

DS8 (version A)

EXERCICE

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients réels et B_n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1.

1. *Exemple 1.* Soit A la matrice de B_2 définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice A^2 .

- 1 pt : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I_2$

b) Quelles sont les valeurs propres de A ?

- 1 pt : D'après la question 1.a), $A^2 - I_2 = 0$. On en déduit que le polynôme $P(X) = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ est un polynôme annulateur de A .

- 1 pt : $\text{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$

- 1 pt : 1 est bien valeur propre de A

- 1 pt : -1 est bien valeur propre de A

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

- 1 pt : La matrice A est carrée d'ordre 2 et admet 2 valeurs propres distinctes donc la matrice A est diagonalisable

2. *Exemple 2.* Soit B la matrice de B_3 définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les instructions et la sortie (ans) **Scilab** suivantes :

```
1 B = [0,1,0;1,0,0;0,0,1]
2 P = [1,1,0;1,-1,0;0,0,1]
3 inv(P) * B * P
```

```
ans =
  1.  0.  0.
  0. -1.  0.
  0.  0.  1.
```

a) Déduire les valeurs propres de B de la séquence **Scilab** précédente.

- 1 pt : Notons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'après la séquence Scilab, $P^{-1}BP = D$, d'où $B = PDP^{-1}$

- 1 pt : Ainsi, B est semblable à la matrice diagonale D . Elle est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux de D

- 1 pt : $\text{Sp}(B) = \{-1, 1\}$

b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de B .

- **1 pt** : La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ constituée des colonnes de la matrice P est une base de vecteurs propres de B
- **2 pt** : $E_{-1}(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$
- **2 pt** : $E_1(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

3. a) Combien existe-t-il de matrices appartenant à B_n ?

- **1 pt** : Une matrice M de B_n est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont chaque coefficient vaut soit 0 soit 1. On a 2 choix pour chaque coefficient et il y a n^2 coefficients
- **1 pt** : $\text{Card}(B_n) = 2^{n^2}$

b) Combien existe-t-il de matrices de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 ?

- **1 pt** : Une matrice M de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 est entièrement déterminée par :
 - × la position du 1 sur la 1^{ère} ligne : n possibilités.
(on peut le placer sur n'importe quelle colonne)
 - × la position du 1 sur la 2^{ème} ligne : $n - 1$ possibilités.
(on peut le placer sur n'importe quelle colonne non déjà choisie)
 - × la position du 1 sur la 3^{ème} ligne : $n - 2$ possibilités.
(on peut le placer sur n'importe quelle colonne non déjà choisie)
 - × ...
 - × la position du 1 sur la $n^{\text{ème}}$ ligne : 1 possibilité.
(on peut le placer sur n'importe quelle colonne non déjà choisie)
- **1 pt** : L'ensemble des matrices de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 comporte exactement $n!$ éléments

4. Dans cette question, n est un entier supérieur ou égal à 2.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E . On note :

- id l'endomorphisme identité de E ;
- F le noyau de l'endomorphisme $(u + \text{id})$ et G le noyau de l'endomorphisme $(u - \text{id})$;
- p la dimension de F et q la dimension de G .

On suppose que $u \circ u = \text{id}$.

a) Justifier que l'image de $(u - \text{id})$ est incluse dans F .

- **1 pt** : Soit $y \in \text{Im}(u - \text{id})$. Montrons que $y \in F = \text{Ker}(u + \text{id})$
- **1 pt** : Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = (u - \text{id})(x) = u(x) - x$
- **3 pt** : $(u + \text{id})(y) = 0_E$ (**2 pt** pour les justifications)

b) En déduire l'inégalité : $p + q \geq n$.

- **1 pt** : $\text{Im}(u - \text{id}) \subset \text{Ker}(u + \text{id})$. Ainsi : $\dim(\text{Im}(u - \text{id})) \leq \dim(\text{Ker}(u + \text{id})) = p$
- **1 pt** : D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(u - \text{id})) = n - q$

On suppose désormais que $1 \leq p < q$.

Soit (f_1, f_2, \dots, f_p) une base de F et (g_1, g_2, \dots, g_q) une base de G .

c) Justifier que $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_q)$ est une base de E .

