DS8 (version A)

Exercice 1

Soit f la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(x, y) \ = \ x^3 + y^3 - 3xy$$

Partie 1

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

b) Déterminer les points critiques de f.

3. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

b) Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.

4. Cet extremum est-il global ?

Partie 2

On note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \ = \ f(x, 1)$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x) = n$, d'inconnue x, possède une unique solution que l'on notera u_n.

6. On note h la restriction de g à $[1, +\infty[$.

a) Déterminer le tableau de variations de h^{-1}.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

c) En déduire, en revenant à la définition de u_n, le réel α pour lequel on a : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n^{\alpha}$.

Exercice 2

On désigne par E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathscr{B}$ la base (e_0, e_1, e_2) de E, où : $e_0(X) = 1$, $e_1(X) = X^2$ et $e_2(X) = X^2$.
On considère l'application, notée f, qui à tout polynôme P appartenant à E, associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) = 2X\,P(X) - (X^2 - 1)\ P'(X)$$

1. ***a)*** Montrer que f est une application linéaire.

b) En écrivant $P(X) = a + b\,X + c\,X^2$, définir explicitement $\big(f(P)\big)(X)$ puis en déduire que f est un endomorphisme de E.

c) Écrire $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ comme des combinaisons linéaires de e_0, e_1 et e_2, puis en déduire la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.

2. ***a)*** Vérifier que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_0 + e_2)$ et donner la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

3. ***a)*** À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, déterminer les valeurs propres de A.

b) En déduire que f est diagonalisable et donner les sous-espaces propres de f.

c) Vérifier que les sous-espaces propres de f, autres que $\mathrm{Ker}(f)$, sont inclus dans $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie A : Loi de Pareto

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < b \\ a\,\dfrac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geqslant b \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Pareto de paramètres a et b lorsqu'elle admet pour densité la fonction f.
Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto de paramètres a et b.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. ***a)*** Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
Montrer que la variable aléatoire $b\,U^{-\frac{1}{a}}$ suit la loi de Pareto de paramètres a et b.

b) En déduire une fonction **Scilab** d'en-tête `function X = pareto(a,b)` qui prend en arguments deux réels a et b strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

c) On considère la fonction **Scilab** ci-dessous.
Que contient la liste `L` renvoyée par la fonction `mystere` ?

```
function L = mystere(a, b)
    L = []
    for p = 2 : 6
        S = 0
        for k = 1 : 10 ^ p
            S = S + pareto(a,b)
        end
        L = [L, S / 10 ^ p]
    end
endfunction
```

d) On exécute la fonction précédente avec différentes valeurs de a et de b.
Comment interpréter les résultats obtenus ?

```
--> mystere(2,1)
   ans =
       1.9306917   1.9411352   1.9840089   1.9977684   2.0012415
--> mystere(3,2)
   ans =
       3.1050951   3.0142956   2.9849407   2.9931656   2.9991517
--> mystere(1,4)
   ans =
       21.053151   249.58609   51.230522   137.64549   40.243918
```

4. a) Montrer que X admet une espérance si et seulement si $a > 1$ et que, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) \;=\; \frac{a\,b}{a-1}$$

b) Montrer que X admet une variance si et seulement si $a > 2$ et que, dans ce cas :

$$\mathbb{V}(X) \;=\; \frac{a\,b^2}{(a-1)^2\,(a-2)}$$

Partie B : Estimation du paramètre b

On suppose **dans cette partie uniquement** que $a = 3$ et on chercher à déterminer un estimateur performant de b.
Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ \dfrac{3\,b^3}{x^4} & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.
On définit :

$$Y_n \;=\; \min(X_1, \ldots, X_n) \qquad \text{et} \qquad Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

On admet que Y_n et Z_n sont encore des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

5. ***a)*** Calculer, pour tout x de $[b, +\infty[$, $\mathbb{P}(\,[Y_n > x]\,)$.

b) En déduire que Y_n suit une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.

c) Montrer que $Y'_n = \dfrac{3n-1}{3n}\, Y_n$ est un estimateur sans biais de b.
Calculer le risque quadratique de cet estimateur.

6. ***a)*** Déterminer l'espérance et la variance de Z_n.

b) En déduire un estimateur noté Z'_n sans biais de b de la forme $\alpha\, Z_n$ où α est un réel à préciser.
Calculer le risque quadratique de cet estimateur.

7. Entre Y'_n et Z'_n, quel estimateur choisir ? Justifier.

Partie C : Estimation du paramètre a

On suppose **dans cette partie uniquement** que $b = 1$ et on cherche à construire un intervalle de confiance pour a.
Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $W_n = \ln(X_n)$.
Montrer que la variable aléatoire W_n suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
En déduire l'espérance et la variance de W_n.

9. On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$M_n \;=\; \frac{\ln(X_1) + \cdots + \ln(X_n)}{n} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sqrt{n}\,(a\, M_n - 1)$$

a) Justifier que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

b) En déduire que l'intervalle $\left[\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\, M_n} \;;\; \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\, M_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 95%.
On admettra que $\Phi(2) \geqslant 0,975$, où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Problème

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. ***a)*** Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X = n]) = (n+1)\,\dfrac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule de cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose : $V = X - U$.

2. ***a)*** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable U.

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.

c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\,\mathbb{P}([X = n]) \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}$$

d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

3. ***a)*** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.

c) En déduire la loi de V.

4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

5. Que vaut $\mathrm{Cov}(U, V)$? En déduire $\mathrm{Cov}(X, U)$?

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0, 1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose de la pièce amenant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

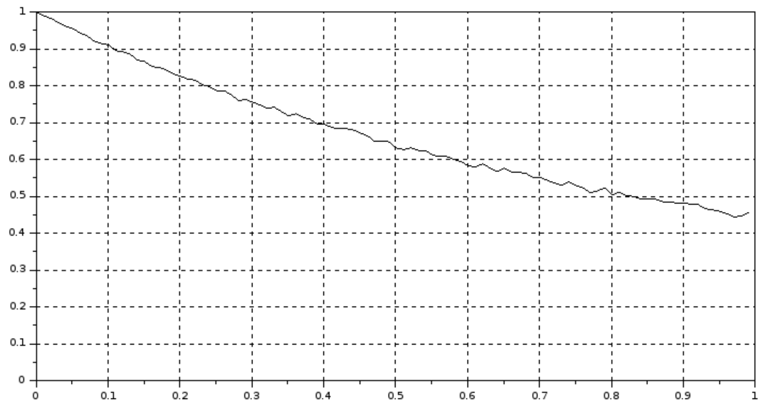
6. **Simulation informatique**

a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function x = simule_X()` qui simule la v.a.r. X.

b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0,1[$, simule la variable aléatoire Y. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
function r = mystere(p)
    r = 0
    N = 10^4
    for k = 1:N
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y then
            r = r + 1/N
        end
    end
endfunction
```

c) On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour laquelle le jeu serait équilibré.

7. **Étude de la variable aléatoire** Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

a) Reconnaître la loi de Z et préciser son (ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.

b) Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y \geqslant n]) = (1-p)^n$.

8. ***a)*** Montrer : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\, \mathbb{P}([Y \geqslant n])$.

b) Déduire des résultats précédents : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \dfrac{4}{(2+p)^2}$.

c) Déterminer la valeur de p pour lequel le jeu est équilibré.