Interrogation de rentrée

On traitera obligatoirement les exercices 1, 2 et 3, et on les traitera dans cet ordre. L'exercice 4 pourra être abordé dans un second temps.

Exercice 1. *Rayer la ou les mentions inutiles (aucune justification n'est attendue)*

1. Dans l'écriture $f : x \mapsto 1 + x$, la variable x est : libre / liée

2. Dans l'écriture $\big([X = i] \big)_{i \in [\![1,n]\!]}$, la variable i est : libre / liée

et la variable n est : libre / liée

3. Le résultat de la quantité $\sum\limits_{i=1}^{k} i$ dépend de : i / k / ni i ni k

4. Une variable muette est : libre / liée

5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite admettant une limite (finie ou non),

la quantité $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: dépend de n / ne dépend par de n / peut dépendre de n

6. Dans l'écriture $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$, la variable t est : libre / liée

la variable x est : libre / liée

7. Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \ \text{ et } \ y = 0\}$,
la variable x est : libre / liée
la variable y est : libre / liée
la variable z est : libre / liée

8. Dans l'écriture : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$,
la variable x est : libre / liée
la variable y est : libre / liée

9. Une variable libre : doit toujours / ne doit jamais / doit parfois être introduite par un « Soit »

10. Une variable liée : doit toujours / ne doit jamais / doit parfois être introduite par un « Soit »

Exercice 2

Pour chacune des expressions suivantes :

(i) déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).

(ii) indiquer, pour chaque variable en présence, si elle est libre ou liée.

Aucune justification n'est attendue pour ces questions.

1. $\displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{e}^t\ dt$,

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\ dt$,

3. $x \mapsto \ln(x) + \sqrt{x}$,

4. $f(x)$,

5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant y\}$,

6. $\sum\limits_{i=0}^{n} i^3$,

7. $\sum\limits_{j=0}^{n} \sum\limits_{i=j}^{n} (i+j)^3$,

8. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$,

9. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

10. $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} u_n$,

11. $\mathcal{P}(n)$,

12. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

Exercice 3

1. ***a)*** Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & 2z & = & 0 \\ -x & - & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$.

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_{-1}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

2. ***a)*** Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ 5x & - & 3y & + & 8z & = & 0 \end{array}\right.$.

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 10 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2 \cdot X\}$.

3. ***a)*** Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 4

On considère la fonction φ définie sur $]-\infty,1]$ par :

$$\forall x \in\ ]-\infty,1], \quad \varphi(x) = \left\{\begin{array}{cl} x + (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{array}\right.$$

Partie A : Étude de la fonction φ

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $]-\infty,1]$.

2. ***a)*** Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$ et calculer, pour tout $x \in\ ]-\infty,1[$, $\varphi'(x)$.

b) En déduire les variations de φ sur $]-\infty,1]$.

c) La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?

3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.

Partie C : Application en probabilité

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

- × si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire ;
- × si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

11. ***a)*** Montrer soigneusement : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \mathbb{P}\big([N=n]\big) = \dfrac{1}{n\,(n-1)}$.

b) La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

12. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction **Scilab** suivante de façon à ce qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire N.

```
function N = simuleN()
    b = 1 // b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while rand() < .........
        b = b+1
    end
    N = .........
endfunction
```

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ et N sont mutuellement indépendantes. On note F la fonction de répartition commune aux variables aléatoires X_n pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire $T = \max(X_1, \ldots, X_N)$, ce qui signifie :

$$\forall \omega \in \Omega,\ T(\omega) \ = \ \max\big(X_1(\omega), \ldots, X_{N(\omega)}(\omega)\big)$$

Ainsi par exemple, si N prend la valeur 3, alors $T = \max(X_1, X_2, X_3)$; si N prend la valeur 5, alors $T = \max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$; etc.

13. ***a)*** Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \mathbb{P}_{[N=n]}\big([T \leqslant x]\big) \ = \ \big(F(x)\big)^n$.

b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\big([T \leqslant x]\big) \ = \ \varphi\big(F(x)\big)$.

On admet que, pour tout $x \in [0,1]$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^{n+1}}{n\,(n+1)}$ est convergente et que l'on a : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} \ = \ \varphi(x)$.

14. On suppose **dans cette question uniquement** que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Rappeler une expression de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

b) En déduire une expression de la fonction de répartition de T.

c) Montrer que T est une variable aléatoire à densité et qu'une densité de T est la fonction :

$$g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda^2\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$