mathrm{id})\big) \ = \ 2$$

Comme chacun des termes de la somme de gauche appartient à $\mathbb{N}^*$, on déduit :
$\dim\big(\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})\big)=1$ et $\dim\big(\mathrm{Ker}(f+2\,\mathrm{id})\big))=1$.

□

d) Soit u un vecteur propre de f associé à la valeur propre -1.
Soit v un vecteur propre de f associé à la valeur propre -2.

(i) Justifier que (u,v) forme une famille libre dans $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.
La famille (u,v) est la concaténation de deux vecteurs propres de f associés à des valeurs propres **distinctes**. Ils forment donc une famille libre.

La famille (u,v) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

□

(ii) Soit w un vecteur de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}\,(u,v)$.
Montrer que la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1\cdot u+\lambda_2\cdot v+\lambda_3\cdot w=0_{\mathbb{R}^3}$ $(*)$. Ainsi :

$$\lambda_3\cdot w \ = \ -\lambda_1\cdot u-\lambda_2\cdot v$$

  × Démontrons par l'absurde : $\lambda_3=0$.
  Supposons : $\lambda_3\neq 0$. Alors :

$$w \ = \ -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\cdot u-\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\cdot v$$

  On en déduit : $w\in\mathrm{Vect}\,(u,v)$. Absurde !
  D'où : $\lambda_3=0$.

  × En reprenant $(*)$, on obtient :

$$\lambda_1\cdot u+\lambda_2\cdot v \ = \ 0_{\mathbb{R}^3}$$

  Or, d'après la question précédente, la famille (u,v) est libre. On en déduit :

$$\lambda_1 \ = \ \lambda_2 \ = \ 0$$

La famille (u,v,w) est donc libre.

- La famille (u, v, w) est :
  - × libre,
  - × de cardinal : $\text{Card}\big((u, v, w)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la famille } (u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille (u, v, w) est un ensemble qui contient 3 vecteurs. Elle est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note $\text{Card}\big((u, v, w)\big) = 3$).
- $\text{Vect}(u, v, w)$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs (u, v, w). C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base (u, v, w) d'un espace vectoriel, tout vecteur se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\text{Card}\big(\text{Vect}(u, v, w)\big)}$ et $\cancel{\dim\big((u, v, w)\big)}$ n'ont aucun sens !

□

(iii) En utilisant le fait que $\Big((f + \text{id}) \circ (f + 2\,\text{id})\Big)(w) = 0$ et $\Big((f + 2\,\text{id}) \circ (f + \text{id})\Big) = 0$, montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$f(w) + 2\,w \;=\; \alpha\, u \qquad \text{et} \qquad f(w) + w \;=\; \beta\, v$$

En déduire que w est une combinaison linéaire de u et v, et aboutir à une contradiction.

Commentaire

Encore une fois, la notation « 0 » de cette question est ambiguë. Il s'agit ici du vecteur nul de $\mathbb{R}^3$ (et non du réel 0 ou de l'endomorphisme nul comme en question ***9.a)***). Dans la suite, comme dans les questions précédentes, on utilisera la notation $0_{\mathbb{R}^3}$ pour éviter toute confusion.

Démonstration.

- D'après la question ***9.a)*** : $(f + \text{id}) \circ (f + 2\,\text{id}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. En particulier :

$$\begin{array}{rrcl} & \Big((f + \text{id}) \circ (f + 2\,\text{id})\Big)(w) & = & 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{c'est-à-dire} & (f + \text{id})\Big((f + 2\,\text{id})(w)\Big) & = & 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{ou encore} & (f + \text{id})\big(f(w) + 2\,w\big) & = & 0_{\mathbb{R}^3} \end{array}$$

  On en déduit : $f(w) + 2\,w \in \text{Ker}(f + \text{id}) = E_{-1}(f)$.

- Démontrons alors : $E_{-1}(f) = \text{Vect}(u)$.
  La famille (u) est :
  - × une famille libre de $E_{-1}(f)$ car constituée uniquement d'un vecteur non nul. En effet, comme u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -1, alors $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $u \in E_{-1}(f)$.
  - × de cardinal : $\text{Card}\big((u)\big) = 1 = \dim\big(E_{-1}(f)$ (d'après la quesion ***9.c)***).

  C'est donc une base de $E_{-1}(f)$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_{-1}(f) = \text{Vect}(u).}$$

- On obtient : $f(w) + 2\,w \in \text{Vect}\,(u)$.

$$\boxed{\text{Il existe donc } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que : } f(w) + 2\,w = \alpha\, u.}$$

- On reprend le même raisonnement. D'après la question ***9.a)*** : $(f + 2\,\text{id}) \circ (f + \text{id}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. En particulier :

$$\begin{array}{rcl} \Big((f+2\,\text{id}) \circ (f+\text{id})\Big)(w) & = & 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{c'est-à-dire} \quad (f+2\,\text{id})\Big((f+\text{id})(w)\Big) & = & 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{ou encore} \quad (f+2\,\text{id})\big(f(w)+w\big) & = & 0_{\mathbb{R}^3} \end{array}$$

On en déduit : $f(w) + w \in \text{Ker}(f + 2\,\text{id}) = E_{-2}(f)$.

