Interrogation de rentrée (cubes) - Barème

On traitera obligatoirement les exercices 1, 2 et 3, et on les traitera dans cet ordre. Les autres ne sont pas obligatoires et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. *Entourer la bonne réponse (aucune justification n'est attendue)*

1. Dans l'écriture « Soit $f : x \mapsto x + \ln(x)$ », la variable x est : libre / $\boxed{\text{liée}}$

et la variable f est : $\boxed{\text{libre}}$ / liée

2. Dans l'écriture $\big([X = i]\big)_{i\in[\![1,n]\!]}$, la variable i est : libre / $\boxed{\text{liée}}$

la variable n est : $\boxed{\text{libre}}$ / liée

et la variable X est : $\boxed{\text{libre}}$ / liée

3. Le résultat de la quantité $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ dépend de : $\boxed{x}$ / t / ni x ni t / x et t

4. Une variable muette est : libre / $\boxed{\text{liée}}$

5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite admettant une limite (finie ou non),

la quantité $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$: dépend toujours de n / $\boxed{\text{ne dépend jamais de } n}$ / peut dépendre de n

6. Dans l'écriture $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, la variable k est : libre / $\boxed{\text{liée}}$

et la variable n est : $\boxed{\text{libre}}$ / liée

7. Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = ax + by\}$,
la variable x est : libre / $\boxed{\text{liée}}$
la variable y est : libre / $\boxed{\text{liée}}$
la variable z est : libre / $\boxed{\text{liée}}$
la variable a est : $\boxed{\text{libre}}$ / liée
la variable b est : $\boxed{\text{libre}}$ / liée

8. Dans l'écriture : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies \dfrac{1}{2^n} \leqslant 10^{-10}$,
la variable n_0 est : libre / $\boxed{\text{liée}}$
la variable n est : libre / $\boxed{\text{liée}}$

9. Une variable libre : doit toujours / ne doit jamais / $\boxed{\text{doit parfois}}$ être introduite par un « Soit »

10. Une variable liée : doit toujours / $\boxed{\text{ne doit jamais}}$ / doit parfois être introduite par un « Soit »

- **10 pts : on attribue 1 pt par question juste, pas de point négatif en cas de question fausse.**

Exercice 2
Pour chacune des expressions suivantes : déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).
Aucune justification n'est attendue pour ces questions.

1. $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$,

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\ dt$,

3. $f : t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, t}$,

4. $f(t)$,

5. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x - 4 \geqslant 0\}$,

6. $\sum\limits_{i=j}^{n} i^3$,

7. $\sum\limits_{j=0}^{n} \sum\limits_{i=j}^{n} (i+3j)^3$,

8. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$,

9. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

10. $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} u_n$,

11. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \ln(2)$

12. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

Démonstration.

1. objet : réel

2. objet : réel

3. objet : fonction

4. objet : réel

5. objet : ensemble

6. objet : réel

7. objet : réel

8. proposition

9. objet : suite

10. objet : réel

11. proposition

12. proposition

□

- **12 pts : on attribue 1 pt par question juste, pas de point négatif en cas de question fausse.**

Exercice 3

1. a) Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 3\,x & - & 6\,y & + & 9\,z & = & 0 \\ -x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$.

- **3 pts : $x = 2y - 3z$. Précisions :**
  - × **on attribue les 3 pts seulement si le pivot de Gauss est correctement implémenté et qu'il n'y a pas d'erreur.**
  - × **on peut attribuer jusque 2 pts en cas d'erreur de calcul.**
  - × **on peut attribuer jusque 2 pts en cas de gestion non correcte des variables auxiliaires mais bon résultat.**

b) On note : $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & -8 & 9 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_{-2}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X\}$.

- **1 pt : résultat** $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
- **2 pts : rédaction. Plus précisément, on attribue :**
  - × **0 pt : si utilisation du symbole ⇒ à une étape ou incompréhension totale des objets manipulés.**
  - × **1 pt : une confusion d'objet ou une présentation ne correspondant pas au corrigé (notamment le fait d'écrire :** $X = y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$**)**
  - × **2 pts : rédaction du corrigé respectée**

2. ***a)*** Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$.

- **3 pts :** $x = \frac{4}{3}z$ **et** $y = -\frac{5}{3}z$**. Selon les modalités précédentes.**

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$.

- **1 pt : résultat** $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$
- **2 pts : rédaction. Selon les modalités précédentes.**

3. ***a)*** Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 9y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 10y & + & z & = & 0 \\ -6x & - & 18y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$.

- **3 pts :** $x = -\frac{1}{3}z$ **et** $y = 0$**. Selon les modalités précédentes.**

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 3 & 13 & 1 \\ -6 & -18 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_3(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$.

