

1 Exercices

Consignes pour les exercices 1 à 4 : pour tout i ,

- montrer que f_i est linéaire,
- déterminer $\text{Ker}(f_i)$ et en donner une base,
- déterminer $\text{Im}(f_i)$ et en donner une base,
- calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f_i)$ où \mathcal{B}_E (resp. \mathcal{B}_F) est la base canonique de l'espace de départ (resp. d'arrivée).

Exercice 1 : Applications linéaires entre espaces de vecteurs colonnes.

$$\begin{array}{l}
 1. f_1 : \begin{cases} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x + y \\ y - z \end{pmatrix} \end{cases} \\
 2. f_2 : \begin{cases} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + y \end{pmatrix} \end{cases} \\
 3. f_3 : \begin{cases} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ y - z \\ x + 3z \end{pmatrix} \end{cases} \\
 4. f_4 : \begin{cases} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ y \\ x + 3z \end{pmatrix} \end{cases} \\
 5. f_5 : \begin{cases} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 3x + y - z \end{cases} \\
 6. f_6 : \begin{cases} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 3x \end{cases} \\
 7. f_7 : \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x + y \\ x - y \\ x + 2y \end{pmatrix} \end{cases} \\
 8. f_8 : \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x - 2y \\ 10x - 4y \\ -15x + 6y \end{pmatrix} \end{cases}
 \end{array}$$

Exercice 2 : Applications linéaires entre espaces \mathbb{R}^n .

$$\begin{array}{l}
 1. f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (3x + 4y, -5x + y) \end{cases} \\
 2. f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (3x + 4y, 6x + 8y) \end{cases} \\
 3. f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (4y, 2x + 3y, -x - 5y) \end{cases} \\
 4. f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (y + 2z, x - 3z) \end{cases}
 \end{array}$$

Exercice 3 : Applications linéaires entre espaces de polynômes.

$$\begin{array}{l}
 1. f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ P(X) \mapsto P(1) \end{cases} \\
 2. f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) - P(X-1) \end{cases} \\
 3. f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) \mapsto P'(X) \end{cases} \\
 4. f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) \mapsto XP(X+2) \end{cases}
 \end{array}$$

Exercice 4 : Applications linéaires entre espaces de matrices. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{l}
 1. f_1 : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM \end{cases} \\
 2. f_2 : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto MA \end{cases} \\
 3. f_3 : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM + BM \end{cases} \\
 4. f_4 : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM - BM \end{cases} \\
 5. f_5 : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM - MA \end{cases} \\
 6. f_6 : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM - MB \end{cases}
 \end{array}$$

Exercice 5 :

$$1. f_1 : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ h & \mapsto h' - 2h \end{cases}$$

$$2. f_2 : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ h & \mapsto 3h' + 4h \end{cases}$$

2 Réponses courtes

3 Corrections détaillées