Interrogation de rentrée

On traitera obligatoirement les exercices 1, 2 et 3, et on les traitera dans cet ordre. Les autres ne sont pas obligatoires et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. *Rayer la ou les mentions inutiles*

1. Dans l'écriture $f : x \mapsto 1 + x$, la variable x est : ~~libre~~ / liée
La variable x est muette car c'est la variable de définition de la fonction (une fonction est un mécanisme d'association : à chaque valeur de x est associée une image par la fonction).

2. Dans l'écriture $\big([X = i]\big)_{i \in [\![1,n]\!]}$, la variable i est : ~~libre~~ / liée

et la variable n est : libre / ~~liée~~
La variable i est muette (on considère ici, pour tout les entiers i de $[\![1, n]\!]$, les événements $[X = i]$).
La variable n est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

3. Le résultat de la quantité $\sum\limits_{i=1}^{k} i$ dépend de : $\cancel{i}$ / k / ~~ni i ni k~~
La variable i est muette car c'est la variable de sommation (elle est donc sous la portée d'un symbole de sommation $\sum$).

La variable k est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).
Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable k.

4. Une variable muette est : ~~libre~~ / liée

5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite admettant une limite (finie ou non),
la quantité $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: ~~dépend de n~~ / ne dépend par de n / ~~peut dépendre de n~~

Rappelons quelques définitions :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ (où } \ell \in \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ u_n \geqslant A)$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ u_n \leqslant A)$$

La variable n est donc muette car, dans tous les cas, elle est sous la portée d'un quantificateur.

6. Dans l'écriture $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$, la variable t est : ~~libre~~ / liée

la variable x est : libre / ~~liée~~

La variable t est muette car c'est la variable d'intégration (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration $\displaystyle\int$).

La variable x est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématiques).

7. Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \ \text{ et } \ y = 0\}$,
la variable x est : ~~libre~~ / liée
la variable y est : ~~libre~~ / liée
la variable z est : ~~libre~~ / liée
Les variables x, y et z sont muettes (on s'intéresse ici à tous les réels x, y et z vérifiant une condition donnée).

8. Dans l'écriture : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$,
la variable x est : ~~libre~~ / liée
la variable y est : ~~libre~~ / liée
Les variables x et y sont muettes car elles sont sous la portée d'un quantificateur.

9. Une variable libre : ~~doit toujours~~ / ~~ne doit jamais~~ / doit parfois être introduite par un « Soit »

Une variable libre doit parfois être introduite par un « Il existe ».

10. Une variable liée : ~~doit toujours~~ / ne doit jamais / ~~doit parfois~~ être introduite par un « Soit »

Une variable muette ne doit jamais être quantifiée.

Exercice 2 Pour chacune des expressions suivantes :

(i) déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).

(ii) indiquer, pour chaque variable en présence, si elle est libre ou liée.

Démonstration.

1. $\displaystyle\int_0^x t\,e^t\ dt$

Notons qu'on se place ici exactement dans le cadre de la question ***2.*** pour une expression particulière de f.

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) La variable t est muette car c'est la variable d'intégration (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration $\int$).
La variable x est libre (elles n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

$\boxed{\text{Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable } x.}$

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\,dt$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) La variable t est muette car c'est la variable d'intégration (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration $\int$).
La variable x est libre (elles n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable x.

3. $x \mapsto \ln(x) + \sqrt{x}$

(i) Il s'agit d'une fonction réelle d'une variable réelle.

(ii) La variable x est muette car c'est la variable de définition de la fonction (une fonction est un mécanisme d'association : à chaque valeur de x est associée une image par la fonction).

On a ici affaire à une fonction dont l'évaluation en un réel donné ne dépend d'aucune variable.

4. $f(x)$

(i) Il s'agit d'un réel (et non pas d'une fonction !).

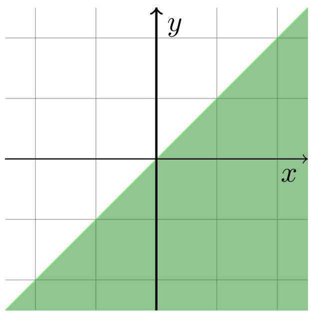
(ii) Les variables f et x sont libres (elles ne sont sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

On a ici affaire à l'évaluation d'une fonction en un point x. Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra de l'expression de f et de la variable x.

