1 Exercices

Exercice 1 : On lance 4 fois une pièce de monnaie, qui tombe sur Face avec probabilité $p \in]0,1[$.

1. Introduire les événements élémentaires associés à cette expérience.
2. Calculer les probabilités des événements suivants à l'aide des événements élementaires.

   (a) A : « on ne tombe jamais sur Pile »

   (b) B : « on ne tombe jamais sur Face »

   (c) C : « Face n'est jamais suivi de Pile »

   (d) D : « Pile n'est jamais suivi de Face »

   (e) E : « on a obtenu 2 Face consécutifs mais pas 3 Face consécutifs »

   (f) F : « on a obtenu 3 Face consécutifs mais pas 4 Face consécutifs »

   (g) G : « on a obtenu la séquence Pile puis Face puis Pile »

   (h) H : « on a obtenu la séquence Pile puis Face puis Pile mais pas la séquence Face puis Pile puis Face »

Exercice 2 : *(La loi géométrique tronquée, EDHEC 2022)*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce de monnaie, qui tombe sur Face avec probabilité $p \in]0,1[$. On définit Z la v.a.r. égale au rang du premier Face obtenu, ou à 0 si on n'obtient jamais Face.

1. Introduire les événements élémentaires associés à cette expérience.
2. Calculer $\mathbb{P}([Z = 0])$.
3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Calculer $\mathbb{P}([Z = k])$.

Exercice 3 : *(Rang auquel on obtient, pour la première fois, deux Pile consécutifs, ECRICOME 2021)*
On lance indéfiniment une pièce équilibrée.
On note X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on a obtenu deux Pile consécutifs.
Si on n'obtient jamais deux Pile consécutifs, on conviendra que X prend la valeur -1.
Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face,... alors X prend la valeur 5.

1. Introduire les événements élémentaires associés à cette expérience.
2. Calculer $\mathbb{P}([X = 2])$.
3. Calculer $\mathbb{P}([X = 3])$.
4. Calculer $\mathbb{P}([X = 4])$.

2 Réponses courtes

Réponses de l'exercice 1 :

1. Pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, on note

$$F_k : \text{« la pièce tombe sur Face lors du } k^{\text{e}} \text{ lancer »}$$
$$P_k : \text{« la pièce tombe sur Pile lors du } k^{\text{e}} \text{ lancer »}$$

2. (a) $A = F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$ et $\mathbb{P}(A) = p^4$
   (b) $B = P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4$ et $\mathbb{P}(B) = (1-p)^4$
   (c) $C = (F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4)$ et
   $$\mathbb{P}(C) = \begin{cases} \frac{p^5-(1-p)^5}{2p-1} & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2^4} & \text{si } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$
   (d) $D = (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4)$ et
   $$\mathbb{P}(D) = \begin{cases} \frac{p^5-(1-p)^5}{2p-1} & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2^4} & \text{si } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$
   (e) $E = (F_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_2 \cap F_3 \cap F_4)$ et $\mathbb{P}(E) = p^2(1-p)(3-p)$
   (f) $F = (F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4)$ et $\mathbb{P}(F) = 2p^3(1-p)$
   (g) $G = (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (P_2 \cap F_3 \cap P_4)$ et $\mathbb{P}(G) = 2p(1-p)^2$
   (h) $H = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4)$ et $\mathbb{P}(H) = 2p(1-p)^3$

Réponses de l'exercice 2 :

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note

$$F_k : \text{« la pièce tombe sur Face lors du } k^{\text{e}} \text{ lancer »}$$
$$P_k : \text{« la pièce tombe sur Pile lors du } k^{\text{e}} \text{ lancer »}$$

2. $\mathbb{P}([Z = 0]) = (1-p)^n$
3. $\mathbb{P}([Z = k]) = p(1-p)^{k-1}$

Réponses de l'exercice 3 :

