DS1 barème (version A)

Exercice 1 (inspiré de EDHEC 2016)

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $(A-I)(A+I)^2$.

- 1 pt : $(A-I)(A+I) = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $(A-I)(A+I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$**.**

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

- 1 pt : $(A-I)(A+I)^2 = A^3 + A^2 - A - I$**.**

- 1 pt : $A(A^2 + A - I) = I$

2. On note $E_1(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,U = U\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_1) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ -4\,x & - & 4\,y & + & 4\,z & = & 0 \\ -2\,x & & & & & = & 0 \end{array} \right.$

- 1 pt : résolution $\left\{ \begin{array}{rl} x & = 0 \\ y & = z \end{array} \right.$

b) Déterminer $E_1(A)$.

- 1 pt : écriture système

- 1 pt : $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

c) En déduire que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_1(A)$.

- 1 pt : $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **donc** $E_1(A)$ **est un sous-espace vectoriel de** $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$**.**

- 1 pt : la famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **engendre** $E_1(A)$

- 1 pt : la famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **est libre**

3. On note $E_{-1}(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,U = -U\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_{-1}) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ -4\,x & - & 2\,y & + & 4\,z & = & 0 \\ -2\,x & & & + & 2\,z & = & 0 \end{array} \right.$.

- 1 pt : résolution $\begin{cases} x & = z \\ & y = 0 \end{cases}$

b) Déterminer $E_{-1}(A)$.

- 1 pt : écriture système

- 1 pt : $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

c) En déduire que $E_{-1}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_{-1}(A)$.

- 1 pt : $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **donc** $E_{-1}(A)$ **est un sous-espace vectoriel de** $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$**.**

- 1 pt : la famille $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **engendre** $E_{-1}(A)$

- 1 pt : la famille $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **est libre**

4. On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On détaillera précisément les étapes de calcul.

- 1 pt : P **est inversible**

- 2 pts : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) Montrer que $P^{-1}\,A\,P = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- 1 pt : pour $P^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **ou pour** $AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

- 1 pt : pour $P^{-1}AP = T$**.**

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

5. ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 1 pt : $N = T - D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- 1 pt : $N^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

- 1 pt : récurrence immédiate

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n en fonction des matrices D et N, à l'aide de la formule du binôme de Newton.

- 1 pt : D **et** N **commutent**

- 1 pt : formule du binôme correcte

- 1 pt : découpage valable car $n \geqslant 1$

- 1 pt : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

- 1 pt : $T^n \ = \ D^n + n\, D^{n-1}\, N$

- 1 pt : cas $n = 0$

Exercice 2 (inspiré de `ECRICOME 2008`)

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto 1 + \ln(x+n)$ et $h_n : x \mapsto x - f_n(x)$. On admet que $\ln(2) \simeq 0,69$.

Etude de f_1

1. Donner sans démonstration le domaine de définition $\mathcal{D}_{f_1}$ de la fonction f_1.

- 1 pt : $\mathcal{D}_{f_1} =]-1, +\infty[$

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f_1. On ne justifiera pas les limites.

- 1 pt : La fonction f_1 **est dérivable sur** $]-1, +\infty[$ **comme somme et composée de fonctions dérivables**

- 1 pt : $f_1'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$

- 1 pt :

x	-1		$+\infty$
Signe de $f_1'(x)$		$+$	
Variations de f_1	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(il faut que les limites soient correctes pour avoir le point)

3. ***a.*** Déterminer l'équation de la tangente en 0 au graphe de f_1.

- 1 pt : l'équation de la tangente en 0 **au graphe de** f_1 **est** $y = x + 1$

b. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_1}$, $f_1(x) \leqslant x + 1$.