- **1 pt** : $\dim(\text{Ker}(u + \text{id})) = p \geq 1$. **En particulier** : $\text{Ker}(u + \text{id}) \neq \{0_E\}$. **Ainsi, -1 est valeur propre de u et $F = \text{Ker}(u + \text{id}) = E_{-1}(u)$**

- **1 pt** : $\dim(\text{Ker}(u - \text{id})) = q > 1$. **En particulier** : $\text{Ker}(u - \text{id}) \neq \{0_E\}$. **Ainsi, 1 est valeur propre de u et $G = \text{Ker}(u - \text{id}) = E_1(u)$**

- **1 pt** : **On a alors :**

× **la famille (f_1, f_2, \dots, f_p) est une base de $E_{-1}(u)$.**

En particulier, c'est donc une famille libre de $E_{-1}(u)$.

× **la famille (g_1, g_2, \dots, g_q) est une base de $E_1(u)$.**

En particulier, c'est donc une famille libre de $E_1(u)$.

- **1 pt** : **La famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_q)$ est la concaténation de deux familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes. Ainsi, \mathcal{F} est une famille libre de E**

- **1 pt** : **par liberté, $\text{Card}(\mathcal{F}) = p + q \leq \dim(E) = n$**

- **1 pt** : **Or, d'après la question précédente : $p + q \geq n$ donc $p + q = n$**

- **1 pt** : **la famille \mathcal{F} est libre et $\text{Card}(\mathcal{F}) = n = \dim(E)$ donc \mathcal{F} est une base de E**

d) Calculer $u(g_1 - f_1)$ et $u(g_1 + f_1)$.

- **1 pt** : $u(g_1 - f_1) = g_1 + f_1$

- **1 pt** : $u(g_1 + f_1) = g_1 - f_1$

e) Trouver une base de E dans laquelle la matrice de u appartient à B_n .

- **1 pt** : **On considère \mathcal{B}' la famille :**

$$\mathcal{B}' = (g_1 - f_1, g_1 + f_1, g_2 - f_2, g_2 + f_2, \dots, g_p - f_p, g_p + f_p, g_{p+1}, g_{p+2}, \dots, g_q)$$

- **3 pt** : **\mathcal{B}' est une famille libre**

- **1 pt** : **$\text{Card}(\mathcal{B}') = n = \dim(E)$ donc \mathcal{B}' est une base de E**

- **3 pt** : **la matrice de u dans la base \mathcal{B}' ne contient que des 1 et des 0**

PROBLÈME

Les tables de mortalité sont utilisées en démographie et en actuariat pour prévoir l'espérance de vie des individus d'une population. On s'intéresse dans ce problème à un modèle qui permet d'ajuster la durée de vie à des statistiques portant sur les décès observés au sein d'une génération.

Dans tout le problème, on note :

- a et b deux réels strictement positifs ;
- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires du problème ;
- $G_{a,b}$ la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par : $G_{a,b}(x) = \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right)$.

Partie I. Loi exponentielle linéaire

1. a) Montrer que la fonction $G_{a,b}$ réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur l'intervalle $]0, 1]$.

b) Pour tout réel $y > 0$, résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $ax + \frac{b}{2}x^2 = y$.

c) On note $G_{a,b}^{-1}$ la bijection réciproque de $G_{a,b}$.

Quelle est, pour tout $u \in [0, 1[$, l'expression de $G_{a,b}^{-1}(1 - u)$?

2. a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x) dx$.

b) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}b\left(x + \frac{a}{b}\right)^2\right)$.

Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire suivant une loi normale dont on précisera les paramètres (espérance et variance).

c) Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Déduire de la question 2.b), l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x) dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right)$$

3. Pour tout $a > 0$ et pour tout $b > 0$, on pose : $f_{a,b}(x) = \begin{cases} (a + bx) \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

a) Justifier que la fonction $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle linéaire de paramètres a et b , notée $\mathcal{E}_\ell(a, b)$, si elle admet $f_{a,b}$ pour densité.

b) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}_\ell(a, b)$. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ telle que : $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} G_{a,b}(x) dx$.

4. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose : $X = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2bY}}{b}$.

a) Justifier que pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $\mathbb{P}([X \geq x]) = G_{a,b}(x)$.

b) En déduire que X suit la loi $\mathcal{E}_\ell(a, b)$.

c) On note U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

Déterminer la loi de la variable aléatoire $G_{a,b}^{-1}(1 - U)$.

