DS5 (version B) - barème

Ce problème est constitué de trois parties. Les résultats de la partie 1 sont utilisés dans les parties 2 et 3. Les parties 2 et 3 sont indépendantes entre elles.
Dans tout le sujet, $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, où a et b sont réels ou infinis.
On dit qu'une densité vérifie l'hypothèse CSP(I) lorsque f est :

× continue sur I ;

× strictement positive sur I ;

× nulle en dehors de I.

On écrira alors simplement : f est CSP(I).
On admettra que les principaux résultats du cours concernant l'indépendance des variables aléatoires discrètes s'appliquent également aux variables aléatoires à densité.

Partie 1 - Calcul d'une probabilité

On considère dans cette partie :

× X une variable aléatoire réelle continue à valeurs dans I, de fonction de répartition F et admettant une densité de probabilité f qui est CSP(I).

× U une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $]0, 1[$ et qui est indépendante de X.

× h une fonction continue sur I à valeurs dans $[0, 1]$.

On se propose d'établir la formule suivante :

$$\mathbb{P}([U \leqslant h(X)]) \; = \; \mathbb{P}([U < h(X)]) \; = \; \int_a^b f(t)\, h(t) \; dt$$

On définit sur I la fonction Ψ par : $\Psi(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [U \leqslant h(X)])$.

1. Pour tous réels x et y dans I tels que $x < y$, on pose $M(x, y) = \max\limits_{t \in [x,y]} h(t)$ et $m(x, y) = \min\limits_{t \in [x,y]} h(t)$.

a) Soit x dans I. Justifier que pour tout y dans l'intervalle $]x, b[$, il existe α_y dans l'intervalle $[x, y]$ tel que $M(x, y) = h(\alpha_y)$.

- 1 pt : h est continue sur le segment $[x, y]$

- 1 pt : h est donc bornée et atteint ses bornes sur $[x, y]$

b) En déduire : $\lim\limits_{\substack{y \to x \\ y > x}} M(x, y) = h(x)$.

- 1 pt : Pour tout $y > x$, on a $x \leqslant \alpha_y \leqslant y$ donc $\lim\limits_{y \to x} \alpha_y = x$ par théorème d'encadrement

- 1 pt : $\lim\limits_{y \to x} h(\alpha_y) = \lim\limits_{t \to x} h(t)$ par théorème de composition

- 1 pt : $\lim\limits_{t \to x} h(t) = h(x)$ par continuité de h en x

c) Montrer de même que, pour tout y dans I : $\lim\limits_{\substack{x \to y \\ x < y}} M(x, y) = h(y)$.

- 1 pt : Soit y dans I. Pour tout x dans l'intervalle $]a, y[$, il existe β_x dans le segment $[x, y]$ tel que $M(x, y) = h(\beta_x)$.

- 1 pt : $\lim\limits_{x \to y} h(\beta_x) = h(y)$

On montrerait de manière analogue (on ne demande pas de le vérifier) :

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y > x}} m(x,y) = h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to y \\ x < y}} m(x,y) = h(y)$$

2. Soit x et y deux réels de I tels que $x < y$.

a) Établir l'inclusion suivante entre évènements :

$$[x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant h(X)] \ \subset \ [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant M(x,y)]$$

En déduire l'inégalité :

$$\Psi(y) - \Psi(x) \ \leqslant \ (F(y) - F(x))\, M(x,y)$$

- **1 pt : Structure de démonstration : soit** $\omega \in [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant h(X)]$**. Montrons que** $\omega \in [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant M(x,y)]$
- **1 pt :** $x < X(\omega) \leqslant y$ **donc** $h\big(X(\omega)\big) \leqslant \max\limits_{t \in [x,y]} h(t) = M(x,y)$**. D'où** $U(\omega) \leqslant M(x,y)$
- **1 pt : La famille** $([X \leqslant x]\,, [X > x])$ **forme un système complet d'événements**
- **1 pt :** $\Psi(y) - \Psi(x) \ = \ \mathbb{P}\big(\,[x < X \leqslant y] \ \cap \ [U \leqslant h(X)]\,\big)$
- **1 pt : croissance de l'application** $\mathbb{P}$ **citée**
- **1 pt :** X **et** U **sont indépendantes**
- **1 pt :** $U \hookrightarrow]0,1[$ **et** $M(x,y) \in]0,1[$

b) Établir une minoration analogue pour $\Psi(y) - \Psi(x)$, puis l'encadrement :