- Démontrons alors : $E_{-2}(f) = \text{Vect}\,(v)$.
La famille (v) est :
  × une famille libre de $E_{-2}(f)$ car constituée uniquement d'un vecteur non nul. En effet, comme v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -2, alors $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $v \in E_{-2}(f)$.
  × de cardinal : $\text{Card}\,\big((v)\big) = 1 = \dim\big(E_{-2}(f)$ (d'après la quesion ***9.c)***).

  C'est donc une base de $E_{-2}(f)$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_{-2}(f) = \text{Vect}\,(v).}$$

- On obtient : $f(w) + w \in \text{Vect}\,(v)$.

$$\boxed{\text{Il existe donc } \beta \in \mathbb{R} \text{ tel que : } f(w) + w = \beta\, v.}$$

- On sait donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} f(w) & + & 2\,w & = & \alpha\, u \\ f(w) & + & w & = & \beta\, v \end{array} \right. \quad \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & w & = & \alpha\, u - \beta\, v \\ f(w) & + & w & = & \beta\, v \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{On obtient : } w = \alpha\, u - \beta\, v.}$$

- On en déduit : $w \in \text{Vect}\,(u, v)$. Absurde !

$$\boxed{\text{Ainsi, la matrice } M \text{ est diagonalisable.}}$$

□

10. Montrer alors que pour tout matrice M de E :

$$M \in \mathscr{A} \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$$

Démonstration.
On procède par double implication.

($\Leftarrow$) Cette implication a été démontrée en question ***4.***

($\Rightarrow$) Supposons $M \in \mathscr{A}$.

- D'après la question ***5.***, on a déjà : $\text{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$.
- Démontrons que la matrice M est diagonalisable. Trois cas se présentent :
  × si M admet 3 valeurs propres distinctes, alors, d'après la question ***6.***, la matrice M est diagonalisable.
  × si M admet exactement 2 valeurs propres distinctes, alors, d'après la question ***9.***, la matrice M est diagonalisable.

× si M admet exactement 1 valeur propre, alors, d'après la question ***7.*** :

$$M = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \ \texttt{OU} \ M = -I_3 \ \texttt{OU} \ M = -2\,I_3$$

Dans ces 3 cas, la matrice M est diagonale, et donc diagonalisable.

De plus, d'après la question ***8.***, il n'est pas possible que M n'admette aucune valeur propre.

On a donc bien démontré :

$$M \in \mathscr{A} \quad \Rightarrow \quad M \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$$

$\boxed{\text{Finalement : } M \in \mathscr{A} \Leftrightarrow M \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}.}$

□

Exercice 2 (ECRICOME 2021)

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose, si ces intégrales convergent :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt, \qquad J_n = \int_0^{1} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt, \qquad \text{et} \qquad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt$$

Partie A

Dans cette partie, on fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

1. a) Démontrer : $\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$.

Démonstration.
On remarque :

$$\frac{\frac{\cancel{\ln(t)}}{1+t^n}}{\cancel{\ln(t)}} = \frac{1}{1+t^n} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t).}$$

□

b) Démontrer : $\forall y \in \,]0,1]$, $\displaystyle\int_y^1 \ln(t)\, dt = -1 + y - y\ln(y)$.

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\, dt$ converge et déterminer sa valeur.

Démonstration.

- Soit $y \in \,]0,1]$.
  On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclrcl} u(t) & = & \ln(t) & u'(t) & = & \dfrac{1}{t} \\ v'(t) & = & 1 & v(t) & = & t \end{array}\right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[y,1]$.
  On obtient :

$$\begin{aligned} \int_y^1 \ln(t)\, dt &= \left[\, t\ln(t)\,\right]_y^1 - \int_y^1 \frac{1}{t}\, t\, dt \\ &= \cancel{1\,\ln(1)} - y\ln(y) - \int_y^1 1\, dt \\ &= -y\ln(y) - \left[\, t\,\right]_y^1 \\ &= -y\ln(y) - (1-y) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall y \in \,]0,1],\ \int_y^1 \ln(t)\, dt = -1 + y - y\ln(y).}$$

- On sait de plus :
  × d'une part : $\lim_{y \to 0} y = 0$,
  × d'autre part, par croissances comparées : $\lim_{y \to 0} y \ln(y) = 0$.

On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\, dt$ est convergente et :
$$\int_0^1 \ln(t)\, dt = -1 + 0 - 0 = -1.$$

□

c) Démontrer que l'intégrale définissant J_n converge.

Démonstration.

- Tout d'abord, la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^n}$ est continue sur $]0,1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt$ est donc uniquement impropre en 0.
- Ensuite :
  × $\forall t \in]0,1]$, $\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \leqslant 0$ et $\ln(t) \leqslant 0$. On en déduit :
  $$\forall t \in]0,1], \quad -\frac{\ln(t)}{1+t^n} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad -\ln(t) \geqslant 0$$
  × d'après ***1.a)*** : $-\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t \to 0}{\sim} -\ln(t)$.
  × l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\, dt$ est convergente d'après la question précédente. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -\ln(t)\, dt$ l'est donc aussi.
  (on ne change pas la nature d'une intégrale en multipliant son intégrande par un réel non nul)

  Par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -\frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt$ est convergente. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt$ l'est aussi.

L'intégrale définissant J_n est donc convergente.

Commentaire

- Vérifier et citer les hypothèses d'un théorème avant son utilisation est **indispensable**.
- Dans cette question, on a donc pris garde au signe des intégrandes en jeu avant d'appliquer le critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues **positives**. Ces intégrandes étant négatives sur l'intervalle d'intégration $]0,1]$, on applique le critère d'équivalence à leurs opposées (qui sont bien positives sur $]0,1]$).