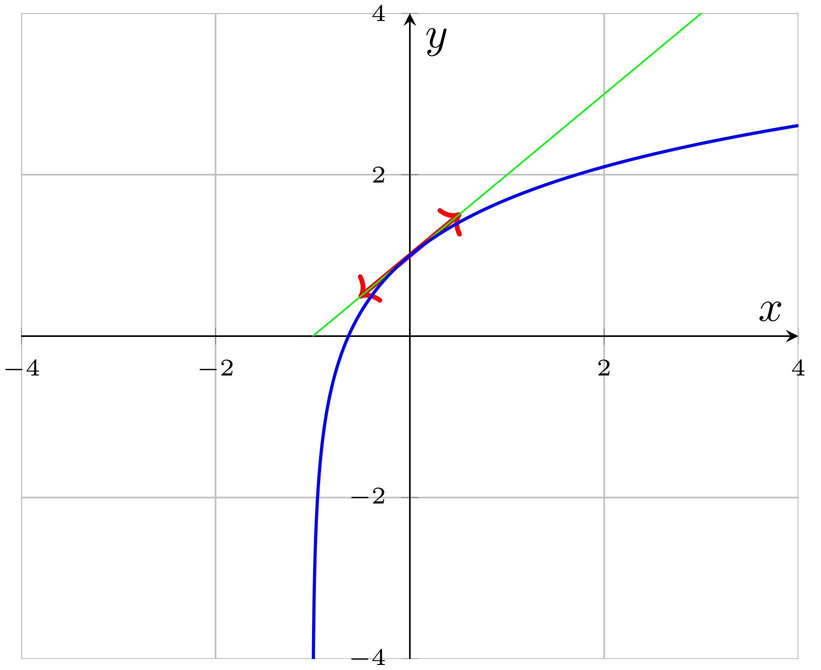
- 1 pt : la fonction f_1 **est concave sur** $]-1, +\infty[$

- 1 pt : son graphe est en dessous de sa tangente en 0

4. Tracer la courbe représentative de f_1.

- **1 pt : tracé de la tangente en** 0
- **1 pt : tracé cohérent avec** $f_1(0) = 1$
- **1 pt : tracé cohérent avec les limites**
- **1 pt : tracé cohérent avec la concavité de** f_1

Démonstration.



□

Etude d'une suite implicite

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = x$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée α_n. (On ne cherchera pas à calculer α_n)

- **1 pt :** $h_n'(x) = 1 - \frac{1}{x+n} = \frac{x+n-1}{x+n} > 0$
- **1 pt :**

x	0 $+\infty$
Signe de $h_n'(x)$	$+$
Variations de h_n	$h_n(0)$ ↗ $+\infty$

- **1 pt :** h_n **est continue sur** $]0, +\infty[$ **et strictement croissante sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt :** h_n **réalise une bijection de** $]0, +\infty[$ **sur** $h_n(]0, +\infty[) =]h_n(0), +\infty[$
- **1 pt :** $h_n(0) < 0$ **donc** $0 \in]h_n(0), +\infty[$ **(il faut expliquer pourquoi** $h_n(0) < 0$ **pour avoir le point)**

6. ***a.*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$h_n(\alpha_{n+1}) = \ln\left(\frac{\alpha_{n+1} + n + 1}{\alpha_{n+1} + n}\right)$$

- **1 pt : penser à utiliser** $\alpha_{n+1} = f_{n+1}(\alpha_{n+1})$
- **1 pt : fin du calcul correct**

b. En déduire que la suite (α_n) est strictement monotone. On précisera son sens de variations.

- **1 pt :** $\frac{\alpha_{n+1}+n+1}{\alpha_{n+1}+n} > 1$ **donc** $h_n(\alpha_{n+1}) > 0 = h_n(\alpha_n)$
- **1 pt : composition par** h_n^{-1}**, la bijection réciproque de** h_n **(de même stricte monotonie, c'est-à-dire strictement croissante)**

7. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n > 1 + \ln(n)$.

- **1 pt : penser à utiliser** $\alpha_n = f_n(\alpha_n) = 1 + \ln(\alpha_n + n)$
- **1 pt :** $\alpha_n > 0$ **donc** $\ln(\alpha_n + n) > \ln(n)$ **par stricte croissance de la fonction** $x \mapsto \ln(x)$ **sur** $]0, +\infty[$

b. En déduire la limite de la suite (α_n).

- **1 pt :** $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ **par théorème de comparaison**

8. a. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} h_n\left(\ln(n) + 2\right) = 1$$

On admet alors qu'il existe un rang $n_0 \geqslant 2$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $h_n\left(\ln(n) + 2\right) > 0$.

- **1 pt :** $h_n\left(\ln(n) + 2\right) = 1 - \ln\left(1 + \frac{\ln(n)+2}{n}\right)$
- **1 pt :** $\dfrac{\ln(n) + 2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **par croissances comparées**

b. Montrer que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\alpha_n < \ln(n) + 2$.

