DS1 (version A)

Exercice 1

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Calculer $(A-I)(A+I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. On note $E_1(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,U = U\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_1) \begin{cases} \phantom{-4x -{}} 2y - 2z = 0 \\ -4x - 4y + 4z = 0 \\ -2x = 0 \end{cases}$.

b) Déterminer $E_1(A)$.

c) En déduire que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_1(A)$.

3. On note $E_{-1}(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,U = -U\}$.

a) Résoudre le système : $(S_{-1}) \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ -4x - 2y + 4z = 0 \\ -2x + 2z = 0 \end{cases}$

b) Déterminer $E_{-1}(A)$.

c) En déduire que $E_{-1}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_{-1}(A)$.

4. On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On détaillera précisément les étapes de calcul.

b) Montrer que $P^{-1}\,A\,P = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\,T^n\,P^{-1}$.

5. ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer T^n en fonction des matrices D et N, à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Exercice 2

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto 1 + \ln(x+n)$ et $h_n : x \mapsto x - f_n(x)$. On admet que $\ln(2) \simeq 0,69$.

Etude de f_1

1. Donner sans démonstration le domaine de définition $\mathcal{D}_{f_1}$ de la fonction f_1.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f_1. On ne justifiera pas les limites.

3. **a.** Déterminer l'équation de la tangente en 0 au graphe de f_1.

b. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_1}$, $f_1(x) \leqslant x + 1$.

4. Tracer la courbe représentative de f_1.

Etude d'une suite implicite

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = x$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée α_n. (On ne cherchera pas à calculer α_n)

6. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$h_n(\alpha_{n+1}) = \ln\left(\frac{\alpha_{n+1} + n + 1}{\alpha_{n+1} + n}\right)$$

b. En déduire que la suite (α_n) est strictement monotone. On précisera son sens de variations.

7. **a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n > 1 + \ln(n)$.

b. En déduire la limite de la suite (α_n).

8. **a.** Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} h_n\left(\ln(n) + 2\right) = 1$$

On admet alors qu'il existe un rang $n_0 \geqslant 2$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $h_n\left(\ln(n) + 2\right) > 0$.

b. Montrer que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\alpha_n < \ln(n) + 2$.

c. En déduire un équivalent simple de α_n lorsque n tend vers $+\infty$.

9. **a.** Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$.

b. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\alpha_n}{n^2}$.

Valeur approchée de α_1 par dichotomie

10. Montrer que $1 < \alpha_1 < 3$. On pourra utiliser la question 7a.

11. Recopier et compléter le script **Python** suivant afin qu'il renvoie une valeur approchée de α_1 à 10^{-4} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
import numpy as np
a,b = 1,3
while __________________ :
    c = (a + b) / 2
    if _______________________ :
        b = c
    else :
        a = c
print _____
```

Valeur approchée de α_1 par méthode de point fixe

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$$

12. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

13. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha_1| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1|$$

14. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha_1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

15. En déduire la limite de la suite (u_n).

16. Recopier et compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle

- prenne en argument un réel `epsilon` strictement positif
- renvoie une liste `[n,u]` où `n` est un entier qui vérifie $|u_{\mathtt{n}} - \alpha_1| \leqslant$ `epsilon` et $\mathtt{u} = u_{\mathtt{n}}$.

```
import numpy as np
def ApprocheAlpha(epsilon) :
    n = 0
    u = 1
    while ______________________________ :
        n = __________
        u = _____________________
    return [n,u]
```

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in\ ]0, +\infty[,\ \ f(t) = t + \frac{1}{t}$$

PARTIE A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$.
Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites en 0 et $+\infty$.

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[2, +\infty[$.

On note $g : [2, +\infty[\to [1, +\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1, +\infty[$.

3. ***a)*** Dresser le tableau de variations de g.

b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2, +\infty[$.

c) Soit $y \in [2, +\infty[$. En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in\ ]0, +\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

PARTIE C : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2\, u_n} = \frac{1}{n}\, f(n\, u_n)$$

8. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

9. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n.

```
1 def suite(n):
2     u = 1
3     for k in ______________:
4         u = ____________________
5     return u
```

10. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

b) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$.

c) Calculer, pour tout n supérieur ou égal à 2, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

11. ***a)*** Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt$.

b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leqslant p < n$, calculer $\sum\limits_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt$$

c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2$.
Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2, 3]$.

d) Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}$$

e) En déduire une fonction **Python** qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Exercice 4

1. Quelle est la nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n+1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+1)^2}$?

2. Écrire une fonction **Python** qui prend en paramètre un entier `n` et renvoie $S_{\mathtt{n}} = \sum\limits_{k=0}^{\mathtt{n}} \dfrac{1}{(k+1)^2}$, somme partielle d'ordre `n` de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

3. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.
Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n \ = \ \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k, \quad v_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k, \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et que la suite (v_n) est croissante.

b) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n \leqslant u_n$.
En déduire que la suite (u_n) admet une limite s et que la suite (v_n) admet la même limite s.

c) En déduire que la suite (s_n) converge vers s.

4. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$ est convergente.

5. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente. On note $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ sa somme.

6. ***a)*** Établir, pour tout réel t positif et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k \ = \ \frac{1}{1+t} - (-1)^n \ \frac{t^n}{1+t}$$

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \ = \ \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \ \frac{t^n}{1+t} \ dt$$

c) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_0^1 \ \frac{t^n}{1+t} \ dt \right| \ \leqslant \ \frac{1}{n+1}$$

d) En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$.