5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant y\}$

(i) Il s'agit d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ (tracé ci-contre).

(ii) Les variables x et y sont muettes (on s'intéresse ici à tous les réels x et y vérifiant une condition donnée).



On a ici affaire à un ensemble qui ne dépend d'aucune variable.

6. $\sum\limits_{i=0}^{n} i^3$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) La variable i est muette car c'est la variable de sommation (elle est donc sous la portée d'un symbole de sommation $\sum$).

La variable n est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable n.

7. $\sum\limits_{j=0}^{n} \sum\limits_{i=j}^{n} (i+j)^3$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) Dans la somme $\sum\limits_{i=j}^{n} (i+j)^3$, seule la variable i est muette car c'est la variable de sommation. Les variables n et j sont libres. Ainsi, le résultat de cette somme ne dépendra que de n et j. On peut donc noter $R(n,j) = \sum\limits_{i=j}^{n} (i+j)^3$.
Dans la somme $\sum\limits_{j=0}^{n} R(n,j) = \sum\limits_{j=0}^{n} \sum\limits_{i=j}^{n} (i+j)^3$, la variable j est muette car c'est la variable de sommation et la variable n est libre.

Finalement, une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable n.

8. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$

(i) Il s'agit d'une proposition quantifiée universellement.

(ii) La variable n est muette car elle est sous la portée d'un quantificateur.

La valeur de vérité de cette proposition mathématique ne dépend d'aucune variable.

9. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(i) Il s'agit d'une suite.

(ii) La variable n est muette (on considère ici la valeur de la suite u à tous les rangs n entiers).

La suite u (autre notation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) ne dépend d'aucune variable.

10. $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} u_n$

(i) Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} u_n$ est convergente (dans le cas contraire, l'objet considéré dans cette question n'est pas défini), la notation $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} u_n$ désigne la somme de cette série. Il s'agit alors d'un réel.

(ii) La variable n est muette car c'est la variable de sommation (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration $\sum$).

Cette somme ne dépend d'aucune variable.

11. $\mathcal{P}(n)$

(i) Il s'agit d'une proposition mathématique qui n'est pas quantifiée.

(ii) Les variables $\mathcal{P}$ et n sont libres (elles ne sont sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

La valeur de vérité de cette proposition mathématique dépend de la proposition $\mathcal{P}$ ainsi que du rang n où elle est évaluée.

12. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

(i) Il s'agit d'une proposition mathématique quantifiée universellement.

(ii) La variable n est muette car elle est sous la portée d'un quantificateur.
La variable $\mathcal{P}$ est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

$$\boxed{\text{La valeur de vérité de cette proposition mathématique dépend seulement de la proposition } \mathcal{P} \text{ considérée.}}$$

□

Exercice 3

1. a) Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & + & 4\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ -x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$.

Démonstration.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & + & 4\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ -x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ x + 2\,y + z = 0 \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ x = -2\,y - z \right.$$

□

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_{-1}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} X \in E_{-1}(A) & \Leftrightarrow & AX = -X \\ & \Leftrightarrow & (A + I)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & + & 4\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ -x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ x = -2\,y - z \right. \end{array}$$

(d'après la question précédente)

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
E_{-1}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -2\,y - z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -2\,y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□

2. ***a)*** Résoudre le système suivant : $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \\ 5\,x & - & 3\,y & + & 8\,z & = & 0 \end{array} \right.$.

Démonstration.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \\ 5\,x & - & 3\,y & + & 8\,z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5\,L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ & & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & -2\,z \\ & & y & = & z \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & -z \\ & & y & = & z \end{array} \right.$$

□

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 10 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2 \cdot X\}$.