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note

$$F_k : \text{« la pièce tombe sur Face lors du } k^{\text{e}} \text{ lancer »}$$
$$P_k : \text{« la pièce tombe sur Pile lors du } k^{\text{e}} \text{ lancer »}$$

2. $\mathbb{P}([X = 2]) = \frac{1}{4}$
3. $\mathbb{P}([X = 3]) = \frac{1}{8}$
4. $\mathbb{P}([X = 4]) = \frac{1}{8}$

3 Corrections détaillées

Correction détaillée de l'exercice 1 :

1. Pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, on note

$$F_k : \text{« la pièce tombe sur Face lors du } k^{\text{e}} \text{ lancer »}$$
$$P_k : \text{« la pièce tombe sur Pile lors du } k^{\text{e}} \text{ lancer »}$$

2. (a)

$$\begin{aligned} A \text{ est réalisé} &\iff \text{la pièce tombe sur Face à chaque lancer} \\ &\iff \forall k \in [\![1, 4]\!],\ F_k \text{ est réalisé} \\ &\iff \bigcap_{k=1}^{4} F_k \text{ est réalisé} \end{aligned}$$

Donc $A = F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) \\ &= \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}(F_3)\mathbb{P}(F_4) && \text{(par indépendance des lancers)} \\ &= p^4 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} B \text{ est réalisé} &\iff \text{la pièce tombe sur Pile à chaque lancer} \\ &\iff \forall k \in [\![1, 4]\!],\ P_k \text{ est réalisé} \\ &\iff \bigcap_{k=1}^{4} P_k \text{ est réalisé} \end{aligned}$$

Donc $B = P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4) \\ &= \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2)\mathbb{P}(P_3)\mathbb{P}(P_4) && \text{(par indépendance des lancers)} \\ &= (1-p)^4 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} C \text{ est réalisé} &\iff \text{Face n'est jamais suivi de Pile} \\ &\iff \text{si on tombe sur Face, alors on tombe toujours sur Face ensuite} \\ &\iff \begin{array}{ll} & F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \text{ est réalisé} \\ \text{ou} & P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \text{ est réalisé} \\ \text{ou} & P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4 \text{ est réalisé} \\ \text{ou} & P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4 \text{ est réalisé} \\ \text{ou} & P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4 \text{ est réalisé} \end{array} && \begin{array}{l}\text{(en faisant une disjonction de cas selon} \\ \text{le rang du premier Face obtenu)}\end{array} \end{aligned}$$

Donc $C = (F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4)$.
Par incompatibilité, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C) = {} & \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) + \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4) \\ & + \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4) + \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4) \end{aligned}$$

Puis par indépendance des lancers :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}(F_3)\mathbb{P}(F_4) + \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}(F_3)\mathbb{P}(F_4) + \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2)\mathbb{P}(F_3)\mathbb{P}(F_4) \\ &\quad + \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2)\mathbb{P}(P_3)\mathbb{P}(F_4) + \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2)\mathbb{P}(P_3)\mathbb{P}(P_4) \\ &= \sum_{k=0}^{4} p^{4-k}(1-p)^k \end{aligned}$$

Deux cas se présentent.

Si $p = \frac{1}{2}$ *:* alors $\sum_{k=0}^{4} p^{4-k}(1-p)^k = \sum_{k=0}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{4} = \frac{5}{2^4}$

Si $p \neq \frac{1}{2}$ *:* alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{4} p^{4-k}(1-p)^k &= p^4 \sum_{k=0}^{4} \left(\frac{1-p}{p}\right)^k \\
&= p^4 \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^5}{1-\frac{1-p}{p}} && \text{car } \frac{1-p}{p} \neq 1 \\
&= p^5 \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^5}{2p-1} \\
&= \frac{p^5-(1-p)^5}{2p-1}
\end{aligned}$$

(d) La démonstration est la même que pour l'événement C, en intervertissant les rôles de Pile et de Face et en remplaçant p par $1-p$.

