DS1 (version B)

Exercice 1

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on définit la matrice $M(a, b, c)$ par :

$$M(a,b,c) \ = \ \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on appelle cardinal de l'ensemble $\{a, b, c\}$, noté $\text{Card}\big(\{a, b, c\}\big)$, le nombre d'éléments distincts de cet ensemble.
Par exemple, si $a = b = c$, alors $\text{Card}\big(\{a, b, c\}\big) = 1$; si $a = b$ et $a \neq c$, alors $\text{Card}\big(\{a, b, c\}\big) = 2$.

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on s'intéresse dans ce problème au nombre de valeurs propres distinctes de la matrice $M(a, b, c)$ et on souhaite démontrer la propriété $(*)$ suivante :

$$(*) \qquad M(a,b,c) \text{ est nversible } \Leftrightarrow \ ab + bc + ac + abc \neq 0$$

Partie A : Généralités

1. Justifier que, pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, la matrice $M(a, b, c)$ est diagonalisable.

2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

a) Montrer que la matrice $M(a, b, c)$ ne peut pas admettre une unique valeur propre.
On pourra par exemple raisonner par l'absurde.

b) En déduire que la matrice $M(a, b, c)$ admet soit deux soit trois valeurs propres distinctes.

3. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On pose f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $M(a, b, c)$.

a) Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}' = (e_2, e_1, e_3)$.

b) En déduire que les matrices $M(a, b, c)$ et $M(b, a, c)$ ont les mêmes valeurs propres.

c) De la même façon, montrer que les matrices $M(a, b, c)$ et $M(a, c, b)$ ont les mêmes valeurs propres.

Ces deux derniers résultats permettent de justifier que les valeurs propres de la matrice $M(a, b, c)$ ne dépendent pas de l'ordre des réels du triplet (a, b, c).

Partie B : Cas où $\text{Card}\big(\{a, b, c\}\big) = 1$

4. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $a = b = c = 0$ et on note $J = M(0, 0, 0)$.

a) Calculer J^2. Déterminer alors un polynôme annulateur de J.

b) En déduire les valeurs propres de J et préciser une base des sous-espaces propres de J.

c) Déterminer une matrice P inversible de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $J = PDP^{-1}$.

5. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a) Vérifier : $M(a, a, a) = P\,(a\,I_3 + D)\,P^{-1}$.

b) En déduire que la matrice $M(a,a,a)$ admet exactement deux valeurs propres distinctes et les déterminer en fonction de a.

c) Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a,a,a)$.

Partie C : Cas où $\text{Card}\big(\{a,b,c\}\big) = 2$

6. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $a = b = 0$ et que $c \in \mathbb{R}^*$.
On note $C = M(0,0,c)$.

a) Justifier que 0 est une valeur propre de C.

b) Soit λ un réel non nul.

(i) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence :

$$CX \; = \; \lambda X \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ z = (\lambda - 2)\, x \\ \big(\lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c\big)\, x = 0 \end{array} \right.$$

(ii) En déduire : λ est une valeur propre de $C \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c = 0$.

c) Montrer alors que C admet trois valeurs propres distinctes.

7. Soit $(a,c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq c$.

a. Exprimer $M(a,a,c)$ comme une combinaison linéaire de I_3 et de $M(0,0,c-a)$.

b. En déduire que la matrice $M(a,a,c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

c. Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a,a,c)$.

8. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\text{Card}\big(\{a,b,c\}\big) = 2$.
À l'aide de la conclusion de la question ***3.***, montrer que la matrice $M(a,b,c)$ admet trois valeurs propres distinctes et vérifier la propriété $(*)$ dans ce cas.

Partie D : Cas où $\text{Card}\big(\{a,b,c\}\big) = 3$

9. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a < b < c$.
On note g la fonction définie sur l'ensemble $D = \mathbb{R} \setminus \{a,b,c\}$ par :

$$\forall x \in D, \quad g(x) \; = \; \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$$

a) Dresser le tableau de variations de g sur D en y précisant les limites en $+\infty$, en $-\infty$, ainsi qu'à gauche et à droite de a, de b et de c.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 1$, d'inconnue $x \in D$, admet exactement trois solutions distinctes λ_1, λ_2, λ_3, vérifiant : $a < \lambda_1 < b < \lambda_2 < c < \lambda_3$.

c) Soit $\lambda \in D$ une solution de l'équation $g(x) = 1$.

On note X_λ la matrice colonne de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par : $X_\lambda = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda - a} \\ \dfrac{1}{\lambda - b} \\ \dfrac{1}{\lambda - c} \end{pmatrix}$.

Montrer que X_λ est un vecteur propre de la matrice $M(a,b,c)$ associé à la valeur propre λ.

d) En déduire que la matrice $M(a,b,c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

10. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que Card$\big(\{a,b,c\}\big) = 3$.

a) Montrer que la matrice $M(a,b,c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

b) Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a,b,c)$.

11. On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Justifier que la matrice A est inversible.

b) On note α la plus grande valeur propre de A.

(i) Montrer : $4 < \alpha < 5$.