- **1 pt : pour** $n \geqslant n_0$**,** $h_n\left(\ln(n) + 2\right) > h_n(\alpha_n)$
- **1 pt : composition par** h_n^{-1}**, la bijection réciproque de** h_n **(de même stricte monotonie, c'est-à-dire strictement croissante)**

c. En déduire un équivalent simple de α_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- **1 pt :** $1 + \ln(n) < \alpha_n < \ln(n) + 2$ **donc** $\frac{1}{\ln(n)} + 1 < \frac{\alpha_n}{\ln(n)} < 1 + \frac{2}{\ln(n)}$ **(pas de point si l'argument** $\ln(n) > 0$ **car** $n \geqslant n_0 \geqslant 2$ **n'est pas donné)**
- **1 pt :** $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ **(pas de point si le théorème d'encadrement n'est pas cité)**

9. a. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$.

- **1 pt : pour tout** $n \geqslant 1$**,** $\frac{\alpha_n}{n} \geqslant 0$ **et** $\frac{\ln(n)}{n} \geqslant 0$ **et** $\frac{\alpha_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$
- **1 pt : par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, les séries** $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$ **et** $\sum \dfrac{\ln(n)}{n}$ **ont même nature**
- **1 pt :** $\frac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **donc** $\frac{1}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$
- **1 pt : la série** $\sum \dfrac{1}{n}$ **diverge (série de Riemann d'exposant** 1**)**
- **1 pt : par critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série** $\sum \dfrac{\ln(n)}{n}$ **diverge et donc la série** $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$ **diverge (pas de point si il manque l'argument : pour tout** $n \geqslant 1$**,** $\frac{1}{n} \geqslant 0$ **et** $\frac{\ln(n)}{n} \geqslant 0$**)**

b. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\alpha_n}{n^2}$.

- **1 pt :** $\sum \dfrac{\alpha_n}{n^2}$ **et** $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ **ont même nature (même raisonnement que la question précédente)**
- **1 pt :** $\frac{\ln(n)}{n^{1/2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **par croissances comparées donc** $\frac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$
- **1 pt : la série** $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ **converge (série de Riemann d'exposant** $\frac{3}{2} > 1$**)**
- **1 pt : par critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série** $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ **converge et donc la série** $\sum \dfrac{\alpha_n}{n^2}$ **diverge (pas de point si il manque l'argument : pour tout** $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n^{3/2}} \geqslant 0$ **et** $\frac{\ln(n)}{n^2} \geqslant 0$**)**

Valeur approchée de α_1 par dichotomie

10. Montrer que $1 < \alpha_1 < 3$. On pourra utiliser la question 7a.

- **1 pt :** $\alpha_1 > 1 + \ln(1) = 1$
- **1 pt :** $h_1(3) = 2(1 - \ln(2)) > 0$ **car** $\ln(2) \simeq 0,69$
- **1 pt :** $h_1(3) > h_1(\alpha_1)$ **et, en composant par** h_1^{-1} **qui est strictement croissante, on obtient** $3 > \alpha_1$

11. Recopier et compléter le script **Python** suivant afin qu'il renvoie une valeur approchée de α_1 à 10^{-4} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
1  import numpy as np
2  a,b = 1,3
3  while  b-a > 10**(-4)  :
4      c = (a + b) / 2
5      if  c-1-np.log(c+1) > 0  :
6          b = c
7      else :
8          a = c
9  print (c)
```

- **1 pt :** 3 `while b-a > 10**(-4):`
- **2 pt :** 5 `    if c-1-np.log(c+1) > 0:`
- **1 pt :** 9 `print(c)`

Valeur approchée de α_1 par méthode de point fixe

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$$

12. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pt : hérédité (1pt pour** u_{n+1} **est bien défini et 1pt pour** $u_{n+1} \geqslant 1$**)**

13. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha_1| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha_1|$$

- **1 pt :** $|f_1'(x)| = \frac{1}{x+1} \leqslant \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$
- **1 pt : on pose** $x = u_n \in [1, +\infty[$ **(cf question 12) et** $y = \alpha_1 \in [1, +\infty[$ **(cf question 10)**
- **1 pt :** $|f_1(u_n) - f_1(\alpha_1)| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha_1|$ **donc** $|u_{n+1} - \alpha_1| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha_1|$

14. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha_1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

- **2 pt : initialisation (0 pt si la preuve commence en affirmant** $P(0)$**)**
- **2 pt : hérédité**

15. En déduire la limite de la suite (u_n).

- **1 pt :** $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **car** $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$
- **1 pt :** $|u_n - \alpha_1| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **par théorème d'encadrement**
- **1 pt :** $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha_1$

16. Recopier et compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle

- prenne en argument un réel `epsilon` strictement positif
- renvoie une liste `[n,u]` où `n` est un entier qui vérifie $|u_{\mathtt{n}} - \alpha_1| \leqslant$ `epsilon` et `u` $= u_{\mathtt{n}}$.