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x}\ m(x,y) \ \leqslant \ \frac{\Psi(y) - \Psi(x)}{y - x} \ \leqslant \ \frac{F(y) - F(x)}{y - x}\ M(x,y)$$

- **2 pt :** $\big(F(y) - F(x)\big)\ m(x,y) \ \leqslant \ \Psi(y) - \Psi(x)$ **(reprise de la preuve précédente)**
- **1 pt : On peut diviser par** $y - x$ **sans changer le sens de l'inégalité car** $x < y$

c) Montrer que Ψ est dérivable sur I, et exprimer sa dérivée en fonction de f et h.

- **1 pt :** f **est CSP(**I**) donc** f **est continue sur** I **donc** F **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** I
- **1 pt : D'après le théorème d'encadrement, la fonction** $\tau_x(\Psi)$ **admet une limite finie à droite en** x**. Plus précisément :** $\lim\limits_{\substack{v \to x \\ v > x}} \tau_x(\Psi)(v) = f(x)\ h(x)$
- **1 pt : Par théorème d'encadrement,** $\tau_x(\Psi)$ **admet une limite finie à gauche en** x **et** $\lim\limits_{\substack{u \to x \\ u < x}} \tau_x(\Psi)(u) = f(x)\ h(x)$
- **1 pt : Cela démontre que** Ψ **est dérivable en** x **et** $\Psi'(x) = f(x)\ h(x)$

3. ***a)*** En déduire que, pour tout x et y dans I :

$$\Psi(y) - \Psi(x) \ = \ \int_x^y f(t)\, h(t)\ dt$$

- **1 pt :** f **et** h **sont continues sur** I **donc** $\displaystyle\int_a^b f(t)\, h(t)\ dt$ **est bien définie**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_a^b f(t)\, h(t)\ dt = \int_x^y \Psi'(t)\ dt = [\ \Psi(t)\ ]_x^y \ = \ \Psi(y) - \Psi(x)$

b) Établir : pour tout x dans I, $\Psi(x) \leqslant F(x)$, puis montrer : $\lim\limits_{x \to a} \Psi(x) = 0$. En déduire :

$$\forall x \in I, \quad \Psi(x) = \int_a^x f(t)\, h(t)\ dt$$

- **1 pt :** $[X \leqslant x] \cap [U \leqslant h(X)] \subset [X \leqslant x]$
- **1 pt : par croissance de l'application $\mathbb{P}$, on en déduit que** $\Psi(x) \leqslant F(x)$
- **2 pt :** $\lim\limits_{x \to a} F(x) = 0$ **(1 pt par cas)**
- **1 pt : par théorème d'encadrement :** $\lim\limits_{x \to a} \Psi(x) = 0$
- **1 pt : les fonctions f et h étant continues sur $]a, b[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\, h(t)\; dt$ est impropre en a**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_a^y f(t)\, h(t)\; dt = \lim_{x \to a} \int_x^y f(t)\, h(t)\; dt = \lim_{x \to a} (\Psi(y) - \Psi(x)) = \Psi(y)$

c) Établir, pour tout x dans I : $\mathbb{P}([X > x] \cap [U \leqslant h(X)]) = \mathbb{P}([U \leqslant h(X)]) - \Psi(x)$.
En déduire : $\lim\limits_{x \to b} \Psi(x) = \mathbb{P}([U \leqslant h(X)])$ puis :

$$\mathbb{P}([U \leqslant h(X)]) = \int_a^b f(t)\, h(t)\; dt$$

- **1 pt : La famille $([X \leqslant x], [X > x])$ est un système complet d'événements**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([U \leqslant h(X)]\big) = \Psi(x) + \mathbb{P}\big([X > x] \cap [U \leqslant h(X)]\big)$
- **1 pt :** $\forall x \in I,\ \mathbb{P}\big([X > x] \cap [U \leqslant h(X)]\big) \leqslant 1 - F(x)$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to b} (1 - F(x)) = 0$
- **1 pt : Par théorème d'encadrement, on en déduit :** $\lim\limits_{x \to b} \mathbb{P}\big([X > x] \cap [U \leqslant h(X)]\big) = 0$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_a^b f(t)\, h(t)\; dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\, h(t)\; dt = \lim_{x \to b} \Psi(x) = \mathbb{P}\big([U \leqslant h(X)]\big)$