5. La fonction **Scilab** suivante génère des simulations de la loi exponentielle linéaire.

```

1  function x = grandlinexp(a,b,n)
2      u = rand(n,1)
3      y = .....
4      x = (-a + sqrt(a ^ 2 + 2 * b * y)) / b
5  endfunction

```

- a) Quelle est la signification de la ligne de code 2 ?
- b) Compléter la ligne de code 3 pour que la fonction **grandlinexp** génère les simulations désirées.

6. De quel nombre réel peut-on penser que les six valeurs générées par la boucle **Scilab** suivante fourniront des valeurs approchées de plus en plus précises et pourquoi ?

```

1  for k = 1:6
2      mean(grandlinexp(0, 1, 10 ^ k))
3  end

```

Dans la suite du problème, on note $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi exponentielle linéaire $\mathcal{E}_\ell(a, b)$ dont les paramètres $a > 0$ et $b > 0$ sont inconnus.

Soit h un entier supérieur ou égal à 2. On suit pendant une période de h années, une « cohorte » de n individus de même âge au début de l'étude et on modélise leurs durées de vie respectives à partir de cette date par les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n .

Partie II. Premier décès et intervalle de confiance de a

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les variables aléatoires M_n, H_n et U_n par :

$$M_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad H_n = \min(h, X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad U_n = nH_n.$$

7. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la probabilité $\mathbb{P}([M_n \geq x])$.

Reconnaître la loi de la variable aléatoire M_n .

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_{U_n} la fonction de répartition de la variable aléatoire U_n .

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$F_{U_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-ax - \frac{b}{2n}x^2\right) & \text{si } 0 \leq x < nh \\ 1 & \text{si } x \geq nh \end{cases} .$$

b) Étudier la continuité de la fonction F_{U_n} .

c) La variable aléatoire U_n admet-elle une densité ?

d) Montrer que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

9. Soit $\alpha \in]0, 1[$.

a) Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Trouver deux réels c et d strictement positifs tels que :

$$\mathbb{P}([c \leq Y \leq d]) = 1 - \alpha \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Y \leq c]) = \frac{\alpha}{2}$$

b) Montrer que $\left[\frac{c}{U_n}, \frac{d}{U_n} \right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de a , de niveau de confiance $1 - \alpha$.

Partie III. Nombre de survivants et estimateur convergent de b

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, soit S_i et D_i les variables aléatoires telles que :

$$S_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \geq h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad D_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\bar{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i$ et $\bar{D}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i$.

10. a) Justifier que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\mathbb{E}(S_i) = G_{a,b}(h)$ et calculer $\mathbb{E}(S_i D_i)$.

b) Pour quels couples $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, les variables aléatoires S_i et D_j sont-elles indépendantes ?

c) Dédurre des questions précédentes l'expression de la covariance $\text{Cov}(\bar{S}_n, \bar{D}_n)$ de \bar{S}_n et \bar{D}_n en fonction de n , $G_{a,b}(h)$ et $G_{a,b}(1)$. Le signe de cette covariance était-il prévisible ?

11. a) Montrer que \bar{S}_n est un estimateur sans biais et convergent du paramètre $G_{a,b}(h)$.

b) De quel paramètre, \bar{D}_n est-il un estimateur sans biais et convergent ?

12. On pose : $z(a, b) = \ln(G_{a,b}(1))$ et $r(a, b) = \ln(G_{a,b}(h))$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Z_n = \ln\left(1 - \bar{D}_n + \frac{1}{n}\right)$ et $R_n = \ln\left(\bar{S}_n + \frac{1}{n}\right)$.

On admet que Z_n et R_n sont des estimateurs convergents de $z(a, b)$ et $r(a, b)$ respectivement.

a) Soit ε , λ et μ des réels strictement positifs.

(i) Justifier l'inclusion suivante :

$$\left[|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a, b) - \mu r(a, b))| \geq \varepsilon \right] \subset \left[\lambda |Z_n - z(a, b)| + \mu |R_n - r(a, b)| \geq \varepsilon \right].$$

(ii) En déduire l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}\left(|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a, b) - \mu r(a, b))| \geq \varepsilon \right) \leq \mathbb{P}\left(\left[|Z_n - z(a, b)| \geq \frac{\varepsilon}{2\lambda} \right] \right) + \mathbb{P}\left(\left[|R_n - r(a, b)| \geq \frac{\varepsilon}{2\mu} \right] \right).$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $B_n = \frac{2}{h-1} Z_n - \frac{2}{h(h-1)} R_n$.

Montrer que B_n est un estimateur convergent du paramètre b .