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} X \in E_2(A) & \Leftrightarrow & AX = 2 \cdot X \\ & \Leftrightarrow & (A - 2 \cdot I)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \\ 5\,x & - & 3\,y & + & 8\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & z \end{array} \right. \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_2(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \ \texttt{ET} \ y = z \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

$$\boxed{E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□

3. Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

Démonstration.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2\,L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2\,L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & - & 4\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & 6\,y & - & 7\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + 3\,L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & - & 4\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & & - & 5\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccl} x & & & = & 0 \\ & y & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right.$$

(par remontées successives) □

Exercice 4

Soit $p \in \,]0,1[$. On note $q = 1 - p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit une loi géométrique de paramètre p.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- On remarque tout d'abord :

$$\mathbb{P}([X > k]) \;=\; 1 - \mathbb{P}\left(\overline{[X > k]}\right) \;=\; 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k])$$

- Par ailleurs, comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$: $[X \leqslant k] \;=\; \bigcup\limits_{i=1}^{k} [X = i]$.

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X \leqslant k]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} [X = i]\right) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left([X = i]\right) & \textit{(car les événements de la famille } \big([X=i]\big)_{i \in [\![1,k]\!]} \textit{ sont 2 à 2 incompatibles)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} p\, q^{i-1} \;=\; p \sum\limits_{i=0}^{k-1} q^i & \\ & = & p\, \dfrac{1 - q^k}{1 - q} & \textit{(car } q \neq 1\textit{)} \\ & = & 1 - q^k & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Enfin : } \mathbb{P}([X > k]) \;=\; 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k]) \;=\; 1 - (1 - q^k) \;=\; q^k.}$$

□

2. On suppose maintenant que X est une v.a.r. **quelconque** qui vérifie : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\big([X = k]\big) = \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} [X > k-1] &= [X \geqslant k] && \textit{(car X est à valeurs entières)} \\ &= [X = k] \cup [X > k] \end{aligned}$$

Les événements $[X = k]$ et $[X > k]$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}([X > k-1]) = \mathbb{P}\big([X = k]\big) + \mathbb{P}([X > k])$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big([X = k]\big) = \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k]).}$$

□

b) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X = k]\big) &= \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k]) && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= q^{k-1} - q^k && \textit{(par hypothèse de la question \textbf{1.b)})} \\ &= q^{k-1}(1-q) \ = \ q^{k-1}p \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ suit la loi } \mathcal{G}(p).}$$

□

3. Conclure.

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)*** : $\quad X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k$.
- D'après la question ***1.b)*** : $\quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k \quad \Rightarrow \quad X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
- Ainsi, si X est une variable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On obtient ainsi une nouvelle caractérisation de la loi géométrique, à savoir :} \\ X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \big(\ X(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = (1-p)^k\ \big)\end{array}}$$

□

Exercice 5
On pose f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. a) Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans la suite, on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ admettant f pour densité.

Démonstration.

- La fonction f est continue :
  - $\times$ sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  - $\times$ sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - $\times$ si $x \in\,]-\infty, 0[$, alors : $f(x) = 0$. Ainsi : $f(x) \geqslant 0$.
  - $\times$ si $x \in [0, +\infty[$, alors, comme $x \geqslant 0$: $f(x) = x \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.}$$

- Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et vaut 1.
  - $\times$ Tout d'abord, comme la fonction f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, dt$$

  - $\times$ Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}\int_0^A f(t)\, dt &= \int_0^A t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \\ &= \left[-\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right]_0^A \\ &= -\exp\left(-\frac{A^2}{2}\right) + 1\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \exp\left(-\frac{A^2}{2}\right) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \text{ converge et vaut } 1.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

$\square$

b) Déterminer la fonction de répartition F de X.

Démonstration.

- Dans la suite, on considère : $X(\Omega) = [0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in \,]-\infty, 0[$, alors : $[X \leqslant x] = \varnothing$ (car $X(\Omega) = [0, +\infty[$). D'où :
  $$F(x) \;=\; \mathbb{P}([X \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$
  × si $x \in [0, +\infty[$, alors :
  $$\begin{array}{rcll} F(x) & = & \mathbb{P}([X \leqslant x]) & \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt & \\ & = & \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\, dt & \textit{(car f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$)} \\ & = & \displaystyle\int_{0}^{t} t \, \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\, dt & \\ & = & \left[\, -\exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right) \,\right]_0^x & \\ & = & 1 - \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0[\\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}}$$

Commentaire

Profitons de cette question pour faire une remarque sur la notation $X(\Omega)$.

- Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
  Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
  Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :
  $$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{array}$$
  Il faut bien noter que dans cette définition aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît.
- Il est toujours correct d'écrire : $X(\Omega) \;\subseteq\;]-\infty, +\infty[$.
  En effet, cette propriété signifie que toute v.a.r. X est à valeurs dans $\mathbb{R}$, ce qui est toujours le cas par définition de la notion de variable aléatoire réelle.
- Dans le cas des v.a.r. discrètes, il est d'usage relativement courant de confondre :
  × l'ensemble de valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$),
  × l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\big([X = x]\big) \neq 0\}$, ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle. Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\mathrm{Supp}(X)$.

Commentaire

- Dans le cas des v.a.r. à densité, la détermination de l'ensemble image est plus technique. Dans certains sujets, l'ensemble image des v.a.r. étudiées sera précisé (« On considère une v.a.r. à valeurs strictement positives »). Si ce n'est pas le cas :
  - × si X suit une loi usuelle, on peut se référer à l'ensemble image donné en cours. Par exemple, si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, on se permet d'écrire :

    « Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, on **considère** : $X(\Omega) = [0,1]$. »
  - × si X ne suit pas une loi usuelle, on étudie l'ensemble : $I = \{x \in \mathbb{R} \mid f_X(x) > 0\}$.
    On se permet alors d'écrire :

    « Dans la suite, on **considère** : $X(\Omega) = I$. »

  En **décrétant** la valeur de $X(\Omega)$, on ne commet pas une erreur mais on décide d'ajouter une hypothèse qui ne fait pas partie de l'énoncé. Cette audace permet de travailler avec un ensemble image connu, ce qui permet de structurer certaines démonstrations (l'ensemble image étant connu, on se rappelle que la fonction de répartition, par exemple, s'obtient à l'aide d'une dsijonction de cas). $\square$

2. On pose : $Y = X^2$. Quelle est la loi de Y ?

Démonstration.

- Tout d'abord, par définition : $Y = X^2$. Donc : $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in]-\infty, 0[$, alors : $[Y \leqslant x] = \varnothing$ (car $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$). D'où :

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  - × si $x \in [0, +\infty[$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\left[X^2 \leqslant x\right]) & \\ & = & \mathbb{P}([-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}]) & \\ & = & F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) & \textit{(car X est une v.a.r. à densité)} \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}}\right) - 0 & \textit{(d'après la question précédente,} \\ & & & \textit{car $-\sqrt{x} \in]-\infty, 0]$)} \\ & = & 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \end{array}$$

  Finalement : $F_Y : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{array} \right.$.

- On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\dfrac{1}{2}\right).}$$

$\square$

Exercice 6
Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in \,]0,+\infty[, \ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \in \,]0,+\infty[$.
$$f'(x) \ = \ 1 - \frac{1}{x} \ = \ \frac{x-1}{x}$$
Alors, comme $x > 0$:
$$f'(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ x - 1 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ x \geqslant 1$$
On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - Tout d'abord : $f(1) = 1 - \ln(1) = 1$.
  - Ensuite : $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.
$$\boxed{\text{Donc : } \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty.}$$
  - Enfin, soit $x \in \,]0,+\infty[$:
$$f(x) \ = \ x - \ln(x) \ = \ x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$
De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

□

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in \,]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

Démonstration.

- La fonction f est :
  × continue sur $]0,1[$ (car dérivable sur $]0,1[$),
  × strictement décroissante sur $]0,1[$.

  Ainsi f réalise une bijection de $]0,1[$ dans $f(]0,1[)$.
$$f(]0,1[) \ = \left] \lim_{x \to 1^-} f(x), \ \lim_{x \to 0} f(x) \right[= \,]1,+\infty[$$
Or $2 \in \,]1,+\infty[$.
Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]0,1[$, notée a.

- La fonction f est :
  - × continue sur $]1,+\infty[$ (car dérivable sur $]1,+\infty[$),
  - × strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

  Ainsi f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ dans $f(]1,+\infty[)$.

$$f(]1,+\infty[) \ = \left] \lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x) \right[= \,]1,+\infty[$$

  Or $2 \in \,]1,+\infty[$.
  Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]1,+\infty[$, notée b.

