Interrogation de rentrée (cubes)

On traitera obligatoirement les exercices 1, 2 et 3, et on les traitera dans cet ordre. Les autres ne sont pas obligatoires et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. *Entourer la bonne réponse (aucune justification n'est attendue)*

1. Dans l'écriture « Soit $f : x \mapsto x + \ln(x)$ », la variable x est : libre / liée

et la variable f est : libre / liée

2. Dans l'écriture $\big([X = i]\big)_{i \in [\![1,n]\!]}$, la variable i est : libre / liée

la variable n est : libre / liée

et la variable X est : libre / liée

3. Le résultat de la quantité $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt$ dépend de : x / t / ni x ni t / x et t

4. Une variable muette est : libre / liée

5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite admettant une limite (finie ou non),

la quantité $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$: dépend toujours de n / ne dépend jamais de n / peut dépendre de n

6. Dans l'écriture $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, la variable k est : libre / liée

et la variable n est : libre / liée

7. Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = ax + by\}$,
la variable x est : libre / liée
la variable y est : libre / liée
la variable z est : libre / liée
la variable a est : libre / liée
la variable b est : libre / liée

8. Dans l'écriture : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies \dfrac{1}{2^n} \leqslant 10^{-10}$,
la variable n_0 est : libre / liée
la variable n est : libre / liée

9. Une variable libre : doit toujours / ne doit jamais / doit parfois — être introduite par un « Soit »

10. Une variable liée : doit toujours / ne doit jamais / doit parfois — être introduite par un « Soit »

Exercice 2
Pour chacune des expressions suivantes : déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).
Aucune justification n'est attendue pour ces questions.

1. $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$,
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\, dt$,
3. $f : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\, t}$,
4. $f(t)$,
5. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x - 4 \geqslant 0\}$,
6. $\displaystyle\sum_{i=j}^{n} i^3$,
7. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} (i+3j)^3$,
8. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$,
9. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
10. $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} u_n$,
11. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \ln(2)$
12. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

Exercice 3
1. ***a)*** Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 3\,x & - & 6\,y & + & 9\,z & = & 0 \\ -x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$.

b) On note : $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & -8 & 9 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_{-2}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X\}$.

2. ***a)*** Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 3\,z & = & 0 \\ 3\,x & + & 3\,y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$.

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$.

3. ***a)*** Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & + & 9\,y & + & z & = & 0 \\ 3\,x & + & 10\,y & + & z & = & 0 \\ -6\,x & - & 18\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array}\right.$.

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 3 & 13 & 1 \\ -6 & -18 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_3(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$.

4. Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 4
Soit $p \in\ ]0,1[$. On note $q = 1 - p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit une loi géométrique de paramètre p.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

2. On suppose maintenant que X est une v.a.r. **quelconque** qui vérifie : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

a) Démontrer soigneusement que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([X = k]) \ = \ \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

b) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}\,(p)$.

3. Conclure.

Exercice 5
Dans tout cet exercice, g désigne la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in\ [0,+\infty[,\ g(x) = \frac{1+x}{1+\mathrm{e}^x}$$

On donne $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \simeq 1,65$ et $\mathrm{e} \simeq 2,72$.

Partie I : Étude de la fonction g

1. Soit $\varphi : x \mapsto x - \mathrm{e}^{-x}$.

a. Dresser le tableau de variations de φ. On fera apparaître les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. En déduire que l'équation $\mathrm{e}^{-x} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On notera α cette solution.

c. Montrer que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

2. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution sur $[0,+\infty[$ et que cette solution est α.

3. **a.** Calculer, pour tout $x \in\ [0,+\infty[$, $g'(x)$. Préciser $g'(0)$.

b. Dresser le tableau de variations de g. On fera apparaître la limite en $+\infty$.

c. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g. On fera apparaître en particulier la tangente en 0 à la courbe $\mathscr{C}_g$ et la droite d'équation $y = x$.

d. Montrer que, pour tout $x \in\ [0,+\infty[$,

$$g''(x) = -\mathrm{e}^x \frac{3 + x + (1-x)\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3}$$

e. En déduire que g' est décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

f. On admet que $g'(\frac{1}{2}) \simeq 0,025$ et $g'(1) \simeq -0,124$.
En déduire que, pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $|g'(x)| \leqslant 0,125$. On note $M = 0,125$.

Partie II : Étude d'une suite

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

5. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

6. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

7. **a)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant M\,|u_n - \alpha|$.

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2} M^{n-1}$.

d) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \alpha - u_n$. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$.

8. ***a)*** Recopier et compléter la fonction **Python** suivante qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

```
import math
def suite(n):
    u = ..........
    for k in range(n):
        u = ..........
    return u
```

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de α à `epsilon` près.

```
1 def valeur_approchee(epsilon):
2     n = 1
3     while ..........
4         n = n + 1
5     return suite(n)
```

Exercice 6 (CUBES)

Soit $\alpha > 0$. On pose f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. ***a)*** Déterminer la valeur de α pour que f soit une densité de probabilité.

Dans la suite, on supposera que α prend cette valeur et on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ admettant f pour densité.

b) Préciser $X(\Omega)$.

c) Déterminer la fonction de répartition F de X.

2. On pose $Y = X^2$. Quelle est la loi de Y ?

Soit $n \geqslant 1$. On considère $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de la v.a.r. X.

3. On pose $M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Préciser $M_n(\Omega)$.

b) Déterminer la fonction de répartition F_{M_n} de M_n.

c) Montrer que la suite de v.a.r. (M_n) converge en loi vers une v.a.r. M dont on précisera la loi.

4. On pose $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Préciser $Z_n(\Omega)$.

b) Déterminer la fonction de répartition F_{Z_n} de Z_n.

c) Est-que la suite de v.a.r. (Z_n) converge en loi vers une v.a.r. Z ? Si oui, préciser la loi de Z.