- **1 pt : résultat** $E_3(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$
- **2 pts : rédaction. Selon les modalités précédentes.**

4. Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

- **3 pts :** $x = 0$ **et** $y = 0$ **et** $z = 0$**. Selon les modalités précédentes.**

Exercice 4

Soit $p \in \,]0,1[$. On note $q = 1 - p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit une loi géométrique de paramètre p.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X > k]) \;=\; 1 - \mathbb{P}\left(\overline{[X > k]}\right) \;=\; 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k])$
- **1 pt :** $[X \leqslant k] \;=\; \bigcup\limits_{i=1}^{k} [X = i]$
- **1 pt : les événements de la famille** $\big([X = i]\big)_{i \in [\![1,k]\!]}$ **sont 2 à 2 incompatibles**
- **1 pt :** $\sum\limits_{i=0}^{k-1} q^i = \dfrac{1 - q^k}{1 - q}$ **même si** $q \neq 1$ **non précisé**

2. On suppose maintenant que X est une v.a.r. **quelconque** qui vérifie : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

a) Démontrer soigneusement que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([X = k]) \;=\; \mathbb{P}([X > k - 1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

- **1 pt :** $[X > k-1] = [X \geqslant k] = [X = k] \cup [X > k]$ **car** X **est à valeurs entières**
- **1 pt : les événements** $[X = k]$ **et** $[X > k]$ **sont incompatibles**

b) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

- **1 pt :** $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X = k]\big) = \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k]) = q^{k-1} - q^k = q^{k-1}(1-q) \;=\; q^{k-1}p$

3. Conclure.

- **1 pt : conclure quant à l'équivalence**
- **1 pt : bonus s'il est précisé que** X **est à valeurs entières**

Exercice 5
Dans tout cet exercice, g désigne la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \ [0, +\infty[, \ g(x) = \frac{1+x}{1+\mathrm{e}^x}$$

On donne $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \simeq 1,65$ et $\mathrm{e} \simeq 2,72$.

Partie I : Étude de la fonction g

1. Soit $\varphi : x \mapsto x - \mathrm{e}^{-x}$.

a. Dresser le tableau de variations de φ. On fera apparaître les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

- **1 pt : La fonction** φ **est dérivable sur** $\mathbb{R}$
- **1 pt :** $\varphi'(x) \;=\; 1 + \mathrm{e}^{-x} > 0$
- **1 pt :**

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$	$+$
Variations de φ	$-\infty \nearrow +\infty$

b. En déduire que l'équation $\mathrm{e}^{-x} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On notera α cette solution.

- **1 pt : La fonction** φ **est :**
  - $\times$ **continue sur** $\mathbb{R}$
  - $\times$ **strictement croissante sur** $\mathbb{R}$
- **1 pt :** φ **réalise une bijection de** $\mathbb{R}$ **sur** $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
- **1 pt :** $0 \in \mathbb{R}$**, donc l'équation** $\varphi(x) = 0$ **admet une unique solution sur** $\mathbb{R}$

c. Montrer que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

- **1 pt :** $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$
- **1 pt :** $\varphi(1) > 0$
- **1 pt : la bijection réciproque de** φ **a même sens de variations que** φ **et donc est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$

2. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution sur $[0, +\infty[$ et que cette solution est α.

- **1 pt :** $g(x) = x \iff \varphi(x) = 0$
- **1 pt bonus : vérification que** α **est bien dans** $[0, +\infty[$

3. ***a.*** Calculer, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g'(x)$. Préciser $g'(0)$.