4. Montrer : $\mathbb{P}([U < h(X)]) = 1 - \mathbb{P}([1 - U \leqslant 1 - h(X)])$, en déduire :

$$\mathbb{P}([U < h(X)]) = \int_a^b f(t)\, h(t)\; dt$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}([U < h(X)]) = 1 - \mathbb{P}([1 - U \leqslant 1 - h(X)])$ **par passage au complémentaire**
- **1 pt : On note $V = 1 - U$ et $\tilde{h} : x \mapsto 1 - h(x)$. On a alors** $\mathbb{P}\big([1 - U \leqslant 1 - h(X)]\big) = \mathbb{P}\Big(\Big[V \leqslant \tilde{h}(X)\Big]\Big)$
- **1 pt : comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$, alors : $V \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$. De plus, comme U est indépendante de X, alors, par le lemme des coalitions, $V = 1 - U$ est elle aussi indépendante de X**
- **1 pt : comme h est continue sur I et à valeurs dans $[0,1]$, la fonction $\tilde{h}$ est elle aussi continue sur I et à valeurs dans $[0,1]$**
- **2 pt :** $\mathbb{P}\Big(\Big[V \leqslant \tilde{h}(X)\Big]\Big) = 1 - \displaystyle\int_a^b f(t)\, h(t)\; dt$ **(1 pt pour les arguments)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([U < h(X)]) = \displaystyle\int_a^b f(t)\, h(t)\; dt$

Partie 2 - Le modèle économique de Leontiev fermé

Soit α et β deux nombres réels appartenant à l'intervalle $]0,1[$.
On s'intéresse à un modèle économique composé de trois secteurs d'activité S_1, S_2 et S_3.
On suppose que :

× pour produire une unité de biens du secteur 1, il faut α unités du secteur 1 et α unités du secteur 2.

× pour produire une unité de biens du secteur 2, il faut β unités du secteur 1 et α unités du secteur 3.

× pour produire une unité de biens du secteur 3, il faut β unités du secteur 2 et β unités du secteur 3.

On dira que ce modèle est *viable* s'il existe des quantités de productions x_1, x_2 et x_3 des secteurs respectifs S_1, S_2 et S_3, strictement positives et telles que chaque secteur soit excédentaire en quantité.

5. a) Montrer que le modèle est viable si et seulement s'il existe $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 > \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_2 > \alpha x_1 + \beta x_3 \\ x_3 > \alpha x_2 + \beta x_3 \end{array}\right.$$

- **1 pt : produire x_1 unités de biens du secteur 1 requiert :**
  × $\alpha\, x_1$ **unités du secteur** 1**,**
  × $\alpha\, x_1$ **unités du secteur** 2**.**
- **1 pt :** $\alpha\, x_1 + \beta\, x_2$ **unités du secteur** 1 **sont affectées à la production de tous les biens.**
- **1 pt : même chose pour les autres secteurs**
- **1 pt : Pour que le modèle soit viable, il faut que, pour tout $i \in [\![0,3]\!]$, la quantité de biens du secteur i produite soit supérieure à la quantité de biens du secteur i nécessaire à la production générale**

b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$. Montrer que le modèle est viable si et seulement s'il existe une matrice colonne X à composantes strictement positives telle que la matrice colonne $X - AX$ n'a que des composantes strictement positives.

- **1 pt :** $X - AX = \begin{pmatrix} x_1 - (\alpha\, x_1 + \beta\, x_2) \\ x_2 - (\alpha\, x_1 + \beta\, x_3) \\ x_3 - (\alpha\, x_2 + \beta\, x_3) \end{pmatrix}$
- **1 pt : équivalence correctement écrite**

6. a) Vérifier que $\alpha + \beta$ est valeur propre de A et déterminer le sous espace vectoriel associé.