□

2. ***a)*** Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(t^{\frac{3}{2}} \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \right)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$t^{\frac{3}{2}} \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t \to +\infty}{\sim} t^{\frac{3}{2}} \dfrac{\ln(t)}{t^n} = \dfrac{\ln(t)}{t^{n-\frac{3}{2}}}$$
- Or, comme $n \geqslant 2$, alors : $n - \dfrac{3}{2} \geqslant \dfrac{1}{2} > 0$. Ainsi, par croissances comparées : $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln(t)}{t^{n-\frac{3}{2}}} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim\limits_{t \to +\infty} \left(t^{\frac{3}{2}} \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \right) = 0.}$$

□

b) En déduire la nature de l'intégrale définissant K_n.

Démonstration.

- Tout d'abord, la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^n}$ est continue sur $[1, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \, dt$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.
- Ensuite :
  × d'après ***2.a)*** : $\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$.
  × $\forall t \in [1, +\infty[$, $\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \geqslant 0$.
  × l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $\frac{3}{2}$ ($\frac{3}{2} > 1$). Elle est donc convergente.

  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \, dt$ est convergente.

$$\boxed{\text{L'intégrale définissant } K_n \text{ est donc convergente.}}$$

□

3. Quelle est la nature de l'intégrale définissant I_n ?

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^n}$ est continue sur $]0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \, dt$ est donc impropre à la fois en 0 et en $+\infty$.
- De plus :
  × d'après la question ***1.***, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \, dt$ est convergente.
  × d'après la question ***2.***, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \, dt$ est convergente.

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \, dt$ est convergente.

$$\boxed{\text{L'intégrale définissant } I_n \text{ est donc convergente.}}$$

□

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. a) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\forall t \in]0,1], \qquad 0 \leqslant \frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leqslant -t^n \ln(t)$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$. Soit $t \in]0,1]$. Deux cas se présentent.

- Si $t = 1$, alors :
  - $\times$ d'une part : $\dfrac{\ln(1)}{1+1^n} - \ln(1) = 0$
  - $\times$ d'autre part : $-1^n \ln(1) = 0$.

  On a donc bien :

$$0 \leqslant \frac{\ln(1)}{1+1^n} - \ln(1) \leqslant -1^n \ln(1)$$

- si $t \in]0,1[$, alors :

$$\begin{array}{rrcccl}
 & 0 & \leqslant & \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) & \leqslant & -t^n \ln(t) \\
\Leftrightarrow & 0 & \leqslant & \ln(t)\left(\dfrac{1}{1+t^n} - 1\right) & \leqslant & -t^n \ln(t) \\
\Leftrightarrow & 0 & \geqslant & \dfrac{1}{1+t^n} - 1 & \geqslant & -t^n \quad \textit{(car, comme } t \in]0,1[\textit{ : } \ln(t) < 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow & 0 & \geqslant & \dfrac{\cancel{1} - (\cancel{1} + t^n)}{1+t^n} & \geqslant & -t^n \\
\Leftrightarrow & 0 & \geqslant & -\dfrac{t^n}{1+t^n} & \geqslant & -t^n \\
\Leftrightarrow & 0 & \leqslant & \dfrac{1}{1+t^n} & \leqslant & 1 \quad \textit{(car } -t^n < 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow & 0 & \leqslant & 1 & \leqslant & 1+t^n \quad \textit{(car } 1+t^n > 0\textit{)}
\end{array}$$

  Le dernier encadrement étant vérifié, il en est de même du premier.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in]0,1],\ 0 \leqslant \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leqslant -t^n \ln(t).}$$

Commentaire

- On peut se demander d'où provient la disjonction de cas effectuée dans cette question. Elle est en fait nécessaire pour pouvoir diviser par $\ln(t)$ dans la succession d'équivalences. Cette disjonction de cas ne se repère pas forcément au premier coup d'oeil. Elle apparaît naturellement lors de la recherche au brouillon.
- Il était possible d'étudier les fonctions $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t)$ et $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) + t^n \ln(t)$, afin d'en déterminer le signe. Ceci est évidemment bien plus chronophage que la méthode présentée ici.

□

b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^n \ln(t)\, dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto -t^n \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^n \ln(t)\, dt$ est donc uniquement impropre en 0.
- Soit $A \in\,]0,1]$.
  On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclrcl} u(t) & = & \ln(t) & u'(t) & = & \dfrac{1}{t} \\ v'(t) & = & -t^n & v(t) & = & -\dfrac{1}{n+1}\, t^{n+1} \end{array}\right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[A,1]$.
  On obtient :

$$\begin{aligned} \int_A^1 -t^n \ln(t)\, dt &= \left[-\frac{1}{n+1}\, t^{n+1} \ln(t) \right]_A^1 - \int_A^1 -\frac{1}{n+1}\, t^{n+1}\, \frac{1}{t}\, dt \\ &= \cancel{-\frac{1}{n+1}\, 1^{n+1}\, \ln(1)} + \frac{1}{n+1}\, A^{n+1} \ln(A) + \frac{1}{n+1} \int_A^1 t^n\, dt \\ &= \frac{1}{n+1}\, A^{n+1} \ln(A) + \frac{1}{n+1} \left[\frac{1}{n+1}\, t^{n+1} \right]_A^1 \\ &= \frac{1}{n+1}\, A^{n+1} \ln(A) + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\, A^{n+1} \end{aligned}$$