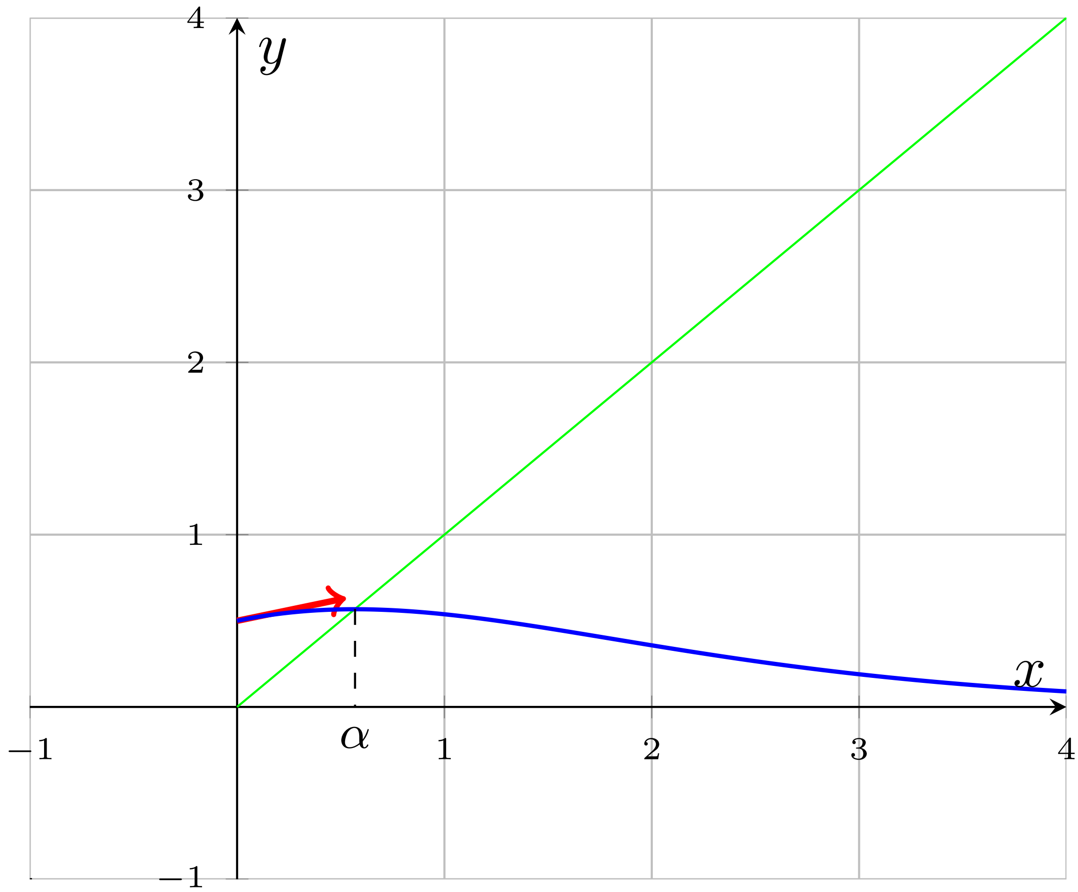
- **1 pt : la fonction** g **est dérivable sur** $[0, +\infty[$
- **1 pt :** $g'(x) = \frac{1 - x\mathbf{e}^x}{(1+\mathbf{e}^x)^2}$
- **1 pt :** $g'(0) = \dfrac{1}{4}$

b. Dresser le tableau de variations de g. On fera apparaître la limite en $+\infty$.

- **1 pt :** $g'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant \alpha$
- **1 pt : Par croissance comparée,** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$
- **1 pt :**

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	α	$\searrow$	0

c. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g. On fera apparaître en particulier la tangente en 0 à la courbe $\mathscr{C}_g$ et la droite d'équation $y = x$.



- **1 pt : tangente en 0 raisonnable (0 pt si elle ne part pas du point $(0, \frac{1}{2})$)**
- **1 pt : apparition du point remarquable α, abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_g$ avec la droite d'équation $y = x$**
- **1 pt : changement de monotonie en α**
- **1 pt : limite en ∞ respectée**
- **1 pt : allure globale de la courbe (tracé en une fois)**

d. Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$g''(x) = -\mathrm{e}^x \frac{3 + x + (1 - x)\mathrm{e}^x}{(1 + \mathrm{e}^x)^3}$$

- **2 pt : calcul correct**

e. En déduire que g' est décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

- **1 pt : $1 - x \geqslant 0$**
- **1 pt : explications raisonnables pour $g''(x) \leqslant 0$**

f. On admet que $g'(\frac{1}{2}) \simeq 0,025$ et $g'(1) \simeq -0,124$.
En déduire que, pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $|g'(x)| \leqslant 0,125$. On note $M = 0,125$.

- **1 pt : Par décroissance de g', on a $g'(1) \leqslant g'(x) \leqslant g'\left(\frac{1}{2}\right)$**
- **1 pt : $-M \leqslant -0,124 \leqslant g'(x) \leqslant 0,025 \leqslant M$**

Partie II : Étude d'une suite

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pt : hérédité**
- **1 pt : aspect « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie » bien démontré**

5. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pt : hérédité**

6. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

- **1 pt : la suite (u_n) est :**
  - **croissante**
  - **majorée par α**
- **1 pt : théorème de convergence monotone cité**
- **1 pt : par continuité de la fonction g en ℓ, $\ell = g(\ell)$**

7. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pt : hérédité**

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant M\,|u_n - \alpha|$.

- **1 pt : x et y sont bien dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$**
- **1 pt : hypothèses IAF ou question 3f bien citée**
- **1 pt : $|g(x) - g(y)| \leqslant M\,|x - y|$**

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}M^{n-1}$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pt : hérédité**

d) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \alpha - u_n$. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$.