```python
1 import numpy as np
2 def ApprocheAlpha(epsilon) :
3     n = 0
4     u = 1
5     while 1/(2**(n-1)) > epsilon :
6         n = n + 1
7         u = 1 + np.log(u+1)
8     return [n,u]
```

- **1 pt :** 5 `while 1/(2**(n-1)) > epsilon :`
- **1 pt :** 6 `n = n + 1`
- **1 pt :** 7 `u = 1 + np.log(u+1)`

Exercice 3 (EML 2019)

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall t \in\ ]0,+\infty[,\ f(t) = t + \frac{1}{t}$$

PARTIE A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites en 0 et $+\infty$.

- **1 pt : la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt :** $f'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{t^2-1}{t^2} = \dfrac{(t-1)(t+1)}{t^2}$
- **1 pt :**

t	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

- **1 pt : justifications limites**

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$.

- **1 pt : la fonction f est continue (car dérivable) sur $[1,+\infty[$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$**
- **1 pt : f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $f\big([1,+\infty[\big) = [2,+\infty[$**

On note $g : [2,+\infty[\ \to [1,+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1,+\infty[$.

3. a) Dresser le tableau de variations de g.

- **1 pt : D'après le théorème de la bijection, la fonction g est continue sur $[2,+\infty[$ et strictement monotone sur $[2,+\infty[$, de même sens de variation que f sur $[1,+\infty[$**
- **1 pt :**

t	2		$+\infty$
Variations de g	1	$\nearrow$	$+\infty$

b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2,+\infty[$.

- **1 pt : f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $f\big(]1,+\infty[\big) =]2,+\infty[$**
- **1 pt :** $\forall t \in\ ]1,+\infty[,\ f'(t) = \dfrac{(t-1)(t+1)}{t^2} > 0$

c) Soit $y \in [2,+\infty[$. En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in\ ]0,+\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

- **1 pt :** $f(t) = y \iff t^2 - y\,t + 1 = 0$
- **1 pt :** $\Delta \ = \ (-y)^2 - 4 \times 1 \times 1 \ = \ y^2 - 4 \geqslant 0$
- **2 pt : pour tout $y \in\ ]2,+\infty[$, $g(y) = \dfrac{y + \sqrt{y^2-4}}{2}$**
- **1 pt :** $g(2) = 1$

PARTIE C : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2\, u_n} = \frac{1}{n}\, f(n\, u_n)$$

8. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

- **1 pt : initialisation**
- **3 pt : hérédité (1pt pour u_{n+1} est bien défini et 2pt pour $u_{n+1} \geqslant 1$)**

9. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n.

