Considérons un événement A. On souhaite calculer $\mathbb{P}(A)$. Il y a trois étapes à respecter :

1. Si l'énoncé ne l'a pas fait, il faut « nommer » l'événement dont on cherche à calculer la probabilité. Dans cette fiche méthode, nous le nommerons A.
2. Si l'énoncé ne l'a pas fait, il faut introduire les événements élémentaires associés à l'expérience aléatoire étudiée. En cas de succession de tirages/lancers, chaque événement élémentaire est associé à un tirage/lancer spécifique. Les événements élémentaires doivent être simples. En particulier, on connaît leur probabilité d'être réalisés.
3. Il faut ensuite décomposer l'événement A comme union et/ou intersection d'événements élémentaires.

Tout calcul de probabilité sautant ces étapes est à proscrire.

En utilisant la méthode précédente, on se ramène à calculer la probabilité d'une union et/ou d'une intersection d'événements.

Méthode. Pour calculer la probabilité d'une union, il faut retenir le triptyque :

Union / Incompatibilité / Somme

Cas d'une union finie : $A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$.

- Si cela est possible, on simplifie l'union. Par exemple, si l'union est croissante, on a
$$\bigcup_{k=1}^{n} B_k = B_n$$
- Si les événements B_k sont 2 à 2 incompatibles, on peut utiliser l'additivité de $\mathbb{P}$:
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)$$
$\hookrightarrow$ l'utilisation de la formule des probabilités totales amène à ce calcul de somme, mais sans avoir à expliciter l'union.
- Si les événements B_k ne sont pas 2 à 2 incompatibles, on peut utiliser la formule du crible :
$$\mathbb{P}(B_1 \cup B_2) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) - \mathbb{P}(B_1 \cap B_2)$$
$$\mathbb{P}(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(B_3) - \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) - \mathbb{P}(B_2 \cap B_3) - \mathbb{P}(B_3 \cap B_1) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$$

Cas d'une union infinie : $A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k$.

- Si les événements B_k sont 2 à 2 incompatibles, on peut utiliser l'additivité de $\mathbb{P}$:
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k)$$
- Sinon, on se ramène au cas d'une union finie en utilisant le théorème de la limite monotone :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)$$

Si toutes ces tentatives échouent, on peut penser à calculer $\mathbb{P}(\overline{A})$ en utilisant la méthode pour une intersection d'événements, décrite ci-dessous. En effet :

$$\Omega \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \bigcap_{k=1}^{n} (\Omega \setminus B_k) = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}$$
$$\Omega \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} (\Omega \setminus B_k) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{B_k}$$

Méthode. Pour calculer la probabilité d'une intersection, il faut retenir le triptyque :

Intersection / Indépendance / Produit

Cas d'une intersection finie : $A = \bigcap_{k=1}^{n} B_k$.

- Si cela est possible, on simplifie l'intersection. Par exemple, si l'intersection est décroissante, on a
$$\bigcap_{k=1}^{n} B_k = B_n$$
- Si les événements B_k sont mutuellement indépendants, on a par définition :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)$$
- Si les événements B_k ne sont pas mutuellement indépendants, on peut utiliser la formule des probabilités composées :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\ldots\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}}(B_n)$$

Cas d'une intersection infinie : $A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k$.

On se ramène au cas d'une intersection finie en utilisant le théorème de la limite monotone :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)$$

Aucune formule de produit infini n'est au programme

Si toutes ces tentatives échouent, on peut penser à calculer $\mathbb{P}(\overline{A})$ en utilisant la méthode pour une union d'événements, décrite ci-dessus. En effet :
$$\Omega \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} (\Omega \setminus B_k) = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B_k}$$
$$\Omega \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (\Omega \setminus B_k) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \overline{B_k}$$