Finalement, l'équation $f(x) = 2$ admet exactement 2 solutions sur $]0,+\infty[$ notées a et b telles que $0 < a < 1 < b$.

Commentaire

- Il est important dans cette question d'avoir parfaitement en tête toutes les hypothèses du théorème de la bijection. En particulier, la fonction f doit être **strictement monotone** sur l'intervalle considéré.
- On ne pouvait donc pas appliquer le théorème de la bijection directement sur l'intervalle $]0,+\infty[$, mais il fallait découper cet intervalle en plusieurs sous-intervalles sur lesquels f est strictement monotone (ici $]0,1[$ et $]1,+\infty[$).

□

3. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,\,7$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :
  - × $f(2) = 2 - \ln(2) \leqslant 2$,
  - × $f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - \ln(2^2) = 4 - 2\ln(2) = 2(2 - \ln(2))$.
    De plus, $\ln(2) \simeq 0,7$, donc : $2 - \ln(2) \simeq 1,3$ et ainsi : $f(4) = 2(2 - \ln(2)) \simeq 2,6 \geqslant 2$.
  - × $f(b) = 2$.

  On a donc : $f(2) \leqslant f(b) \leqslant f(4)$.
- Notons g la réciproque de f sur $]1,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, $g :]1,+\infty[\to]1,+\infty[$ est strictement croissante sur $]1,+\infty[$. En appliquant g de part et d'autre de l'inégalité précédente :

$$\begin{array}{ccccc} g\big(f(2)\big) & \leqslant & g\big(f(b)\big) & \leqslant & g\big(f(4)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 2 & \leqslant & b & \leqslant & 4 \end{array}$$

On a bien démontré : $b \in [2,4]$.

Commentaire

L'indication de l'énoncé $\ln(2) \simeq 0,7$ ne permet pas de savoir s'il s'agit d'une sur ou d'une sous-approximation. Un encadrement, tel que $0,6 \leqslant \ln(2) \leqslant 0,8$, permettrait de résoudre ce problème.

□

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b, +\infty[$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \quad$ où $\quad \mathcal{P}(n) : \left\{\begin{array}{l} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n \in [b, +\infty[\end{array}\right.$

- **Initialisation** :
  $u_0 = 4$. Or, d'après la question ***3.***, $b \leqslant 4$. Donc : $u_0 \in [b, +\infty[$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} \text{ est bien défini} \\ u_{n+1} \in [b, +\infty[\end{array}\right.$)

  Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et $u_n \in [b, +\infty[$.
  - Comme $u_n \geqslant b \geqslant 2$, on a en particulier $u_n > 0$.
    Donc $\ln(u_n)$ est bien définie. D'où u_{n+1} est bien défini.
  - Comme

$$\begin{array}{lccll} & u_n & \geqslant & b & \\ \text{alors} & \ln(u_n) & \geqslant & \ln(b) & \textit{(par croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0, +\infty[\textit{)} \\ \text{et} & \ln(u_n) + 2 & \geqslant & \ln(b) + 2 & \\ & \shortparallel & & & \\ & u_{n+1} & & & \end{array}$$

    Enfin, par définition de b : $f(b) = 2$, c'est-à-dire $b - \ln(b) = 2$. Ainsi : $\ln(b) = b - 2$.
    On obtient alors :

$$u_{n+1} \geqslant \ln(b) + 2 = (b - \cancel{2}) + \cancel{2}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on obtient que } (u_n) \text{ est bien définie et : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b, +\infty[.}$$

Commentaire

- Cette question est un classique des suites récurrentes.
  Elle se traite généralement par récurrence.
- Il faut ici faire attention à bien énoncer l'hypothèse de récurrence.
  Pour montrer que « **la suite** (u_n) est bien définie », on démontre en réalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \quad \text{où} \quad \mathcal{P}(n) : \textbf{le réel } u_n \text{ est bien défini}$$

$\square$

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n \;=\; \ln(u_n) + 2 - u_n \;=\; 2 - (u_n - \ln(u_n)) \;=\; f(b) - f(u_n)$$

  Or, d'après la question précédente : $u_n \geqslant b$.
  De plus, par croissance de la fonction f sur $[b, +\infty[$: $f(u_n) \geqslant f(b)$.
  D'où : $u_{n+1} - u_n = f(b) - f(u_n) \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

Commentaire

On pouvait aussi démontrer la décroissance de la suite (u_n) par récurrence.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation** :
  $u_1 = \ln(u_0) + 2 = \ln(4) + 2 = 2\ln(2) + 2 \simeq 2 \times 0,7 + 2 \simeq 3,4$.
  Donc $u_1 \leqslant u_0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$).