```
1 def suite(n):
2     u = 1
3     for k in  range(1,n) :
4         u =  u + 1/(k**2 * u)
5     return u
```

- **1 pt : 3** `for k in range(1,n):`
- **1 pt : 4** `u = u + 1/(k**2 * u)`

1 pt bonus si les deux lignes sont bonnes et cohérentes

10. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

- **1 pt :** $v_n = \dfrac{1}{n^2\, u_n}$
- **1 pt :** $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ **(0pt si aucun argument)**

b) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$.

- **1 pt : pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$**
- **1 pt : la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann d'exposant $2 > 1$)**
- **1 pt : par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum v_n$ converge**

c) Calculer, pour tout n supérieur ou égal à 2, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

- **1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k = u_n - 1$ par télescopage**
- **1 pt : $u_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k$ et la série $\sum v_n$ converge donc (u_n) est convergente**

11. *a)* Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt$.

- **1 pt : pour tout** $t \in [k-1, k]$, $\dfrac{1}{(k-1)^2} \geqslant \dfrac{1}{t^2} \geqslant \dfrac{1}{k^2}$
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant** $(k-1 \leqslant k)$

b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leqslant p < n$, calculer $\sum\limits_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \ \leqslant \ u_n - u_p \ \leqslant \ \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} \, dt$$

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=p}^{n-1} v_k \ = \ u_n - u_p$ **par télescopage**
- **1 pt :** $0 \ \leqslant \ v_k \ \leqslant \ \dfrac{1}{k^2} \ \leqslant \ \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2} \, dt$
- **1 pt : par sommation :** $0 \ \leqslant \ u_n - u_p \ \leqslant \ \displaystyle\int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} \, dt$ **(0 pt si la relation de Chasles n'est pas citée)**

c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2$.
Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2, 3]$.

- **1 pt : On applique le résultat de la question précédente avec** $p = 2$ **(on a bien :** $2 \leqslant p < n$**)**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{1}^{n-1} \frac{1}{t^2} \, dt \ = \ \left[-\frac{1}{t} \right]_1^{n-1} \ = \ -\left(\frac{1}{n-1} - 1 \right) \ = \ 1 - \frac{1}{n-1}$
- **1 pt :** $1 - \dfrac{1}{n-1} \ \leqslant \ 1$ **donc** $u_2 \ \leqslant \ u_n \ \leqslant \ 1 + u_2$
- **1 pt :** $u_2 = 2$ **donc** $2 \leqslant u_n \leqslant 3$**. Par passage à la limite :** $2 \leqslant \ell \leqslant 3$

d) Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \ \leqslant \ \ell - u_p \ \leqslant \ \frac{1}{p-1}$$

- **1 pt :** $\displaystyle\int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} \, dt \ = \ \left[-\frac{1}{t} \right]_{p-1}^{n-1} \ = \ -\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{p-1} \right) \ = \ \frac{1}{p-1} - \frac{1}{n-1}$
- **1 pt : En passant à la limite quand** n **tend vers** $+\infty$ **dans l'encadrement** $0 \ \leqslant \ u_n - u_p \ \leqslant \ \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{n-1}$**, on obtient** $0 \ \leqslant \ \ell - u_p \ \leqslant \ \dfrac{1}{p-1}$

e) En déduire une fonction **Python** qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

```
1 def valeur_approchee():
2     n = 2
3     while 1 / (n-1) > 10**(-4):
4         n = n + 1
5     return suite(n)
```

- **1 pt :** 2 `n = 2`
- **1 pt :** 3 `while 1 / (n-1) > 10**(-4):`
- **1 pt :** 4 `n = n + 1`
- **1 pt :** 5 `return suite(n)`

Exercice 4 (ESCP 2005)

1. Quelle est la nature des séries $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{n+1}$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{(n+1)^2}$?

- **1 pt : pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n+1} \geqslant 0$ **et** $\dfrac{1}{n} \geqslant 0$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$
- **1 pt : La série** $\sum \dfrac{1}{n}$ **est une série de Riemann d'exposant** 1 $(1 \not> 1)$**. Elle est donc divergente**
- **1 pt : Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série** $\sum \dfrac{1}{n+1}$ **diverge**
- **1 pt :** $\dfrac{1}{(n+1)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$
- **1 pt : La série** $\sum \dfrac{1}{n^2}$ **est une série de Riemann d'exposant** 2 $(2 > 1)$**. Elle est donc convergente. Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série** $\sum \dfrac{1}{(n+1)^2}$ **converge**

2. Écrire une fonction **Python** qui prend en paramètre un entier `n` et renvoie $S_{\mathtt{n}} = \sum\limits_{k=0}^{\mathtt{n}} \dfrac{1}{(k+1)^2}$, somme partielle d'ordre `n` de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