- **1 pt :** $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\alpha + \beta) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\text{rg}(A - (\alpha + \beta)\, I_3) = 2$
- **1 pt : par théorème du rang,** $\dim\big(E_{\alpha+\beta}(A)\big) \ = \ 3 - 2 \ = \ 1$
- **1 pt :** $E_{\alpha+\beta}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

b) En déduire que si $\alpha + \beta < 1$, alors le modèle est viable.

- **1 pt : avec** $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$**, on a** $X - AX \ = \ X - (\alpha+\beta) \cdot X \ = \ \big(1 - (\alpha+\beta)\big) \cdot X \ = \ \begin{pmatrix} 1 - (\alpha + \beta) \\ 1 - (\alpha + \beta) \\ 1 - (\alpha + \beta) \end{pmatrix}$

- 1 pt : comme $\alpha+\beta<1$, ce dernier vecteur est à coordonnées strictement positives

On admet pour la suite que le modèle est viable si et seulement si le spectre de A est inclus dans $]-1,1[$.

7. ***a)*** Montrer que le modèle est viable si et seulement si $\alpha+\beta<1$.

- 1 pt : on sait déjà que si $\alpha+\beta<1$, alors le modèle est viable

- 1 pt : supposons le modèle viable, alors d'après l'énoncé le spectre de A est inclus dans $]-1,1[$. Or $\alpha+\beta$ est une valeur propre de A, donc $\alpha+\beta\in]-1,1[$. D'où $\alpha+\beta<1$

b) Déterminer les valeurs propres de A autres que $\alpha+\beta$, et vérifier qu'elles sont dans l'intervalle $]-1,1[$.

- 3 pt : $\mathrm{Sp}(A)=\{\alpha+\beta,\sqrt{\alpha\beta},-\sqrt{\alpha\beta}\}$ **(1 pt pour la méthode même en cas d'erreur de calcul)**

- 1 pt : $\sqrt{\alpha\beta}\in]0,1[$ et $-\sqrt{\alpha\beta}\in]-1,0[$

8. On suppose, dans cette question seulement, que α est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0,1[$ et que β est une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1[$, admettant une densité de probabilité f qui est $\mathrm{CSP}(]0,1[)$.
En utilisant les résultats de la **Partie 1**, montrer que la probabilité que le modèle soit viable vaut $1-\mathbb{E}(\beta)$.

- 1 pt : La probabilité que le système soit viable est $\mathbb{P}([\alpha+\beta<1])$

- 1 pt : on considère la fonction

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 1 & \textbf{si } t<0 \\ 1-t & \textbf{si } t\in\,]0,1[\\ 0 & \textbf{si } t>1 \end{cases}$$

- 1 pt : $\mathbb{P}([\alpha+\beta<1])=\mathbb{P}\big([\alpha<h(\beta)]\big)$

- 3 pt : $\mathbb{P}\big([\alpha<h(\beta)]\big)=1-\mathbb{E}(\beta)$ **(2 pt pour les explications)**

9. On suppose désormais que α et β sont tels que le modèle est viable. Pour $i=1,2$ ou 3, on note y_i le coût de production d'une unité de bien dans le secteur i, et y_i+z_i, le prix de vente d'une unité de bien du secteur i. La marge z_i est appliquée uniquement en cas de vente à un autre secteur, l'achat à l'intérieur d'un même secteur se faisant au prix coûtant y_i.
On définit les deux matrices lignes : $Y=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}$ et $Z=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix}$ ainsi que la matrice carrée $B=\begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0\end{pmatrix}$.

a) Établir la relation matricielle (1) : $Y=Y\,A+Z\,B$.