Tout d'abord	u_{n+1}	$\leqslant$	u_n	*(par hypothèse de récurrence)*
donc	$\ln(u_{n+1})$	$\leqslant$	$\ln(u_n)$	*(par croissance de la fonction* $\ln$ *sur* $]0,+\infty[$*)*
et	$\ln(u_{n+1}) + 2$	$\leqslant$	$\ln(u_n) + 2$	
	$\parallel$		$\parallel$	
	u_{n+2}		u_{n+1}	

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- La suite (u_n) est donc :
  × décroissante,
  × minorée par b (car : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [b,+\infty[$).

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ converge. On note } \ell \text{ sa limite.}}$$

- - Tout d'abord : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant b$.
    Par passage à limite, on en déduit : $\ell \geqslant b$.
  - Ensuite : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.
    Donc, par continuité de $\ln$ sur $]0,+\infty[$: $\ell = \ln(\ell) + 2$. Or :

$$\ell = \ln(\ell) + 2 \Leftrightarrow \ell - \ln(\ell) = 2 \Leftrightarrow f(\ell) = 2$$

Or, d'après la question ***2.***, b est l'unique solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $]1,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Donc } \ell = b.}$$

□

6. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

Démonstration.
On note h la fonction définie par $h : x \mapsto \ln(x) + 2$.

- La fonction h est dérivable sur $[b,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[b,+\infty[$.
  Soit $x \in [b,+\infty[$. Alors $h'(x) = \dfrac{1}{x} \geqslant 0$. Ainsi : $\forall x \in [b,+\infty[$, $|h'(x)| = h(x) = \dfrac{1}{x}$.
  Or, d'après la question ***3.***, $b \geqslant 2$. Donc, pour tout $x \in [b,+\infty[$: $x \geqslant b \geqslant 2$.
  Par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$, on en déduit : $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  Ainsi :

$$\forall x \in [b,+\infty[, \; h'(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

- On sait alors :
  - × h est dérivable sur $[b, +\infty[$,
  - × $\forall x \in [b, +\infty[,\ |h'(x)| = h'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [b, +\infty[^2,\ \mid h(y) - h(x) \mid \leqslant \frac{1}{2}\ |y - x|$$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in [b, +\infty[$ et $x = b \in [b, +\infty[$, on obtient :

$$h(u_n) - h(b) \ = \ \mid h(u_n) - h(b) \mid \leqslant \frac{1}{2}\ |u_n - b| \ = \ \frac{1}{2}\ (u_n - b)$$

  Or :
  - × $h(u_n) = \ln(u_n) + 2 = u_{n+1}$
  - × $h(b) = \ln(b) + 2 = (b - \cancel{2}) + \cancel{2} = b$, car b est solution de l'équation $f(x) = 2$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b).}$$

$\square$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question ***4.*** : $u_n \geqslant b$.

$$\boxed{\text{Donc : } u_n - b \geqslant 0.}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
  - ▸ **Initialisation** :
    D'une part : $u_0 - b = 4 - b$.
    D'autre part : $\dfrac{1}{2^{0-1}} = \dfrac{1}{2^{-1}} = 2$.
    Ainsi :
$$\begin{aligned} u_0 - b &= 4 - b \\ &\leqslant 4 - 2 \qquad \textit{(car } b \geqslant 2 \textit{ d'après la question } \textbf{\textit{3}}\textit{)} \\ &= 2 = \frac{1}{2^{0-1}} \end{aligned}$$
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - ▸ **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2^n}$).
    D'après la question précédente : $u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.
    Or, par hypothèse de récurrence : $u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
    En combinant ces deux résultats, on obtient :
$$u_{n+1} - b \ \leqslant \ \frac{1}{2}(u_n - b) \ \leqslant \ \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$
    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

$\square$

7. a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

Démonstration.
On propose la fonction suivante :

```
1  function u = suite(n)
2      u = 4
3      for k = 1:n
4          u = log(u) + 2
5      end
6  endfunction
```

Détaillons les éléments de cette fonction.

