Interrogation de rentrée

On traitera obligatoirement les exercices 1, 2 et 3, et on les traitera dans cet ordre. Les autres ne sont pas obligatoires et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. *Rayer la ou les mentions inutiles (aucune justification n'est attendue)*

1. Dans l'écriture $f : x \mapsto 1 + x$, la variable x est : libre / liée

2. Dans l'écriture $\big([X = i] \big)_{i \in [\![1,n]\!]}$, la variable i est : libre / liée

et la variable n est : libre / liée

3. Le résultat de la quantité $\sum\limits_{i=1}^{k} i$ dépend de : i / k / ni i ni k

4. Une variable muette est : libre / liée

5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite admettant une limite (finie ou non),

la quantité $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: dépend de n / ne dépend par de n / peut dépendre de n

6. Dans l'écriture $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$, la variable t est : libre / liée

la variable x est : libre / liée

7. Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \ \text{ et } \ y = 0\}$,
la variable x est : libre / liée
la variable y est : libre / liée
la variable z est : libre / liée

8. Dans l'écriture : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$,
la variable x est : libre / liée
la variable y est : libre / liée

9. Une variable libre : doit toujours / ne doit jamais / doit parfois être introduite par un « Soit »

10. Une variable liée : doit toujours / ne doit jamais / doit parfois être introduite par un « Soit »

Exercice 2

Pour chacune des expressions suivantes :

(i) déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).

(ii) indiquer, pour chaque variable en présence, si elle est libre ou liée.

Aucune justification n'est attendue pour ces questions.

1. $\displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{e}^t\,dt$,

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\,dt$,

3. $x \mapsto \ln(x) + \sqrt{x}$,

4. $f(x)$,

5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant y\}$,

6. $\sum\limits_{i=0}^{n} i^3$,

7. $\sum\limits_{j=0}^{n} \sum\limits_{i=j}^{n} (i+j)^3$,

8. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$,

9. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

10. $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} u_n$,

11. $\mathcal{P}(n)$,

12. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

Exercice 3

1. a) Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & + & 4\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ -x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$.

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_{-1}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

2. a) Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \\ 5\,x & - & 3\,y & + & 8\,z & = & 0 \end{array}\right.$.

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 10 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2 \cdot X\}$.

3. a) Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 4

Soit $p \in \,]0,1[$. On note $q = 1-p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit une loi géométrique de paramètre p.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

2. On suppose maintenant que X est une v.a.r. **quelconque** qui vérifie : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([X = k]) \;=\; \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

b) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

3. Conclure.

Exercice 5

On pose f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. ***a)*** Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans la suite, on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ admettant f pour densité.

b) Déterminer la fonction de répartition F de X.

2. On pose : $Y = X^2$. Quelle est la loi de Y ?

Exercice 6

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in\ ]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

3. Montrer : $b \in [2, 4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b, +\infty[$.

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

6. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

7. ***a)*** Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1 function b = valeur_approchee(epsilon)
2     n = 0
3     while ..........
4         n = n + 1
5     end
6     b = suite(n)
7 endfunction
```