- 1 pt : L'énoncé précise que pour produire une unité de biens du secteur 1, il faut :

× **α unités du secteur 1, de coût $\alpha\,y_1$.**

× **α unités du secteur 2, de coût $\alpha\,(y_2+z_2)$ car une unité du secteur 2 à un coût de y_2+z_2 pour le secteur 1.**

Ainsi, le coût de production d'une unité de bien du secteur 1 est : $y_1=\alpha\,y_1+\alpha\,(y_2+z_2)$

- 1 pt : De même, produire une unité de biens du secteur 2 requiert :

× β **unités du secteur** 1**, de coût** $\beta\,(y_1 + z_1)$**.**

× α **unités du secteur** 3**, de coût** $\alpha\,(y_3 + z_3)$**.**

D'où : $y_2 = \beta\,(y_1 + z_1) + \alpha\,(y_3 + z_3)$

- **1 pt : Enfin, produire** x_3 **unités de biens du secteur** 3 **requiert :**

  × β **unités du secteur** 2**, de coût** $\beta\,(y_2 + z_2)$**.**

  × β **unités du secteur** 3**, de coût** $\beta\,y_3$**.**

  D'où : $y_3 = \beta\,(y_2 + z_2) + \beta\,y_3$

- **1 pt : réécriture sous forme matricielle**

b) Justifier sans calculs l'inversibilité de $I_3 - A$.
En déduire que pour Z fixé, il existe un unique Y vérifiant la relation (1).

- **1 pt :** 1 **est valeur propre de** $A \iff I_3 - A$ **n'est pas inversible**
- **1 pt : le modèle est viable donc toutes les valeurs propres de** A **sont inclues dans** $]-1,1[$**, donc** 1 **n'est pas valeur propre de** A
- **1 pt : Pour** Z **fixé, l'unique** Y **vérifiant la relation** (1) **est** $Z\,B\,(I_3 - A)^{-1}$

Partie 3 - Simulation de variables aléatoires

La plupart des langages informatiques possèdent un générateur de nombres aléatoires. En **Scilab** par exemple, on dispose de la fonction `rand`. Cette fonction simule une v.a.r. de loi uniforme sur $]0,1[$.

On propose dans la suite deux méthodes permettant de simuler des lois continues quelconques en utilisant ce générateur aléatoire.

Jusqu'à la fin du problème : on note Z une variable aléatoire continue à valeurs dans I, de fonction de répartition G et admettant une densité g qui est CSP(I).

A - Simulation par la méthode d'inversion

10. a) On note H la restriction de G à I. Montrer que H réalise une bijection de I sur $]0,1[$.
On note H^{-1} la bijection réciproque. Dresser le tableau de variation de H^{-1}.

- **1 pt : Comme g est CSP($]a,b[$), la fonction G est :**
  - × **de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$ car g est continue sur $]a,b[$.**
  - × **strictement croissante sur I car : $\forall x \in\,]a,b[,\ G'(x) = g(x) > 0$.**
- **1 pt : G réalise une bijection de $]a,b[$ sur $G\big(]a,b[\big) = \big]\lim\limits_{x\to a} G(x), \lim\limits_{x\to b} G(x)\big[$**
- **1 pt : G réalise une bijection de $]a,b[$ sur $]0,1[$. Il en est de même de H, restriction de G à $]a,b[$**
- **1 pt :**

x	0	1
Variations de H^{-1}	a ↗	b

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$.
On pose $X = H^{-1}(U)$, et on note F la fonction de répartition de X.

b) Montrer que pour tout x dans I, $F(x) = G(x)$.

- **1 pt : H est strictement croissante sur $]a,b[$**
- **1 pt : $H(x) \in\,]0,1[$ et par définition de F_U sur $]0,1[$**
- **1 pt : calcul correct**

c) En déduire que X suit la même loi que Z.

- **1 pt : Si $x \leqslant a$, alors $F(x) = G(x)$**
- **1 pt : Si $x \geqslant b$, alors $F(x) = G(x)$**
- **1 pt : les fonctions de répartition caractérisent la loi**

11. Simulation de lois exponentielles.
On suppose dans cette question que Z suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Expliciter l'intervalle I et les fonctions g, G et H^{-1}.