- **Début de la fonction**
  L'énoncé commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `suite`,
  × elle prend en paramètre d'entrée l'entier `n`,
  × elle admet pour variable de sortie la variable `u`.

```
1  function u = suite(n)
```

  La variable `u`, qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n) est initialisée à 4 : la valeur de u_0.

```
2      u = 4
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 5 consistent à calculer les valeurs successives de la suite (u_n).
  Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle for) :

```
3      for k = 1:n
4          u = log(u) + 2
5      end
```

  On tire ici partie de la définition récursive (d'ordre 1) de cette suite. La nouvelle valeur de la suite, que l'on stockera dans la variable `u`, est obtenue à l'aide de la valeur précédente qui est celle alors stockée dans `u`.

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `u` contient la quantité $u_{\mathtt{n}}$ où `n` est le paramètre entré lors de l'appel de la fonction.

Commentaire

- Le programme **Scilab** consiste à mettre à jour successivement la variable `u` jusqu'à obtention de la valeur que l'on souhaite calculer. L'idée est la suivante.
  Si avant le $i^{\text{ème}}$ tour de boucle (avec $\mathtt{i} \in [\![1, \mathtt{n}]\!]$) :

  la variable `u` contient la valeur u_{i-1}

  alors, à l'issue de ce tour de boucle :

  la variable `u` contient la valeur u_i

  Cette propriété est ce qu'on appelle un **invariant de boucle**. Elle permet d'assurer la correction de la fonction implémentée et notamment le fait qu'à l'issue du dernier tour de boucle la variable `u` contient $u_{\mathtt{n}}$.

□

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1 function b = valeur_approchee(epsilon)
2     n = 0
3     while ..........
4         n = n + 1
5     end
6     b = suite(n)
7 endfunction
```

Démonstration.

- D'après la question ***6.b)*** :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$
S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$, on obtiendra par transitivité :
$$0 \leqslant u_N - b \leqslant \varepsilon$$
Donc u_N est une valeur approchée de b à ε près.
- On complète alors le programme **Scilab** de la façon suivante :

```
3     while 1 / 2 ^ (n-1) > epsilon
```

On propose le programme suivant :

```
1 function b = valeur_approchee(epsilon)
2     n = 0
3     while 1 / 2 ^ (n-1) > epsilon
4         n = n + 1
5     end
6     b = suite(n)
7 endfunction
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début du programme**
Commençons par préciser la structure de la fonction :
  - × cette fonction se nomme `valeur_approchee`,
  - × elle prend comme paramètre d'entrée le réel `epsilon`,
  - × elle admet pour variable de sortie la variable `b`.

```
1 function b = valeur_approchee(epsilon)
```

On initialise ensuite la variable `n` à 0.

```
2 n = 0
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 5 consistent à déterminer un entier n tel que : $|u_n - b| \leqslant \varepsilon$. Pour ce faire, on se sert de la condition suffisante exposée ci-dessus à savoir : $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$ (si cette condition est vérifiée alors il en est de même de la précédente).
  Le programme consiste donc à incrémenter la variable `n` de 1 jusqu'à ce que : $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$. Autrement dit, on doit incrémenter la variable `n` de 1 tant que : $\frac{1}{2^{n-1}} > \varepsilon$.
  Pour cela on met en place une boucle while :

```
3    while 1 / 2 ^ (n-1) > epsilon
```

  Puis on met à jour la variable `n`.

```
4        n = n + 1
```

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `n` contient un entier n tel que : $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$, ce qui assure : $|u_n - b| \leqslant \varepsilon$. Il n'y a plus qu'à calculer u_n à l'aide de la fonction `suite` définie précédemment.

```
6        b = suite(n)
```

□