- Or :
  × d'une part : $\lim\limits_{A \to 0} A^{n+1} = 0$,
  × d'autre part, par croissances comparées : $\lim\limits_{A \to 0} A^{n+1} \ln(A) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi l'intégrale } \int_0^1 -t^n \ln(t)\, dt \text{ est convergente et : } \int_0^1 -t^n \ln(t)\, dt = \frac{1}{(n+1)^2}.}$$

Commentaire

On rappelle qu'une intégration par parties s'effectue toujours sur un **segment**. Ici l'intégrale d'intérêt est $\displaystyle\int_0^1 -t^n \ln(t)\, dt$ qui est impropre en 0. La démonstration de sa convergence et son calcul s'effectuent donc en 2 étapes (classiques) :

1) calcul de l'intégrale sur le **segment** $[A,1]$,

2) passage à la limite quand A tend vers 0.

□

c) Déduire des questions précédentes : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = -1$.

Démonstration.

- D'après la question ***4.a)***, pour tout $t \in]0,1]$:
$$\ln(t) \leqslant \frac{\ln(t)}{1+t^n} \leqslant \ln(t) - t^n \ln(t)$$
- De plus :
  × l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\, dt$ est convergente d'après ***1.b)***
  × l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt$ est convergente d'après ***1.c)***
  × l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t) - t^n \ln(t)\, dt$ est convergente en tant que somme d'intégrales convergentes, d'après ***1.b)*** et ***4.b)***
- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$), et les intégrales en présence convergentes :
$$\underbrace{\int_0^1 \ln(t)\, dt}_{= -1} \leqslant \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt}_{= J_n} \leqslant \int_0^1 \ln(t) - t^n \ln(t)\, dt$$
- Enfin :
$$\int_0^1 \ln(t) - t^n \ln(t)\, dt = \int_0^1 \ln(t)\, dt + \int_0^1 -t^n \ln(t)\, dt = -1 + \frac{1}{(n+1)^2}$$
On en déduit :
$$-1 \leqslant J_n \leqslant -1 + \frac{1}{(n+1)^2}$$
- Or :
  × d'une part : $\lim\limits_{n\to+\infty} -1 = -1$.
  × d'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} -1 + \dfrac{1}{(n+1)^2} = -1$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} J_n = -1.}$$

□

5. ***a)*** Démontrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant \ln(x) \leqslant x$.
En déduire que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 :
$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{x^{n-1}}$$

Démonstration.

- La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0,+\infty[$.
Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donc située en dessous de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1. Or cette tangente est la droite d'équation :
$$\begin{aligned} y &= f(1) + f'(1)\,(x-1) \\ &= \ln(1) + \frac{1}{1}\,(x-1) = x - 1 \end{aligned}$$
On en déduit, pour tout $x \in]0,+\infty[$: $\ln(x) \leqslant x - 1$.
En particulier, par transitivité : $\ln(x) \leqslant x - 1 \leqslant x$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \ln(x) \leqslant x.}$$

- Soit $n \geqslant 3$. Soit $x \in [1, +\infty[$. D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{lccccl} & 0 & \leqslant & \ln(x) & \leqslant & x & \\ \text{donc} & 0 & \leqslant & \dfrac{\ln(x)}{1+x^n} & \leqslant & \dfrac{x}{1+x^n} & \textit{(car } 1+x^n > 0\textit{)} \end{array}$$

De plus :

$$\begin{array}{lccll} & x^n & \leqslant & 1+x^n & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{x^n} & \geqslant & \dfrac{1}{1+x^n} & \textit{(par décroissance de } x \mapsto \dfrac{1}{x} \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \text{d'où} & \dfrac{x}{x^n} & \geqslant & \dfrac{x}{1+x^n} & \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)} \\ \text{ainsi} & \dfrac{1}{x^{n-1}} & \geqslant & \dfrac{x}{1+x^n} & \end{array}$$

On en déduit, par transitivité :

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leqslant \frac{x}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{x^{n-1}}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 3, \forall x \in [1, +\infty[, \ 0 \leqslant \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{x^{n-1}}}$$

□

b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $0 \leqslant K_n \leqslant \dfrac{1}{n-2}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.

- D'après la question précédente :

$$\forall t \in [1, +\infty[, 0 \leqslant \frac{\ln(t)}{1+t^n} \leqslant \frac{1}{t^{n-1}}$$

- De plus :
  × l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt$ est convergente d'après ***2.b)***
  × l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{n-1}}\, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $n-1$ ($n-1 > 1$ car $n \geqslant 3$). Elle est donc convergente.
- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($1 \leqslant +\infty$), et les intégrales en présence convergentes :

$$0 \leqslant \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt}_{= K_n} \leqslant \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{n-1}}\, dt$$

- Enfin, pour tout $B \in [1, +\infty[$:

$$\int_1^B \frac{1}{t^{n-1}}\, dt = \int_1^B t^{-n+1}\, dt = \left[\frac{1}{-n+2}\, t^{-n+2} \right]_1^B = \frac{1}{-n+2} \left(\frac{1}{B^{n-2}} - 1 \right)$$

Or, comme $n - 2 > 0$: $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} \frac{1}{B^{n-2}} = 0$. D'où : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{n-1}}\, dt = -\frac{1}{-n+2} = \frac{1}{n-2}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \geqslant 3, \ 0 \leqslant K_n \leqslant \frac{1}{n-2}.}$$

□

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\forall n \geqslant 3, \quad 0 \leqslant K_n \leqslant \frac{1}{n-2}$$

Or :

× d'une part : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.