(e)

E est réalisé $\iff$ on a obtenu 2 Face consécutifs mais pas 3 Face consécutifs

$\iff$ on a obtenu 2 Face consécutifs et toute séquence de 2 Face consécutifs ne peut être précédée / suivie que d'un Pile

$\iff$ $F_1 \cap F_2 \cap P_3$ est réalisé ou $P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4$ est réalisé ou $P_2 \cap F_3 \cap F_4$ est réalisé (en faisant une disjonction de cas selon le rang du premier des 2 Face obtenus consécutivement)

Donc $E = (F_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_2 \cap F_3 \cap F_4)$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap P_3) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) + \mathbb{P}(P_2 \cap F_3 \cap F_4) && \text{(par incompatibilité)} \\
&= \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}(P_3) + \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}(F_3)\mathbb{P}(P_4) + \mathbb{P}(P_2)\mathbb{P}(F_3)\mathbb{P}(F_4) && \text{(par indépendance des lancers)} \\
&= p^2(1-p) + (1-p)^2p^2 + p^2(1-p) \\
&= p^2(1-p)(3-p)
\end{aligned}$$

(f)

F est réalisé $\iff$ on a obtenu 3 Face consécutifs mais pas 4 Face consécutifs

$\iff$ on a obtenu 3 Face consécutifs et toute séquence de 3 Face consécutifs ne peut être précédée / suivie que d'un Pile

$\iff$ $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4$ est réalisé ou $P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$ est réalisé (en faisant une disjonction de cas selon le rang du premier des 3 Face obtenus consécutivement)

Donc $F = (F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4)$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) && \text{(par incompatibilité)} \\
&= \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}(F_3)\mathbb{P}(P_4) + \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}(F_3)\mathbb{P}(F_4) && \text{(par indépendance des lancers)} \\
&= p^3(1-p) + (1-p)p^3 \\
&= 2p^3(1-p)
\end{aligned}$$

(g)

G est réalisé $\iff$ on a obtenu la séquence Pile puis Face puis Pile

$\iff$ $P_1 \cap F_2 \cap P_3$ est réalisé ou $P_2 \cap F_3 \cap P_4$ est réalisé (en faisant une disjonction de cas selon le rang du premier Pile de cette séquence)

Donc $G = (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (P_2 \cap F_3 \cap P_4)$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G) &= \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap P_3) + \mathbb{P}(P_2 \cap F_3 \cap P_4) && \text{(par incompatibilité)}\\
&= \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}(P_3) + \mathbb{P}(P_2)\mathbb{P}(F_3)\mathbb{P}(P_4) && \text{(par indépendance des lancers)}\\
&= p(1-p)^2 + p(1-p)^2\\
&= 2p(1-p)^2
\end{aligned}$$

(h)

H est réalisé $\iff$ on a obtenu la séquence Pile puis Face puis Pile mais pas la séquence Face puis Pile puis Face

$\iff$ $P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4$ est réalisé ou $P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4$ est réalisé (en faisant une disjonction de cas selon le rang du premier Pile de la séquence Pile puis Face puis Pile)

Donc $H = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4)$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(H) &= \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) + \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) && \text{(par incompatibilité)}\\
&= \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}(P_3)\mathbb{P}(P_4) + \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2)\mathbb{P}(F_3)\mathbb{P}(P_4) && \text{(par indépendance des lancers)}\\
&= p(1-p)^3 + p(1-p)^3\\
&= 2p(1-p)^3
\end{aligned}$$

Correction détaillée de l'exercice 2 :

1. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note

$$F_k : \text{« la pièce tombe sur Face lors du } k^{\text{e}} \text{ lancer »}$$
$$P_k : \text{« la pièce tombe sur Pile lors du } k^{\text{e}} \text{ lancer »}$$

2.