- **1 pt : La fonction de répartition de Z est :**

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x} & \textbf{si } x \in \,]0, +\infty[\end{cases}$$

- **1 pt : Une densité de probabilité g est :**

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x} & \textbf{si } x \in \,]0, +\infty[\end{cases}$$

- **1 pt : la fonction g est CSP$(]0, +\infty[)$ donc $I = \,]0, +\infty[$**
- **1 pt : la fonction H^{-1} est définie par :**

$$H^{-1} : \,]0, 1[\,\to\,]0, +\infty[, \quad y \mapsto -\frac{1}{\lambda}\, \ln(1-y)$$

b) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function z = expo(lambda)` qui simule la loi exponentielle de paramètre `lambda`.

```
1 function z = expo(lambda)
2   u = rand()
3   z = -(1 / lambda) * log(1-u)
4 endfunction
```

- **1 pt : ligne 2**
- **1 pt : ligne 3**

12. Simulation de la loi de Laplace.
On cherche dans cette question à simuler une variable aléatoire de densité g donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{-|x|} \qquad \text{(densité de Laplace)}$$

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1.
Soit V une variable aléatoire indépendante de Y suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, ce qui signifie $\mathbb{P}([V = -1]) = \mathbb{P}([V = 1]) = \dfrac{1}{2}$.
On pose $X = VY$.

a) Vérifier que g est une densité de probabilité qui est CSP$(\mathbb{R})$.

- **1 pt : La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : La fonction g est strictement positive sur $\mathbb{R}$ car la fonction exponentielle l'est**
- **1 pt : La fonction g est bien nulle en dehors de $\mathbb{R}$ (cette condition est vide)**

b) Établir :

× pour tout $x \geqslant 0$, $\mathbb{P}([X > x]) = \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y > x])$;

× pour tout $x \leqslant 0$, $\mathbb{P}([X \leqslant x]) = \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y \geqslant -x])$;

- **1 pt : La famille** $\big([V=-1]\,,[V=1]\big)$ **forme un système complet d'événements**
- **1 pt :** V **et** Y **sont indépendantes**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X > x]\big) = \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}\big([Y < -x]\big) + \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}\big([X > x]\big)$
- **1 pt : fin du premier calcul**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) = \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}\big([Y \geqslant -x]\big) + \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big)$
- **1 pt : fin du second calcul**

c) En déduire une expression de la fonction de répartition de X.

- **2 pt :** X **admet pour fonction de répartition**

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x} & \textbf{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x} & \textbf{si } x \geqslant 0 \end{array} \right. \end{array}$$

d) Conclure que X est une variable aléatoire continue admettant g comme densité.

- **1 pt :** F_X **est continue sur** $]-\infty, 0[$ **et sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt :** F_X **est continue en** 0
- **1 pt :** F_X **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $]-\infty, 0[$ **et sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt : On détermine une densité** f_X **de** X **en dérivant** F_X **sur les intervalles ouverts** $]-\infty, 0[$ **et** $]0, +\infty[$
- **1 pt : choix** $f_X(0) = \dfrac{1}{2}$

e) Compléter la fonction **Scilab** suivante pour qu'elle simule la loi de Laplace :

```
function z = laplace()
  y = expo(1)
  v = rand()
  if ... then
    z = y
  else
    z = ...
  end
endfunction
```

- **1 pt par ligne**

```
  if v > 1/2 then
    z = y
  else
    z = -y
  end
endfunction
```

B - Simulation par la méthode du rejet

Dans la méthode dite du rejet, pour simuler la loi de Z de densité g (voir les notations en préambule de la **Partie 3**), on commence par déterminer une loi de probabilité que l'on sait simuler, de densité f qui est CSP(I), et qui vérifie : il existe une constante $c > 0$ telle que : $\forall x \in I$, $g(x) \leqslant c\, f(x)$.

13. Montrer qu'il existe une fonction h continue sur I et à valeurs dans $[0,1]$ telle que, pour tout $x \in I$, $g(x) = c\, f(x)\, h(x)$.

- 1 pt : on pose

$$h \ : \ \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R}$$
$$x \ \mapsto \ \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \notin \,]a,b[\\ \dfrac{g(x)}{c\, f(x)} & \textbf{si } x \in \,]a,b[\end{cases}$$

- 1 pt : h est continue sur $]a,b[$

- 1 pt : h prend ses valeurs dans $[0,1]$

On considère alors :

× une suite de variable aléatoires $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui suivent une loi uniforme sur $]0,1[$.

