1 Le cours

Théoreme 1 (Intégration par parties)**.** *Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Soit $(a,b) \in I^2$. Alors*

$$\boxed{\int_a^b u'(t)\ v(t)\ \mathrm{d}t = \left[\ u(t)\ v(t)\ \right]_a^b - \int_a^b u(t)\ v'(t)\ \mathrm{d}t}$$

ou bien

$$\boxed{\int_a^b u(t)\ v'(t)\ \mathrm{d}t = \left[\ u(t)\ v(t)\ \right]_a^b - \int_a^b u'(t)\ v(t)\ \mathrm{d}t}$$

Méthode. Explicitons la méthode de rédaction sur un exemple.
Nous allons calculer $\displaystyle\int_1^2 \ln(t)\ \mathrm{d}t$ à l'aide d'une IPP. On pose

$$\left|\begin{array}{ll} u'(t) = 1 & u(t) = t \\ v(t) = \ln(t) & v'(t) = \dfrac{1}{t} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$.

$$\int_1^2 \ln(t)\ \mathrm{d}t = \left[\ t\ln(t)\ \right]_1^2 - \int_1^2 1\ \mathrm{d}t = 2\ln(2) - 1$$

Théoreme 2 (Changement de variable)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J = [\alpha, \beta]$ tq $\varphi([\alpha,\beta]) \subseteq I$, où $\alpha < \beta$ sont deux réels. Alors*

$$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\ \varphi'(u)\mathrm{d}u}$$

Méthode. Explicitons la méthode de rédaction sur un exemple.
Nous allons calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t + 2\sqrt{t}}$ à l'aide du changement de variable $\boxed{u = \sqrt{t}}$.

$$\left|\begin{array}{lcl} t = \varphi(u) = u^2 & & u = \sqrt{t} \\ \mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u & & \mathrm{d}u = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t \\ t = 1 & \Longleftrightarrow & u = \sqrt{1} = 1 \\ t = 2 & \Longleftrightarrow & u = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car la fonction $\varphi : u \mapsto u^2$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[1, \sqrt{2}]$.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{dt}{t + 2\sqrt{t}} &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{u^2 + u}\, 2u\ \mathrm{d}u \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{u(u+1)}\, 2u\ \mathrm{d}u \\
&= 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{(u+1)}\ \mathrm{d}u \\
&= 2\left[\ \ln(|u+1|)\ \right]_1^{\sqrt{2}} \\
&= 2\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)
\end{aligned}$$

2 Exercices sur l'IPP

Exercice 1 : Quelques exemples importants à savoir refaire.

1. $\displaystyle\int_0^B xe^{-x}\ \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^B x^2e^x\ \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_A^1 x\ln(x)\ \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_A^1 x^k\ln(x)\ \mathrm{d}x$

Exercice 2 : Un cas où les fonctions u et v sont un peu difficiles à trouver (EML 2012).
Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, pour tout $a > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\int_0^t x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\ \mathrm{d}x = -a^2t^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}} + (n-1)a^2\int_0^t x^{n-2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\ \mathrm{d}x$$

Exercice 3 : Deux IPP à l'EDHEC 2020.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\ \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\ \mathrm{d}x$$

1. Calculer I_1.
2. Établir, à l'aide d'une intégration par parties : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = n\,J_{n-1} - \dfrac{1}{2}$

Exercice 4 : Une autre IPP à l'EDHEC 2019.
Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n\ \mathrm{d}t$.
Établir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1})$$

3 Exercices sur le changement de variable

Exercice 5 : Quelques exemples.

1. $\displaystyle\int_{\ln(3)}^{3\ln(2)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}}$ avec $\boxed{u = \sqrt{1+\mathrm{e}^t}}$
2. $\displaystyle\int_1^{64} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}$ avec $\boxed{t = u^6}$
3. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln(t))^n}{t}\ \mathrm{d}t$ avec $\boxed{u = \ln(t)}$
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t + t(\ln(t))^2}\ \mathrm{d}t$ avec $\boxed{u = \ln(t)}$

Exercice 6 : Un changement de variable à l'EDHEC 2019.

1. Rappeler la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\ \mathrm{d}t$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,t^2}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 7 : Un changement de variable à ECRICOME 2021.
Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et y un réel de $]0,1]$.
À l'aide du changement de variable : $u = -\ln(t)$, démontrer :

$$\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\ \mathrm{d}t = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+\mathrm{e}^{-nu}}\ \mathrm{e}^{-u}\ du$$

4 Réponses courtes

Réponses de l'exercice 1 :

1. $1 - \mathrm{e}^{-B} - B\mathrm{e}^{-B} = 1 - \dfrac{1+B}{\mathrm{e}^{B}}$
2. $-2 + \mathrm{e}^{B}(B^2 - 2B + 2)$
3. $\dfrac{1}{4}A^2 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}A^2\ln(A)$
4. $\dfrac{1}{(k+1)^2}A^{k+1} - \dfrac{1}{(k+1)^2} - \dfrac{A^{k+1}}{k+1}\ln(A)$

Réponses de l'exercice 2 : on pose $u(x) = x^{n-1}$ et $v'(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$

Réponses de l'exercice 3 :

1. $\ln(2) - \frac{1}{2}$
2. on pose $u(x) = x^n$ et $v'(x) = (1+x)^{-2}$.

Réponses de l'exercice 4 : on pose $u(x) = \left(1-t^2\right)^n$ et $v'(x) = 1$

Réponses de l'exercice 5 :

1. $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$
2. $11 + 6\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$
   Faire un 2$^{\mathrm{e}}$ changement de variable $z = u + 1$
   $\displaystyle\int_1^2 \frac{6u^3}{u+1}\mathrm{d}u = \int_2^3 \frac{6(z-1)^3}{z}\mathrm{d}z$
3. $\dfrac{1}{n+1}$
4. $\dfrac{1}{2}\ln\left(1 + (\ln(2))^2\right)$

Réponses de l'exercice 6 :

1. 1
2. $\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$

Réponses de l'exercice 7 : Faire attention aux signes moins.