× d'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n-2} = 0$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} K_n = 0.}$$

- Enfin, pour tout $n \geqslant 3$, par relation de Chasles (car les intégrales en présence sont convergentes) :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt = J_n + K_n$$

$$\boxed{\text{D'après la question \textit{4.c)} et ce qui précède, on en déduit : } \lim_{n\to+\infty} I_n = -1.}$$

□

Partie C

L'objectif de cette partie est d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale J_n à l'aide de **Scilab**.

5. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et y un réel de $]0,1]$.
À l'aide du changement de variable : $u = -\ln(t)$, démontrer :

$$\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\, \mathrm{e}^{-u}\, du$$

Démonstration.
On effectue le changement de variable $\boxed{u = -\ln(t)}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -\ln(t) \quad \text{(et donc } t = \mathrm{e}^{-u}) \\ \hookrightarrow du = -\dfrac{1}{t}\, dt \quad \text{ et } \quad dt = -\mathrm{e}^{-u}\, du \\ \bullet\ t = y \ \Rightarrow\ u = -\ln(y) \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = 0 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, -\ln(y)]$.
On obtient alors :

$$\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt = \int_{-\ln(y)}^0 \frac{-u}{1+(\mathrm{e}^{-u})^n} \left(-\mathrm{e}^{-u}\, du\right) = -\int_{-\ln(y)}^0 \frac{-u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\, \mathrm{e}^{-u}\, du$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\, dt = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\, \mathrm{e}^{-u}\, du.}$$

□

6. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

a) Donner une densité de X.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Une densité } f_X \text{ de } X \text{ est : } f_X : t \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{array} \right. .}$$

□

b) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose : $Y_n = \dfrac{-X}{1+\mathrm{e}^{-n\,X}}$.
Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, Y_n admet une espérance, et : $\mathbb{E}(Y_n) = J_n$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Par théorème de transfert, la v.a.r. Y_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\ f_X(u)\ du$ est absolument convergente.
- Soit $u \in [0, +\infty[$.

$$\left| \frac{-u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\ f_X(u) \right| = \frac{|-u|}{|1+\mathrm{e}^{-nu}|}\ |f_X(u)| = \frac{u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\ |\mathrm{e}^{-u}| = \frac{u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\ \mathrm{e}^{-u}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Y_n \text{ admet donc une espérance si et seulement si l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\ \mathrm{e}^{-u}\ du \text{ est convergente.}}$$

- Or, d'après la question ***5.***, pour tout $y \in\ ]0,1]$:

$$\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\ dt = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\ \mathrm{e}^{-u}\ du$$

Ainsi :

$$\int_0^{-\ln(y)} \frac{u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\ \mathrm{e}^{-u}\ du = -\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\ dt$$

D'après la question ***1.c)***, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\ dt$ est convergente.
Comme $\displaystyle\lim_{y \to 0} -\ln(y) = +\infty$, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\ \mathrm{e}^{-u}\ du$ est également convergente.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Y_n \text{ admet donc une espérance.}}$$

- De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= \int_0^{+\infty} \frac{-u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\ \mathrm{e}^{-u}\ du \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\ dt = J_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = J_n}$$

□

7. On rappelle qu'en langage **Scilab**, l'instruction `grand(1, 1, 'exp', 1)` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
Recopier et compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument deux entiers n et m, et qui renvoie une matrice à une ligne et m colonnes dont chaque coefficient est une simulation de la réalisaion de Y_n.

```
1 function Y = simulY(n, m)
2     Y = zeros(..., ...)
3     for i = ........
4         X = grand(1, 1, 'exp', 1)
5         Y(i) = ........
6     end
7 endfunction
```

Démonstration.
On propose la fonction **Scilab** suivante.

```
1 function Y = simulY(n, m)
2     Y = zeros(1, m)
3     for i = 1:m
4         X = grand(1, 1, 'exp', 1)
5         Y(i) = -X / (1 + exp(-n * X))
6     end
7 endfunction
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `simulY`,
  × elle prend en entrée 2 paramètres `n` et `m`,
  × elle admet pour variable de sortie la variable `Y`.

```
1 function Y = simulY(n, m)
```

En ligne 2, la variable `Y`, qui contiendra les `m` réalisations de la variable aléatoire Y_n, est initialisée au vecteur nul.

```
2     Y = zeros(1, m)
```

- **Contenu de la fonction**
  Les lignes 3 à 6 consistent à mettre à jour les coordonnées successives du vecteur `Y` (de la $1^{\text{ère}}$ à la $\mathtt{m}^{\text{ème}}$) pour qu'il contienne `m` simulations de la v.a.r. Y_n. Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle `for`).

```
3     for i = 1:m
```

En ligne 4, on stocke dans la variable `X` une simulation de la v.a.r. X de loi $\mathcal{E}(1)$.

```
4         X = grand(1, 1, 'exp', 1)
```

D'après la question précédente : $Y_n = \dfrac{-X}{1+\mathrm{e}^{-nX}}$.
Ainsi, en ligne 5, on stocke dans la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur `Y` une réalisation de la v.a.r. Y_n.

```
5         Y(i) = -X / (1 + exp(-n * X))
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le script **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question. □

8. a) Énoncer la loi faible des grands nombres.

Démonstration.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.