× une suite de variable aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ à valeur dans $]a,b[$ ayant toutes la même loi, de densité de probabilité f et de fonction de répartition F.

On suppose de plus que pour tout entier $n \geqslant 1$, les variables $X_1, \ldots, X_n, U_1, \ldots, U_n$ sont mutuellement indépendantes.
On définit N la variable aléatoire prenant comme valeur le premier indice k vérifiant $U_k \leqslant h(X_k)$.

14. En utilisant la **Partie 1**, prouver l'égalité, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}([U_k \leqslant h(X_k)]) = \dfrac{1}{c}$.
En déduire que N suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre, l'espérance et la variance.

- 1 pt : on peut utiliser la question *3.c)*

- 1 pt : $\mathbb{P}\big([U_k \leqslant h(X_k)]\big) = \displaystyle\int_a^b f(t)\, h(t)\ dt$

- 2 pt : $\mathbb{P}\big([U_k \leqslant h(X_k)]\big) = \dfrac{1}{c}$ **(1 pt par argument)**

- 1 pt : définition de l'épreuve de Bernoulli

- 1 pt : les épreuves sont indépendantes par lemme des coalitions

- 1 pt : la probabilité de succès de chaque épreuve est égale à $\dfrac{1}{c}$

- 1 pt : La v.a.r. N est le rang d'apparition du premier succès de cette expérience

- 1 pt : $N \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{c}\right)$

- 1 pt : $\mathbb{E}(N) = c$

- 1 pt : $\mathbb{V}(N) = c\,(c-1)$

On définit la variable aléatoire X comme étant la valeur de X_N, c'est à dire la valeur de X_k pour le premier indice k vérifiant $U_k \leqslant h(X_k)$.

15. Soit $x \in I$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Exprimer l'événement $[X \leqslant x] \cap [N = n]$ à partir des événements $[X_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant h(X_n)]$ et $[U_k > h(X_k)]$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

- 2 pt : $[X \leqslant x] \cap [N = n] = [X_n \leqslant x] \cap \left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n-1} [U_k > h(X_k)]\right) \cap [U_n \leqslant h(X_n)]$

b) En utilisant la question ***3.b)***, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([X_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant h(X_n)]) = \frac{1}{c}\, G(x)$$

- 1 pt : $\mathbb{P}\big(\,[X_n \leqslant x] \,\cap\, [U_n \leqslant h(X_n)]\,\big) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, h(t)\ dt$

- 1 pt : $\mathbb{P}\big(\,[X_n \leqslant x] \,\cap\, [U_n \leqslant h(X_n)]\,\big) = \dfrac{1}{c}\ G(x)$ **bien justifié**

c) En déduire $\mathbb{P}([X_n \leqslant x] \cap [N = n])$ en fonction de c et de $G(x)$.

- 1 pt : $\mathbb{P}\big(\,[X_n \leqslant x] \cap [N = n]\,\big) = \mathbb{P}\left(\Big(\,[X_n \leqslant x] \,\cap\, [U_n \leqslant h(X_n)]\Big) \,\cap\, \Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} [U_k > h(X_k)]\Big)\right)$

- 1 pt : $\mathbb{P}\big(\,[X_n \leqslant x] \cap [N = n]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[X_n \leqslant x] \,\cap\, [U_n \leqslant h(X_n)]\,\big) \,\times\, \mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} [U_k > h(X_k)]\Big)$ **par indépendance (lemme des coalitions)**

- 2 pt : $\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} [U_k > h(X_k)]\Big) = \left(1 - \dfrac{1}{c}\right)^{n-1}$ **(1 pt calcul, 1 pt indépendance citée)**

- 1 pt : $\forall n \in \mathbb{N}^*$**,** $\mathbb{P}\big(\,[X_n \leqslant x] \cap [N = n]\,\big) \ = \ \dfrac{1}{c}\ \left(1 - \dfrac{1}{c}\right)^{n-1}\ G(x)$

d) Montrer finalement : $\mathbb{P}([X \leqslant x]) = G(x)$.

