Exercice 1 :[Question barrière] Déterminer une base de $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z = 3x + 2y \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$:

- engendre F
- est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires

donc $\mathcal{F}$ est une base de F. (D'où $\dim(F) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 2$.) □

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On rappelle que $E_0(A) = \left\{ X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \right\}$.

Déterminer une base de $E_0(A)$.

Démonstration. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
X \in E_0(A) &\iff AX = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y + z = 0 & \\ - y - 3z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ - y - 3z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ - y - 3z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y = -z \\ y = -3z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 2z & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ y = -3z & \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
E_0(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = 2z, y = -3z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ -3z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

- engendre $E_0(A)$
- est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\mathcal{F}$ est une base de $E_0(A)$. (D'où $\dim(E_0(A)) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 1$.) □

Exercice 3 : Déterminer une base de $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a-b \\ b-a & b \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & a-b \\ b-a & b \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$:

- engendre F
- est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires

donc $\mathcal{F}$ est une base de F. (D'où $\dim(F) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 2$.) □