On suppose que les v.a.r. de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

× sont indépendantes,

× admettent toutes la même espérance m,

× admettent toutes la même variance σ^2.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ *(moyenne empirique).*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\, \left|\overline{X_n} - m\right| \geqslant \varepsilon \,\right]\right) = 0}$$ □

b) On tape dans **Scilab** le script suivant :

```
n = input(' Entrer la valeur de n')
disp( mean( simulY(n, 1000) ) )
```

Expliquer ce que fait ce script dans le contexte de l'exercice.

Démonstration.

- D'après la question ***6.b)*** : $J_n = \mathbb{E}(Y_n)$.
- L'idée naturelle pour obtenir une approximation de l'espérance $\mathbb{E}(Y_n)$ est :
  × de simuler un grand nombre de fois ($N = 1000$ est ici ce grand nombre) la v.a.r. Y_n.
  Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(z_1, \dots, z_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(Z_1, \dots, Z_N)$ de la v.a.r. Y_n.
  (les v.a.r. Z_i sont indépendantes et de même loi que Y_n)
  × de réaliser la moyenne des résultats de cette observation.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\text{moyenne de l'observation} \ = \ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} z_k \ \simeq \ \mathbb{E}(Y_n)$$

- Cela se traduit de la manière suivante en **Scilab** :
  × la valeur de `n` est choisie par l'utilisateur à l'aide de la fonction `input`.

```
n = input(' Entrer la valeur de n')
```

  × on obtient les valeurs $(z_1, \dots, z_{1000})$ qui correspondent à l'observation d'un 1000-échantillon $(Z_1, \dots, Z_{1000})$ de la v.a.r. Y_n à l'aide de la fonction `simulY` par la commande : `simulY(n, 1000)`.
  × on effectue la moyenne de ces observations à l'aide de la fonction `mean`.
  × on affiche le résultat obtenu avec la fonction `disp`.

La commande `disp( mean( simulY(n, 1000) ) )` permet donc d'afficher une approximation de $\mathbb{E}(Y_n) = J_n$.

□

Exercice 3 (EDHEC 2021)

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. a) Vérifier que la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} \ \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire Y.

Démonstration.

- La fonction f est continue :
  - × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  - × sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur cet intervalle.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \leqslant 0$, alors : $f(x) = 0 \geqslant 0$.
  - × si $x > 0$, alors : $f(x) = \dfrac{2}{x^3} \ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.}$$

- Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ dx$ est convergente et vaut 1.
  - × Tout d'abord, comme f est nulle en dehors de $]0, +\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ dx \ = \ \int_{0}^{+\infty} f(x) \ dx$$
  - × La fonction f est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x) \ dx$ est donc impropre à la fois en 0 et en $+\infty$.
  - × Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x) \ dx$ est convergente.
  Soit $A \in \,]0, 1]$.
$$\int_{A}^{1} f(x) \ dx \ = \ \int_{A}^{1} \frac{2}{x^3} \ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \ dx \ = \ \left[\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \right]_{A}^{1} \ = \ \exp(-1) - \exp\left(-\frac{1}{A^2}\right)$$
  Or, comme $\displaystyle\lim_{A \to 0} \ -\frac{1}{A^2} = -\infty$, alors : $\displaystyle\lim_{A \to 0} \ \exp\left(-\frac{1}{A^2}\right) = 0$.
$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{0}^{1} f(x) \ dx \text{ est donc convergente et vaut } \mathrm{e}^{-1}.}$$
  - × Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(x) \ dx$ est convergente.
  Soit $B \in [1, +\infty[$.
$$\int_{1}^{B} f(x) \ dx \ = \ \left[\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \right]_{1}^{B} \ = \ \exp\left(-\frac{1}{B^2}\right) - \exp(-1)$$
  Or, comme $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} \ -\frac{1}{B^2} = 0$, alors : $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} \ \exp\left(-\frac{1}{B^2}\right) = \mathrm{e}^0 = 1$.
$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{1}^{B} f(x) \ dx \text{ est donc convergente et vaut } 1 - \mathrm{e}^{-1}.}$$

× On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ est convergente et :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ dx \ = \ \int_0^1 f(x)\ dx + \int_1^{+\infty} f(x)\ dx \ = \ \cancel{e^{-1}} + 1 - \cancel{e^{-1}} \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx \text{ converge et vaut } 1.}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc une densité de probabilité.}}$$

□

b) On note F la fonction de répartition de Y. Déterminer $F(x)$ selon que $x > 0$ ou $x \leqslant 0$.

Démonstration.

- Tout d'abord, on considère : $Y(\Omega) =]0, +\infty[$.

$$\boxed{Y(\Omega) =]0, +\infty[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \leqslant 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ (car $Y(\Omega) =]0, +\infty[$). D'où :

$$F(x) \ = \ \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  × si $x > 0$, alors :

$$\begin{aligned} F(x) \ &= \ \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \\ &= \ \int_0^x f(t)\ dt && \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de }]0, +\infty[\textit{)} \end{aligned}$$

Soit $A \in]0, x]$.

$$\int_A^x f(t)\ dt \ = \ \left[\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]_A^x \ = \ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \exp\left(-\frac{1}{A^2}\right) \underset{A \to 0}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

Commentaire

- Profitons-en pour faire un point sur la notation $X(\Omega)$.
  Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
  Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
  Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :

$$\begin{aligned} X(\Omega) \ &= \ \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ &= \ \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{aligned}$$

  Il faut bien noter que dans cette définition aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît.