- **1 pt : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{2}M^{n-1}$.**
- **1 pt : La série $\sum M^n$ est géométrique de raison $M \in]-1, 1[$ donc converge. Donc la série $\sum \dfrac{1}{2}M^{n-1}$ converge.**
- **1 pt : Par critère de comparaison pour les SATP, la série $\sum v_n$ converge.**

8. a) Recopier et compléter la fonction **Python** suivante qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

```
import math
def suite(n):
    u = ..........
    for k in range(n):
        u = ..........
    return u
```

```
import math
def suite(n):
    u = 0
    for k in range(n):
        u = (1+u)/(1+math.exp(u))
    return u
```

- **1 pt :** `u = 0`
- **1 pt :** `u = (1+u)/(1+math.exp(u))`

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de α à `epsilon` près.

```
1 def valeur_approchee(epsilon):
2     n = 1
3     while ..........
4         n = n + 1
5     return suite(n)
```

```
1 def valeur_approchee(epsilon):
2     n = 1
3     while 0.5 * 0.125**(n-1) > epsilon:
4         n = n + 1
5     return suite(n)
```

- **2 pt :** `while 0.5 * 0.125**(n-1) > epsilon:`

Exercice 6 (CUBES)
Soit $\alpha > 0$. On pose f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. a) Déterminer la valeur de α pour que f soit une densité de probabilité.

- **1 pt : La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$.**
- **1 pt : La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.**
- **1 pt :** $\int_0^B x^2 \mathbf{e}^{-x}\ dx = -B^2\mathbf{e}^{-B} - 2B\mathbf{e}^{-B} - 2\mathbf{e}^{-B} + 2$
- **1 pt : justification IPP**
- **1 pt : citation croissance comparée**
- **1 pt :** $\alpha = \frac{1}{2}$

Dans la suite, on supposera que α prend cette valeur et on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ admettant f pour densité.

b) Préciser $X(\Omega)$.

- **1 pt : La fonction f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$ donc on peut considérer que $X(\Omega) = [0, +\infty[$**

c) Déterminer la fonction de répartition F de X.

- **1 pt : Si $x < 0$, alors $F(x) = 0$**
- **1 pt : Si $x \geqslant 0$, $F(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right)\mathbf{e}^{-x}$**

2. On pose $Y = X^2$. Quelle est la loi de Y ?

- **1 pt :** $Y(\Omega) = [0, +\infty[$
- **1 pt : Si $y \geqslant 0$, $F_Y(y) = 1 - \left(\frac{1}{2}y + \sqrt{y} + 1\right)\mathbf{e}^{-\sqrt{y}}$**
- **1 pt : justifications du calcul**

Soit $n \geqslant 1$. On considère $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de la v.a.r. X.

3. On pose $M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Préciser $M_n(\Omega)$.

- **1 pt :** $M_n(\Omega) = [0, +\infty[$

b) Déterminer la fonction de répartition F_{M_n} de M_n.

- **1 pt :** $F_{M_n}(x) = 1 - \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^n [X_k > x])$
- **1 pt :** $F_{M_n}(x) = 1 - \prod_{k=1}^n \mathbb{P}([X_k > x])$ **par indépendance**
- **1 pt :** $F_{M_n}(x) = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - F(x)))$ **car les X_k suivent la même loi que X**
- **1 pt :** $F_{M_n}(x) = 1 - (1 - F(x))^n$ **ou** $F_{M_n} : x \mapsto \begin{cases} 1 - \left(\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right)\mathbf{e}^{-x}\right)^n & \textbf{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$

c) Montrer que la suite de v.a.r. (M_n) converge en loi vers une v.a.r. M dont on précisera la loi.

- **1 pt : Si $x < 0$, on a $F_{M_n}(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$**

- **1 pt : Si $x > 0$, on a $F_{M_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$**
- **1 pt : La suite de v.a.r. (M_n) converge en loi vers la v.a.r. M constante égale à 0**

4. On pose $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Préciser $Z_n(\Omega)$.

- **1 pt : $Z_n(\Omega) = [0, +\infty[$**

b) Déterminer la fonction de répartition F_{Z_n} de Z_n.

- **1 pt : $F_{Z_n}(x) = \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant x])$**
- **1 pt : $F_{Z_n}(x) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_k \leqslant x])$ par indépendance**
- **1 pt : $F_{Z_n}(x) = \prod_{k=1}^{n} F(x)$ car les X_k suivent la même loi que X**
- **1 pt : $F_{Z_n}(x) = F(x)^n$ ou $F_{Z_n} : x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right) \mathrm{e}^{-x}\right)^n & \textbf{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$**

c) Est-que la suite de v.a.r. (Z_n) converge en loi vers une v.a.r. Z ? Si oui, préciser la loi de Z.

- **1 pt : Pour tout $x \geqslant 0$, $F_{Z_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.**
- **1 pt : raisonnement par l'absurde**