- 1 pt : La famille $\big(\,[N = n]\,\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **est un système complet d'événements**

- 1 pt : formule des probabilités totales : $\mathbb{P}\big(\,[X \leqslant x]\,\big) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\,[N = n] \,\cap\, [X \leqslant x]\,\big)$

- 3 pt : $\mathbb{P}([X \leqslant x]) = G(x)$ **(1 pt par argument)**

16. Conclure.

- 1 pt : $Z(\Omega) \subset \,]a, b[$ **et** $X(\Omega) \subset \,]a, b[$

- 1 pt : pour tout $x \in \mathbb{R}$**,** $F_X(x) = G(x)$

- 1 pt : la fonction de répartition caractérise la loi

17. Simulation de la loi normale.
Dans cette question, Z suit la loi normale centrée réduite, donc $I = \mathbb{R}$.
Soit f la densité de Laplace (question ***12.***), définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2} \mathrm{e}^{-|x|}$.

a) Donner une densité g de Z qui est CSP($\mathbb{R}$).

- 1 pt : la fonction g **définie par**

$$g \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,x^2} \end{array}$$

est une densité de Z

- 1 pt : g **est continue sur** $\mathbb{R}$

- 1 pt : g **est strictement positive sur** $\mathbb{R}$ **(car la fonction** exp **l'est)**

b) Étudier les variations sur $[0, +\infty[$ de la fonction $a : x \mapsto \mathrm{e}^{x - \frac{x^2}{2}}$.

- 1 pt : La fonction a **est dérivable sur** $[0, +\infty[$

- 1 pt : $a'(x) = (1-x)\ \mathrm{e}^{x-\frac{x^2}{2}}$

- 1 pt :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $a'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de a	1	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

c) Expliciter une constante $c > 0$ telle que, pour tout $x \geqslant 0$: $g(x) \ \leqslant\ \dfrac{c}{2}\mathrm{e}^{-x}$.

- 1 pt : $a(x) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ **donc** $\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\ \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{e}^{-x}$

- 1 pt : $c = \sqrt{\dfrac{2\,\mathrm{e}}{\pi}}$ **convient**

- 1 pt : la fonction de répartition caractérise la loi

d) En déduire, pour tout x réel : $g(x) \ \leqslant\ c\,f(x)$.

- 1 pt : Si $x \geqslant 0$, $g(x) \ \leqslant\ c\,f(x)$ **d'après la question précédente**

- 2 pt : Si $x < 0$, $g(x) \ \leqslant\ c\,f(x)$ **sans erreur sur la valeur absolue**

e) Expliquer alors comment mettre en place la méthode du rejet pour simuler la loi normale centrée réduite. On explicitera la fonction h introduite à la question ***13***.

- 1 pt : on considère la fonction :

$$h : x \mapsto \frac{g(x)}{c\,f(x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\frac{2}{\sqrt{2\,\pi}}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-|x|}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}-|x|-\frac{x^2}{2}}$$

- 2 pt : En question *13.* à *16.*, on a démontré que Z avait même loi que la v.a.r. X_N où N est la v.a.r. prenant comme valeur le premier indice k vérifiant $U_k \leqslant h(X_k)$. Afin de simuler la v.a.r. Z, on simule la v.a.r. X_N. Pour ce faire, on commence par simuler les v.a.r. U_1 et X_1. On obtient les valeurs respectives `u` et `x`. On teste alors si `u` $\leqslant h($`x`$)$. Si c'est le cas, alors `x` est la valeur permettant de simuler X_N. Sinon, on recommence l'étape de simulation jusqu'à temps d'obtenir, pour la première fois, des valeurs `u` et `x` vérifiant `u` $\leqslant h($`x`$)$. La valeur `x` est alors la valeur de simulation recherchée.

f) Compléter la fonction **Scilab** suivante pour qu'elle simule la loi normale centrée réduite :

```
function z = normale()
  x = laplace()
  u = rand()
  while ...
    x = laplace()
    u = rand()
  end
  z = ...
endfunction
```

```
1 function z = normale()
2   x = laplace()
3   u = rand()
4   while u > exp(-1/2 - abs(x) - x^2/2)
5     x = laplace()
6     u = rand()
7   end
8   z = x
9 endfunction
```

- 1 pt : ligne 4

- 1 pt : ligne 8