Commentaire

- Il est toujours correct d'écrire : $X(\Omega) \subseteq]-\infty, +\infty[$.
  En effet, cette propriété signifie que toute v.a.r. X est à valeurs dans $\mathbb{R}$, ce qui est toujours le cas par définition de la notion de variable aléatoire réelle.
- Dans le cas des v.a.r. discrètes, il est d'usage relativement courant de confondre :
  × l'ensemble des valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$),
  × l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\big([X = x]\big) \neq 0\}$, ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle. Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\text{Supp}(X)$.
- Dans le cas des v.a.r. à densité, la détermination de l'ensemble image est plus technique. Dans certains sujets, l'ensemble image des v.a.r. étudiées sera précisé (« On considère une v.a.r. à valeurs strictement positives »). Si ce n'est pas le cas :
  × si X suit une loi usuelle, on peut se référer à l'ensemble image donné en cours. Par exemple, si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, on se permet d'écrire :

  « Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, on **considère** : $X(\Omega) = [0, 1]$. »

  × si X ne suit pas une loi usuelle, on étudie l'ensemble : $I = \{x \in \mathbb{R} \mid f_X(x) > 0\}$.
  On se permet alors d'écrire :

  « Dans la suite, on **considère** : $X(\Omega) = I$. »

  En **décrétant** la valeur de $X(\Omega)$, on ne commet pas une erreur mais on décide d'ajouter une hypothèse qui ne fait pas partie de l'énoncé. Cette audace permet de travailler avec un ensemble image connu, ce qui permet de structurer certaines démonstrations (l'ensemble image étant connu, on se rappelle que la fonction de répartition, par exemple, s'obtient par une disjonction de cas).

□

2. a) Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X.

Démonstration.

- La fonction g est continue :
  × sur $]-\infty, 1[$ en tant que fonction constante,
  × sur $]1, +\infty[$ car elle est l'inverse de la fonction $x \mapsto x^3$ qui :
    - est continue sur $]1, +\infty[$ en tant que fonction polynomiale,
    - `NE S'ANNULE PAS` sur $]1, +\infty[$.

  $\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 1.}$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x < 1$, alors : $g(x) = 0 \geqslant 0$.
  × si $x \geqslant 1$, alors : $g(x) = \dfrac{2}{x^3} \geqslant 0$ (car $x \geqslant 0$).

  $\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geqslant 0.}$

- Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx$ converge et vaut 1.
  - × Tout d'abord, comme g est nulle en dehors de $[1, +\infty[$:
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx \ = \ \int_{1}^{+\infty} g(x)\, dx$$
  - × La fonction g est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} g(x)\, dx$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.
  - × Soit $B \in [1, +\infty[$.
  $$\int_1^B g(x)\, dx \ = \ \int_1^B \frac{2}{x^3}\, dx \ = \ \left[-\frac{1}{x^2} \right]_1^B \ = \ -\frac{1}{B^2} + 1 \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx \text{ converge et vaut 1.}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } g \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

b) On note G la fonction de répartition de X. Déterminer $G(x)$ selon que $x \geqslant 1$ ou $x < 1$.

Démonstration.

- Tout d'abord, on considère : $X(\Omega) = [1, +\infty[$.
$$\boxed{X(\Omega) = [1, +\infty[}$$
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x < 1$, alors $[X \leqslant x] = \varnothing$ (car $X(\Omega) = [1, +\infty[$). D'où :
  $$G(x) \ = \ \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$
  - × si $x \geqslant 1$, alors :
  $$\begin{aligned} G(x) \ &= \ \int_{-\infty}^{x} g(t)\, dt \\ &= \ \int_{1}^{x} g(t)\, dt && \textit{(car } g \textit{ est nulle en dehors de } [1, +\infty[\textit{)} \\ &= \ \left[-\frac{1}{x^2} \right]_1^x \\ &= \ -\frac{1}{x^2} + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } G : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.}$$

□

3. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X.
Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) On note G_n la fonction de répartition de M_n. Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction G puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de x.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$: $X_i(\Omega) = [1, +\infty[$.

$$\boxed{\text{D'où : } M_n(\Omega) \subset [1, +\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x < 1$, alors $[M_n \leqslant x] = \varnothing$ (car $M_n(\Omega) \subset [1, +\infty[$). D'où :

$$G_n(x) \ = \ \mathbb{P}\big([M_n \leqslant x]\big) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  × si $x \geqslant 1$, alors :

$$\begin{array}{rcll} G_n(x) & = & \mathbb{P}\big([M_n \leqslant x]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]\Big) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([X_i \leqslant x]\big) & \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont mutuellement indépendantes)} \\ & = & \Big(\mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big)\Big)^n & \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi que } X\textit{)} \\ & = & \big(G(x)\big)^n & \\ & = & \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^n & \textit{(d'après } \textbf{\textit{2.b)}}\textit{, car } x \geqslant 1\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } G_n : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 1 \\ \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant 1 \end{array} \right. .}$$

Commentaire

Remarquons que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a bien exprimé $G_n(x)$ en fonction de $G(x)$ au cours du calcul :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \ G_n(x) = \big(G(x)\big)^n$$

Notons que cette relation est aussi valide sur $]-\infty, 1[$. En effet, pour tout $x \in\,]-\infty, 1[$:

$$\big(G(x)\big)^n \ = \ 0^n \ = \ 0 \ = \ G_n(x)$$

Ainsi, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_n(x) = \big(G(x)\big)^n$.

