Interrogation de rentrée

On traitera obligatoirement les exercices 1, 2 et 3, et on les traitera dans cet ordre. Les autres ne sont pas obligatoires et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. *Rayer la ou les mentions inutiles (aucune justification n'est attendue)*

1. Dans l'écriture $f : x \mapsto 1 + x$, la variable x est : libre / liée

2. Dans l'écriture $\big([X = i]\big)_{i\in[\![1,n]\!]}$, la variable i est : libre / liée

et la variable n est : libre / liée

3. Le résultat de la quantité $\sum\limits_{i=1}^{k} i$ dépend de : i / k / ni i ni k

4. Une variable muette est : libre / liée

5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite admettant une limite (finie ou non),

la quantité $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: dépend de n / ne dépend par de n / peut dépendre de n

6. Dans l'écriture $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$, la variable t est : libre / liée

la variable x est : libre / liée

7. Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \ \text{ et } \ y = 0\}$,
la variable x est : libre / liée
la variable y est : libre / liée
la variable z est : libre / liée

8. Dans l'écriture : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$,
la variable x est : libre / liée
la variable y est : libre / liée

9. Une variable libre : doit toujours / ne doit jamais / doit parfois être introduite par un « Soit »

10. Une variable liée : doit toujours / ne doit jamais / doit parfois être introduite par un « Soit »

- **10 pts : on attribue 1 pt par question juste, pas de point négatif en cas de question fausse.**

Exercice 2

Pour chacune des expressions suivantes :

(i) déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).

- **12 pts : on attribue 1 pt si le bon terme (proposition, réel, fonction, suite, série, ensemble) apparaît et 0 sinon.**

(ii) indiquer, pour chaque variable en présence, si elle est libre ou liée.

- **12 pts : on attribue 1 pt par réponse juste.**

Aucune justification n'est attendue pour ces questions.

1. $\displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{e}^t \, dt$,

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} \, dt$,

3. $x \mapsto \ln(x) + \sqrt{x}$,

4. $f(x)$,

5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant y\}$,

6. $\sum\limits_{i=0}^{n} i^3$,

7. $\sum\limits_{j=0}^{n} \sum\limits_{i=j}^{n} (i+j)^3$,

8. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$,

9. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

10. $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} u_n$,

11. $\mathcal{P}(n)$,

12. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

Exercice 3

1. a) Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & + & 4\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ -x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$.

- **3 pts : $x = -2y - z$. Précisions :**
  - × **on attribue les 3 pts seulement si tout apparaît comme dans le corrigé.**
  - × **on peut attribuer jusque 2 pts en cas d'erreur de calcul.**
  - × **on peut attribuer jusque 2 pts en cas de gestion non correcte des variables auxiliaires mais bon résultat.**

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_{-1}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

- **1 pt : résultat** $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
- **2 pts : rédaction. Plus précisément, on attribue :**
  - × **0 pt : si utilisation du symbole $\Rightarrow$ à une étape ou incompréhension totale des objets manipulés.**
  - × **1 pt : une confusion d'objet ou une présentation ne correspondant pas au corrigé (notamment le fait d'écrire :** $X = y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$**)**
  - × **2 pts : tout parfait. Est accepté aussi une légère maladresse d'introduction du système (lien avec la question précédente).**

2. a) Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \\ 5\,x & - & 3\,y & + & 8\,z & = & 0 \end{array}\right.$.

- **3 pts : $x = -z$ et $y = z$. Selon les modalités précédentes.**

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 10 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2 \cdot X\}$.

- **1 pt : résultat** $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
- **2 pts : rédaction. Plus précisément, on attribue :**
  - × **0 pt : si utilisation du symbole $\Rightarrow$ à une étape ou incompréhension totale des objets manipulés.**
  - × **1 pt : une confusion d'objet ou une présentation ne correspondant pas au corrigé (notamment le fait d'écrire : $X = z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$)**
  - × **2 pts : tout parfait. Est accepté aussi une légère maladresse d'introduction du système (lien avec la question précédente).**

3. a) Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

- **3 pts : $x = 0$ et $y = 0$ et $z = 0$. Selon les modalités précédentes.**

Exercice 4

Soit $p \in \,]0, 1[$. On note $q = 1 - p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit une loi géométrique de paramètre p.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X > k]) \ = \ 1 - \mathbb{P}\left(\overline{[X > k]}\right) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k])$
- **1 pt :** $[X \leqslant k] \ = \ \bigcup\limits_{i=1}^{k} [X = i]$
- **1 pt : les événements de la famille $\big([X = i]\big)_{i \in [\![1,k]\!]}$ sont 2 à 2 incompatibles**
- **1 pt :** $\sum\limits_{i=0}^{k-1} q^i = \dfrac{1 - q^k}{1 - q}$ **même si $q \neq 1$ non précisé**

2. On suppose maintenant que X est une v.a.r. **quelconque** qui vérifie : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([X = k]) \ = \ \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

- **1 pt :** $[X > k-1] = [X \geqslant k] = [X = k] \cup [X > k]$ **car X est à valeurs entières**
- **1 pt : les événements $[X = k]$ et $[X > k]$ sont incompatibles**

b) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

- **1 pt :** $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X = k]\big) = \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k]) = q^{k-1} - q^k = q^{k-1}(1 - q) \ = \ q^{k-1}p$

3. Conclure.

- **1 pt : conclure quant à l'équivalence**
- **1 pt : bonus s'il est précisé que X est à valeurs entières**

Exercice 5

On pose f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. a) Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans la suite, on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ admettant f pour densité.