```
1 def somme(n):
2     S = 0
3     for k in range(n+1):
4         S = S + 1 / (k+1)**2
5     return S
```

- **1 pt :** 2 `S = 0`
- **1 pt :** 3 `for k in range(n+1):`
- **1 pt :** 4 `S = S + 1 / (k+1)**2`

3. On note $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.
Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \, a_k, \quad v_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k, \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, a_k$$

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et que la suite (v_n) est croissante.

- **2 pt :** $u_{n+1} - u_n = -a_{2n+1} + a_{2n+2}$
- **1 pt :** (a_n) **est décroissante donc** $a_{2n+2} \leqslant a_{2n+1}$**, et donc :** $a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0$
- **1 pt :** $v_{n+1} - v_n = a_{2n+2} - a_{2n+3}$
- **1 pt :** (a_n) **est décroissante donc** $a_{2n+3} \leqslant a_{2n+2}$**, et donc :** $a_{2n+2} - a_{2n+3} \geqslant 0$

b) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n \leqslant u_n$.
En déduire que la suite (u_n) admet une limite s et que la suite (v_n) admet la même limite s.

- **1 pt :** $v_n - u_n = -a_{2n+1} \leqslant 0$ **(car** (a_n) **est une suite de réels positifs)**

- **1 pt : théorème de convergence monotone bien utilisé pour montrer la convergence des suites (u_n) et (v_n)**
- **1 pt :** $v_n - u_n = -a_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ **donc les deux suites admettent la même limite**

1 pt au lieu des 2 pt si le théorème des suites adjacentes est utilisé au lieu d'utiliser l'inégalité $v_n \leqslant u_n$

c) En déduire que la suite (s_n) converge vers s.

- **1 pt : Comme $s_{2n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} s$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (s_{2n}) (*i.e.* tous les termes d'indices pairs de la suite (s_n)) sauf un nombre fini d'entre eux. Idem pour s_{2n+1}**
- **1 pt : On en déduit que l'intervalle I contient tous les termes de la suite (s_n) sauf un nombre fini d'entre eux**

4. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} (-1)^n a_n$ est convergente.

- **1 pt : D'après la question *3.c)*, la suite (s_n) des sommes partielles de la série $\sum (-1)^n a_n$ converge, donc la série converge**

5. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente. On note $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ sa somme.

- **1 pt : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \dfrac{1}{n+1}$**
- **1 pt : La suite (a_n) est une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle**
- **1 pt : D'après la question *4*, la série $\sum (-1)^n a_n$ (autrement dit la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$) est convergente**

6. a) Établir, pour tout réel t positif et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k \ = \ \frac{1}{1+t} - (-1)^n \ \frac{t^n}{1+t}$$

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-t)^k$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k \ = \ \dfrac{1-(-t)^n}{1-(-t)} = \dfrac{1}{1+t} - \dfrac{(-t)^n}{1+t} = \dfrac{1}{1+t} - (-1)^n \dfrac{t^n}{1+t}$ **car** $-t \neq 1$

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \ = \ \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \ \frac{t^n}{1+t} \ dt$$

- **1 pt : linéarité de l'intégrale citée au moins une fois**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 \ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 \ t^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 \ \frac{1}{1+t} dt = [\ \ln(|1+t|)\ ]_0^1 = \ln(|2|) - \ln(|1|) = \ln(2)$

c) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_0^1 \ \frac{t^n}{1+t} \ dt \right| \ \leqslant \ \frac{1}{n+1}$$

- **1 pt : Par inégalité triangulaire, les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre croissant :**
$$\left|\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\ dt\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{t^n}{1+t}\right|\ dt$$
- **1 pt :** $\left|\dfrac{t^n}{1+t}\right| = \dfrac{|t^n|}{|t+1|} = \dfrac{|t|^n}{|t+1|} = \dfrac{t^n}{t+1}$ **car** $t > 0$ **et** $t+1 > 0$**.**
- **1 pt :** $t > 0$**,** $1+t > 1$**, donc** $\dfrac{1}{t+1} < 1$ **et** $\dfrac{t^n}{1+t} < t^n$**.**
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :** $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\ dt < \int_0^1 t^n\ dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

d) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

- **1 pt :** $\left|(-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\ dt\right| = |(-1)^n| \left|\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\ dt\right| = \left|\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\ dt\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **donc, par théorème d'encadrement, on en déduit que :** $(-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\ dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt : Tous les objets considérés admettant une limite, on en déduit que :**
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \lim_{n\to+\infty} \ln(2) - \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\ dt = \ln(2)$$