□

b) On pose $Y_n = \dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la fonction de répartition F_n de Y_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) \ = \ \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\[2ex] 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

Démonstration.

- On note $h_n : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{n}}$ de sorte que : $Y_n = \dfrac{M_n}{\sqrt{n}} = h_n(M_n)$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} Y_n(\Omega) & = & \big(h_n(M_n)\big)(\Omega) & \\ & = & h_n\big(M_n(\Omega)\big) & \\ & \subset & h_n([1, +\infty[) & \qquad \textit{(car } M_n(\Omega) \subset [1, +\infty[\textit{)} \end{array}$$

  Or, comme h_n est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$, on a :

$$h_n([1, +\infty[) \ = \ \Big[h_n(1), \lim_{x \to +\infty} h_n(x)\Big[\ = \ \Big[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\Big[$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y_n(\Omega) \subset \Big[\tfrac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\Big[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

  × si $x < \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors $[Y_n \leqslant x] = \varnothing$ (car $Y_n(\Omega) \subset [1, +\infty[$). D'où :

$$F_n(x) \ = \ \mathbb{P}\big([Y_n \leqslant x]\big) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  × si $x \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_n(x) & = & \mathbb{P}\big([Y_n \leqslant x]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{M_n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\big([M_n \leqslant x\sqrt{n}]\big) & \qquad \textit{(car } \sqrt{n} > 0\textit{)} \\ & = & G_n(x\sqrt{n}) & \\ & = & \left(1 - \dfrac{1}{(x\sqrt{n})^2}\right)^n & \qquad \begin{array}{l}\textit{(car, comme } x \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}, \\ \textit{alors : } x\sqrt{n} \geqslant 1\textit{)}\end{array} \\ & = & \left(1 - \dfrac{1}{n\,x^1}\right)^n & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\[2ex] \left(1 - \dfrac{1}{n\,x^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}.}$$

□

4. Déterminer, pour tout réel x négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $x \in]-\infty, 0]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme $x < \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors, d'après la question précédente : $F_n(x) = 0$.
On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$.

$$\boxed{\forall x \in]-\infty, 0], \ \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0}$$

□

5. a) Soit x un réel strictement positif. Vérifier que, dès que n est supérieur strictement à la partie entière de $\frac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n$.

Démonstration.
Soit $n > \lfloor \frac{1}{x^2} \rfloor$.

- On commence par démontrer : $x \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$.
  - × Comme n est un entier, alors :
  $$n \geqslant \left\lfloor \frac{1}{x^2} \right\rfloor + 1$$
  - × Or, par définition de la partie entière : $\left\lfloor \frac{1}{x^2} \right\rfloor + 1 > \frac{1}{x^2}$. Donc, par transitivité :

$$\begin{array}{rrcll} & n & \geqslant & \frac{1}{x^2} & \\ \text{d'où} & \frac{1}{n} & \leqslant & x^2 & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[\textit{)} \\ \text{ainsi} & \sqrt{\frac{1}{n}} & \leqslant & x & \textit{(par croissance de la fonction } \sqrt{\cdot} \textit{ sur } [0, +\infty[\textit{)} \\ \text{alors} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \leqslant & x & \end{array}$$

- Comme $x \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, d'après ***3.b)*** :

$$F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n\,x^2}\right)^n$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n > \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor, \ F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n\,x^2}\right)^n.}$$

□

b) Donner un équivalent de $\ln(1+u)$ lorsque u est au voisinage de 0, puis en déduire, pour tout réel x strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

$$\boxed{\ln(1+u) \underset{u \to 0}{\sim} u}$$

Soit $x > 0$.

- Soit $n > \left\lfloor \dfrac{1}{x^2} \right\rfloor$. D'après la question précédente :

$$F_n(x) \;=\; \left(1 - \frac{1}{n\,x^2}\right)^n \;=\; \exp\left(n\,\ln\left(1 - \frac{1}{n\,x^2}\right)\right)$$

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n\,x^2} = 0$, alors :

$$\begin{array}{rrcl} & \ln\left(1 - \dfrac{1}{n\,x^2}\right) & \underset{n\to+\infty}{\sim} & -\dfrac{1}{n\,x^2} \\ \text{donc} & n\,\ln\left(1 - \dfrac{1}{n\,x^2}\right) & \underset{n\to+\infty}{\sim} & -n\,\dfrac{1}{n\,x^2} \\ \text{d'où} & n\,\ln\left(1 - \dfrac{1}{n\,x^2}\right) & \underset{n\to+\infty}{\sim} & -\dfrac{1}{x^2} \end{array}$$

  Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,\ln\left(1 - \dfrac{1}{n\,x^2}\right) = -\dfrac{1}{x^2}$.

- Par continuité de la fonction exp en $-\dfrac{1}{x^2}$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(n\,\ln\left(1 - \dfrac{1}{n\,x^2}\right)\right) & = & \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \\ \shortparallel & & \\ \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) & & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x > 0,\ \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).}$$

□

6. Conclure que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de Y.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- si $x \leqslant 0$, alors, d'après ***4.*** :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) \;=\; 0$$

  Or, d'après ***1.b*** ; comme $x \leqslant 0$, alors : $F(x) = 0$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) \;=\; F(x)$$

- si $x > 0$, alors, d'après la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) \;=\; \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \;=\; F(x)$$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Y.}$$

□