- **2 pts : la fonction f est continue sauf éventullement en 0. Précisions :**
  - × **1 pt : f est continue sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante (0 pt si $]-\infty, 0]$)**
  - × **1 pt : f est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$ (0 pt si $[0, +\infty[$)**
- **1 pt : tout ou rien avec disjonction de cas (sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$)**
- **2 pts : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ 1$. Précisions :**
  - × **1 pt : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt$ car f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$**
  - × **1 pt : $\displaystyle\int_0^A f(t)\ dt = \int_0^A t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\ dt = \Big[-\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \Big]_0^A = -\exp\left(-\frac{A^2}{2}\right) + 1$**

b) Déterminer la fonction de répartition F de X.

- **1 pt : si $x \in\ ]-\infty, 0[$, alors : $[X \leqslant x] = \varnothing$ (car $X(\Omega) = [0, +\infty[$) d'où : $F(x) \ = \ 0$**
- **2 pts : cas $x \in [0, +\infty[$. Précisions :**
  - × **1 pt : $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \int_0^x f(t)\ dt$ (car f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$)**
  - × **1 pt : calcul $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt = \int_0^x t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\ dt \Big[-\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \Big]_0^x = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$**

2. On pose : $Y = X^2$. Quelle est la loi de Y ?

- **1 pt : $Y = X^2$ donc : $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$**
- **1 pt : si $x \in\ ]-\infty, 0[$, alors : $[Y \leqslant x] = \varnothing$ d'où $F_Y(x) \ = \ 0$**
- **2 pts :**
  - × **1 pt : $\mathbb{P}(\left[X^2 \leqslant x\right]) = \mathbb{P}([-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}])$**
  - × **1 pt : $= F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) = F(\sqrt{x})$**

Exercice 6
Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in \,]0,+\infty[, \; f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

- **1 pt : f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ (0 si ajout de définie / continue ou confusion f et $f(x)$)**
- **1 pt :** $f'(x) \;=\; 1 - \dfrac{1}{x} \;=\; \dfrac{x-1}{x}$
- **1 pt : tableau de variation**
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$
- **1 pt :** $f(x) \;=\; x - \ln(x) \;=\; x\Big(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\Big) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in \,]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

- **3 pts : étude sur $]0,1[$**
  - × **1 pt : hypothèse continue + strictement décroissante sur $]0,1[$**
  - × **1 pt : f réalise une bijection de $]0,1[$ dans $f(]0,1[) = \,]1,+\infty[$**
  - × **1 pt : $2 \in \,]1,+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]0,1[$, notée a.**
- **1 pt : étude sur $]1,+\infty[$**
- **1 pt : comme $f(1) \neq 0$ l'équation $f(x) = 2$ admet exactement 2 solutions sur $]0,+\infty[$ notées a et b**

3. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

- **2 pts : $f(2) \leqslant f(b) \leqslant f(4)$ dont 1 pt pour $f(4) = 2\,(2 - \ln(2)) \simeq 2,6 \geqslant 2$**
- **1 pt : en appliquant g réciproque de f sur $]1,+\infty[$, strictement croissante :** $g\big(f(2)\big) \leqslant g\big(f(b)\big) \leqslant g\big(f(4)\big)$

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \, u_n \in [b,+\infty[$.

- **1 pt : montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où** $\mathcal{P}(n) : \left\{ \begin{array}{l} u_n \textbf{ est bien défini} \\ u_n \in [b,+\infty[\end{array} \right.$
- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

- **1 pt :** $u_{n+1} - u_n \;=\; \ln(u_n) + 2 - u_n \;=\; 2 - (u_n - \ln(u_n)) \;=\; f(b) - f(u_n)$
- **1 pt : comme** $u_n \geqslant b$ **alors** $f(u_n) \geqslant f(b)$ **car** f **croissante sur** $[b, +\infty[$
- **1 pt :** (u_n) **admet une limite finie** ℓ **par convergence monotone**
- **1 pt : comme** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant b$ **alors** $\ell \geqslant b$
- **1 pt :** $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ **donc** $\ell = \ln(\ell) + 2$ **et ça équivaut à** $f(\ell) = 2$

6. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}\,(u_n - b)$.

- **4 pts : IAF**
  - × **1 pt : introduction de** $h : x \mapsto \ln(x) + 2$**, dérivable sur** $[b, +\infty[$
  - × **1 pt :** $\forall x \in [b, +\infty[,\ \ h'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$
  - × **1 pt : d'après IAF :** $\forall (x,y) \in [b, +\infty[^2,\ \mid h(y) - h(x) \mid \leqslant \dfrac{1}{2}\ |y - x|$
  - × **1 pt : on peut appliquer cette inégalité à** $y = u_n \in [b, +\infty[$ **et** $x = b \in [b, +\infty[$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

- **1 pt : d'après la question *4.* :** $u_n \geqslant b$**.**
- **3 pts : récurrence pour démontrer** $\forall n \in \mathbb{N}$**,** $\mathcal{P}(n)$ **où** $\mathcal{P}(n)$ **:** $u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pts : hérédité**

7. ***a)*** Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

- **4 pts :**
  - × **1 pt : corps de la fonction (function / endfunction)**
  - × **1 pt : indentation correcte**
  - × **1 pt :** `u = 4`
  - × **1 pt : boucle (for k = 1 :n) avec** `u = log(u) + 2`

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1  function b = valeur_approchee(epsilon)
2      n = 0
3      while ..........
4          n = n + 1
5      end
6      b = suite(n)
7  endfunction
```

- **2 pts :** `while 1 / 2^(n-1) > epsilon`
- **2 pts : pour l'explication (à moduler)**