$$\begin{aligned}
[Z=0] \text{ est réalisé} &\iff \text{on n'obtient jamais Face}\\
&\iff \text{on obtient Pile à chaque lancer}\\
&\iff \text{pour tout } k \in [\![1,n]\!],\ P_k \text{ est réalisé}\\
&\iff \bigcap_{k=1}^{n} P_k \text{ est réalisé}
\end{aligned}$$

Donc $[Z=0] = \bigcap_{k=1}^{n} P_k$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z=0]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} P_k\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(P_k) && \text{(par indépendance des lancers)}\\
&= \prod_{k=1}^{n} (1-p)\\
&= (1-p)^n
\end{aligned}$$

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
[Z = k] \text{ est réalisé } &\iff \text{le premier Face est obtenu au rang } k \\
&\iff \text{on obtient Face au lancer numéro } k \text{ et Pile aux lancers précédents} \\
&\iff P_1 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap F_k \text{ est réalisé}
\end{aligned}$$

Donc $[Z = k] = P_1 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap F_k$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z = k]) &= \mathbb{P}(P_1 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap F_k) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(P_i)\right) \mathbb{P}(F_k) && \text{(par indépendance des lancers)} \\
&= p \prod_{i=1}^{k-1} (1-p) \\
&= p(1-p)^{k-1}
\end{aligned}$$

Correction détaillée de l'exercice 3 :

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note

F_k : « la pièce tombe sur Face lors du k^{e} lancer »
P_k : « la pièce tombe sur Pile lors du k^{e} lancer »

2.

$$\begin{aligned}
[X = 2] \text{ est réalisé } &\iff \text{on obtient pour la première fois deux Pile consécutifs au rang 2} \\
&\iff \text{on obtient Pile au lancer numéro 1 et Pile au lancer numéro 2} \\
&\iff P_1 \cap P_2 \text{ est réalisé}
\end{aligned}$$

Donc $[X = 2] = P_1 \cap P_2$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = 2]) &= \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) \\
&= \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) && \text{(par indépendance des lancers)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} && \text{(la pièce étant équilibrée)} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
[X = 3] \text{ est réalisé } &\iff \text{on obtient pour la première fois deux Pile consécutifs au rang 3} \\
&\iff \begin{array}{ll} & \text{on obtient Pile au lancer numéro 3} \\ \text{et} & \text{on obtient Pile au lancer numéro 2} \\ \text{et} & \text{on obtient Face au lancer numéro 1} \end{array} \quad \textit{(sinon on obtiendrait deux Pile consécutifs au rang 2)} \\
&\iff F_1 \cap P_2 \cap P_3 \text{ est réalisé}
\end{aligned}$$

Donc $[X = 3] = F_1 \cap P_2 \cap P_3$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = 3]) &= \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap P_3) \\
&= \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(P_2)\mathbb{P}(P_3) && \text{(par indépendance des lancers)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} && \text{(la pièce étant équilibrée)} \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

4.

$[X = 4]$ est réalisé $\iff$ on obtient pour la première fois deux Pile consécutifs au rang 4

$\iff \begin{cases} & \text{on obtient Pile au lancer numéro 4} \\ \text{et} & \text{on obtient Pile au lancer numéro 3} \\ \text{et} & \text{on obtient Face au lancer numéro 2} \\ \text{et} & \text{on obtient Pile ou Face au lancer numéro 1} \end{cases}$

(sinon on obtiendrait deux Pile consécutifs au rang 3)

(aucune des deux possibilités ne crée de nouvelle séquence de deux Pile consécutifs)

$\iff F_2 \cap P_3 \cap P_4$ est réalisé

Donc $[X = 4] = F_2 \cap P_3 \cap P_4$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = 4]) &= \mathbb{P}\left(F_2 \cap P_3 \cap P_4\right) \\
&= \mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}(P_3)\mathbb{P}(P_4) && \text{(par indépendance des lancers)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} && \text{(la pièce étant équilibrée)} \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$