DS6 (version A)

Exercice 1

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E. Pour tout polynôme P de E, on note indifféremment P ou $P(X)$.
Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée P' du polynôme $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ est le polynôme $P' = \beta + 2\gamma X$, et la dérivée seconde P'' de P est le polynôme $P'' = 2\gamma$.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(P) = P - XP', \quad b(P) = P - P', \quad c(P) = 2XP - (X^2 - 1)\ P'$$

Par exemple : $a(X^2) = X^2 - X(2X) = -X^2$.
Enfin, on note $f = b \circ a - a \circ b$.

Partie I : Étude de a

1. Montrer que a est un endomorphisme de E.

2. ***a)*** Montrer que la matrice A de a dans la base $\mathscr{B}$ de E est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer le rang de la matrice A.

3. L'endomorphisme a est-il bijectif ? Déterminer $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$.

On admet, pour la suite de l'exercice, que b et c sont des endomorphismes de E.
On note B et C les matrices, dans la base $\mathscr{B}$ de E, de b et c respectivement.

Partie II : Étude de b

4. Montrer que b est bijectif et que, pour tout Q de E, on a : $b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$.

5. ***a)*** Montrer que b admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci.

b) L'endomorphisme b est-il diagonalisable ?

Partie III : Étude de c

6. Montrer : $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. L'endomorphisme c est-il bijectif ?

8. ***a)*** Déterminer une matrice R, carrée d'ordre trois, inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D, carrée d'ordre trois, diagonale, à coefficients diagonaux dans l'ordre croissant, telles que $C = RDR^{-1}$.

b) En déduire que l'endomorphisme c est diagonalisable et déterminer une base de E constituée de vecteurs propres de c.

Partie IV : Étude de f

9. Montrer : $\forall P \in E,\ f(P) = P'$.

10. En déduire : $(BA - AB)^3 = 0$.

Exercice 2

On considère l'application $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < \mathrm{e} < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$, calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'''(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{3x+1}{x^5}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variation de φ', et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'(x) \geqslant \mathrm{e}$.

3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

4. Déterminer la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3,+\infty[,\ \varphi(x) \geqslant \mathrm{e}\, x$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ.

6. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.

7. Dresser le tableau de variations de φ, avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.
Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.

Partie II : Étude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $U = \mathbb{R} \times]0,+\infty[$ et on considère l'application : $f : U \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy - \mathrm{e}^x \ln(y)$.

8. Représenter graphiquement l'ensemble U.

9. `(CUBES uniquement)` Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U et calculer, pour tout (x,y) de U, les dérivées partielles premières et les dérivées partielles secondes de f au point (x,y).

10. `(CUBES uniquement)` Établir que, pour tout (x,y) de U, (x,y) est un point critique de f si et seulement si :
$$x > 0 \quad \text{et} \quad y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad \varphi(x) = 0$$

11. `(CUBES uniquement)` En déduire que f admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $(1,\mathrm{e})$.

12. `(CUBES uniquement)` Est-ce que f admet un extremum local en $(1,\mathrm{e})$?

13. `(CUBES uniquement)` Est-ce que f admet un extremum local sur U ?

Partie III : Étude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

14. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n$.
(on pourra utiliser les résultats de la **Partie I**)

15. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

16. Écrire un programme **Scilab** qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^3$.

17. Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?

18. Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function S = sommeP(n)` qui, prend en argument un entier n et stocke dans la variable de sortie S le $n^{\text{ème}}$ terme de la somme partielle de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \, dx$ est convergente.

2. *a)* Rappeler une densité d'une variable aléatoire. qui suit la loi normale d'espérance nulle et de variance a^2.
En déduire : $I_0 = a \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

b) Calculer la dérivée de l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$.
En déduire : $I_1 = a^2$.

3. *a)* Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$ et pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\int_0^t x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \, dx \;=\; -a^2 \, t^{n-1} \, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}} + (n-1)a^2 \int_0^t x^{n-2} \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \, dx$$

b) En déduire, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $I_n = (n-1) \, a^2 \, I_{n-2}$.

c) Calculer I_2 et I_3.

On considère l'application $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{a^2} \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4. Montrer que g_a est une densité.

On considère une variable aléatoire X admettant g_a comme densité.

5. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

6. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et que $\mathbb{E}(X) = a \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

7. Montrer que la variable aléatoire X admet une variance $\mathbb{V}(X)$ et calculer $\mathbb{V}(X)$.

8. *a)* On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$. Montrer que la variable aléatoire $Z = a \sqrt{-2 \ln(U)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X.

b) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function X = simulX(a)` qui, prend en argument un réel a et permet de simuler la variable aléatoire X.
On rappelle que l'instruction `rand()` simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1]$.

Vocabulaire de l'estimation

En statistiques, on définit la notion d'estimateur. C'est une fonction permettant d'évaluer un paramètre inconnu (souvent noté θ) d'une loi de probabilité. Sans entrer dans les détails, un estimateur peut par exemple servir à estimer certaines caractéristiques d'une population totale à partir de données obtenues par un sondage.

On définit comme suit le cadre de l'estimation.

Soit Z une variable aléatoire dont la loi dépend d'un paramètre inconnu θ.
Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$.
Soit $(Z_1, \ldots, Z_n)$ un n-uplet de variables aléatoires et soit Y_n une variable aléatoire.
On donne les définitions suivantes.

- On dit que $(Z_1, \ldots, Z_n)$ est un n-échantillon de Z si :
  - × les variables aléatoires $Z_1, \ldots, Z_n$ sont indépendantes.
  - × les variables aléatoires $Z_1, \ldots, Z_n$ suivent toutes la même loi que Z.
- On dit que Y_n est un estimateur du paramètre θ si la variable aléatoire Y_n s'écrit comme une fonction (dont l'expression ne dépend pas de θ) des v.a.r. $Z_1, \ldots, Z_n$. Par exemple :
  - × $Y_n = Z_1 + \ldots + Z_n$ est un estimateur de θ.
  - × $Y_n = Z_1 + \ldots + Z_n - (n-1)\,\theta$ n'est pas un estimateur de θ.
- Si un estimateur Y_n de θ admet une espérance, on appelle biais de Y_n le réel $b(Y_n)$ défini par :

$$b(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n) - \theta$$

  Dans le cas où $b(Y_n) = 0$ (c'est-à-dire $\mathbb{E}(Y_n) = \theta$), on dit que l'estimateur Y_n est sans biais.
- Si un estimateur Y_n de θ admet une variance, on appelle risque quadratique de Y_n le réel $r(Y_n)$ défini par :

$$r(Y_n) = \mathbb{E}\left((Y_n - \theta)^2\right)$$

9. On se place dans le cadre de l'estimation défini au-dessus.
En particulier, on considère $\theta \in \mathbb{R}$ et Y_n un estimateur du paramètre θ qui admet une variance.

a) Démontrer : $r(Y_n) = \mathbb{V}(Y_n) + \big(b(Y_n)\big)^2$.

b) On suppose dans cette question que Y_n est sans biais. Que vaut le risque quadratique de Y_n dans ce cas ?

Dans la suite, on considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \cdots, X_n$, suivant toutes la même loi que la variable aléatoire X définie après la question *4*. On définit ainsi un n-échantillon de la variable aléatoire X.

10. On considère la variable aléatoire $A_n = \dfrac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}\,(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$.

a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function A = simulA(a, n)` qui, prend en argument un réel a et un entier n et qui permet de simuler la variable aléatoire A_n.
On pourra se servir de la fonction `simulX` définie en ***8.b)*** ainsi que de la fonction `min` qui prend en paramètre une matrice et renvoie le plus petit coefficient de cette matrice.

b) Montrer que la variable aléatoire A_n, est un estimateur sans biais de a.

c) Déterminer le risque quadratique de l'estimateur A_n.

On définit la variable aléatoire $M_n = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

11. ***a)*** Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function M = simulM(a, n)` qui, prend en argument un réel a et un entier n et qui permet de simuler la variable aléatoire M_n.
On pourra se servir de la fonction `simulX` définie en ***8.b)***.

b) Montrer, pour tout $t \in [0, +\infty[$: $\mathbb{P}([M_n > t]) = \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{2a^2}}$.

c) En déduire la fonction de répartition de M_n.

d) Montrer que M_n est une variable aléatoire à densité, admettant g_b comme densité avec $b = \dfrac{a}{\sqrt{n}}$.

e) Montrer que la variable aléatoire M_n, admet une espérance $\mathbb{E}(M_n)$ et une variance $\mathbb{V}(M_n)$.
Calculer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\mathbb{V}(M_n)$.

12. ***a)*** En déduire un estimateur B_n sans biais de a, de la forme $\lambda_n \cdot M_n$ avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

b) Déterminer le risque quadratique de l'estimateur B_n.