(ii) Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction **Python** ci-dessous afin qu'elle renvoie une valeur approchée de α à 10^{-3} près à l'aide de la méthode de dichotomie.

```
def valeur_approchee():
    x = 4
    y = 5
    while ________________:
        m = (x + y) / 2
        if 1/m + 1/(m-1) + 1/(m-2) ________:
            ________
        else:
            ________
        end
return (x+y)/2
```

Exercice 2

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto 1 + \ln(x+n)$ et $h_n : x \mapsto x - f_n(x)$. On admet que $\ln(2) \simeq 0,69$.

Etude de f_1

1. Donner sans démonstration le domaine de définition $\mathcal{D}_{f_1}$ de la fonction f_1.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f_1. On ne justifiera pas les limites.

3. ***a.*** Déterminer l'équation de la tangente en 0 au graphe de f_1.

b. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_1}$, $f_1(x) \leqslant x + 1$.

4. Tracer la courbe représentative de f_1.

Etude d'une suite implicite

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = x$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée α_n. (On ne cherchera pas à calculer α_n)

6. ***a.*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$h_n(\alpha_{n+1}) = \ln\left(\frac{\alpha_{n+1} + n + 1}{\alpha_{n+1} + n}\right)$$

b. En déduire que la suite (α_n) est strictement monotone. On précisera son sens de variations.

7. ***a.*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n > 1 + \ln(n)$.

b. En déduire la limite de la suite (α_n).

8. ***a.*** Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} h_n\left(\ln(n)+2\right) = 1$$

On admet alors qu'il existe un rang $n_0 \geqslant 2$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $h_n\left(\ln(n)+2\right) > 0$.

b. Montrer que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\alpha_n < \ln(n) + 2$.

c. En déduire un équivalent simple de α_n lorsque n tend vers $+\infty$.

9. ***a.*** Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$.

b. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\alpha_n}{n^2}$.

Valeur approchée de α_1 par dichotomie

10. Montrer que $1 < \alpha_1 < 3$. On pourra utiliser la question 7a.

11. Recopier et compléter le script **Python** suivant afin qu'il renvoie une valeur approchée de α_1 à 10^{-4} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
import numpy as np
a,b = 1,3
while ________________ :
    c = (a + b) / 2
    if ____________________ :
        b = c
    else :
        a = c
print ____
```

Valeur approchée de α_1 par méthode de point fixe

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$$

12. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

13. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha_1| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha_1|$$

14. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha_1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

15. En déduire la limite de la suite (u_n).

16. Recopier et compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle

- prenne en argument un réel `epsilon` strictement positif
- renvoie une liste `[n,u]` où `n` est un entier qui vérifie $|u_{\mathtt{n}} - \alpha_1| \leqslant$ `epsilon` et $u = u_{\mathtt{n}}$.

```python
import numpy as np
def ApprocheAlpha(epsilon) :
    n = 0
    u = 1
    while ______________________________ :
        n = __________
        u = ____________________
    return [n,u]
```

Exercice 3

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)^2}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que I_n est une intégrale convergente.

2. ***a.*** Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \geqslant 1$, on ait :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$$

b. En déduire la valeur de I_1.

3. ***a.*** Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$$

b. En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

4. ***a.*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $I_n + I_{n+1}$.

b. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c. En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$ puis déterminer la nature de la série $\sum I_n$.

5. ***a.*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que J_n est une intégrale convergente.

b. Calculer J_0.

6. ***a.*** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k.

b. Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k$ en fonction de J_n.

c. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{4(n-1)}$. Déterminer la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$.

d. En déduire que la série $\sum (-1)^{n-1} I_n$ converge et donner sa somme.

7. A l'aide des questions 4a et 6a, compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle

- prenne en argument un entier `n` supérieur ou égal à 2
- renvoie une liste `[I,J]` qui contient la valeur de $I_{\mathtt{n}}$ et la valeur de $J_{\mathtt{n}}$

```python
import numpy as np
def CalculeIJ(n) :
    I = np.log(2)
    J = 1/2
    J = __________
    for k in range(1,n) :
        I = ____________
        J = __________
    return [I,J]
```

Exercice 4

On désigne par α un entier strictement supérieur à 1 et on pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$$

Dans la suite de l'exercice, on écrira u_n au lieu de $u_n(\alpha)$.

1. ***a.*** Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le réel u_n est bien défini et que $u_n > 0$.

b. Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et en conlure qu'elle converge.

2. ***a.*** Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1})$.

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n = u_1 \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)$.

3. Montrer, en considérant $\ln(u_n)$, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n\alpha}{\alpha - 1} u_{n+1}$.

b. En déduire que : $\forall n \geqslant 2$, $\ln(S_n) = \ln(u_1) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)$.

c. A l'aide d'un développement limité d'ordre 1 en $\dfrac{1}{k}$, donner un équivalent, lorsque k est au voisinage de $+\infty$, de $\ln\left(1 - \dfrac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$.

d. Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.

5. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 2$ et on admet qu'alors $u_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

On rappelle qu'à l'aide de la bibliothèque `numpy` (importée sous l'alias `np`), on accède à la commande `np.pi` qui renvoie une valeur approchée du nombre π.

Ecrire une fonction **Python** qui

- prend en argument un entier `n` supérieur ou égal à 2
- renvoie la valeur de $u_{\mathtt{n}}$.