Interrogation de rentrée (cubes) - Correction

On traitera obligatoirement les exercices 1, 2 et 3, et on les traitera dans cet ordre. Les autres ne sont pas obligatoires et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. *Entourer la bonne réponse (aucune justification n'est attendue)*

1. Dans l'écriture « Soit $f : x \mapsto x + \ln(x)$ », la variable x est : libre / $\boxed{\text{liée}}$

et la variable f est : $\boxed{\text{libre}}$ / liée

2. Dans l'écriture $\big([X = i]\big)_{i \in [\![1,n]\!]}$, la variable i est : libre / $\boxed{\text{liée}}$

la variable n est : $\boxed{\text{libre}}$ / liée

et la variable X est : $\boxed{\text{libre}}$ / liée

3. Le résultat de la quantité $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ dépend de : $\boxed{x}$ / t / ni x ni t / x et t

4. Une variable muette est : libre / $\boxed{\text{liée}}$

5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite admettant une limite (finie ou non),

la quantité $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$: dépend toujours de n / $\boxed{\text{ne dépend jamais de } n}$ / peut dépendre de n

6. Dans l'écriture $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, la variable k est : libre / $\boxed{\text{liée}}$

et la variable n est : $\boxed{\text{libre}}$ / liée

7. Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = ax + by\}$,
la variable x est : libre / $\boxed{\text{liée}}$
la variable y est : libre / $\boxed{\text{liée}}$
la variable z est : libre / $\boxed{\text{liée}}$
la variable a est : $\boxed{\text{libre}}$ / liée
la variable b est : $\boxed{\text{libre}}$ / liée

8. Dans l'écriture : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies \dfrac{1}{2^n} \leqslant 10^{-10}$,
la variable n_0 est : libre / $\boxed{\text{liée}}$
la variable n est : libre / $\boxed{\text{liée}}$

9. Une variable libre : doit toujours / ne doit jamais / $\boxed{\text{doit parfois}}$ être introduite par un « Soit »

10. Une variable liée : doit toujours / $\boxed{\text{ne doit jamais}}$ / doit parfois être introduite par un « Soit »

Exercice 2
Pour chacune des expressions suivantes : déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).
Aucune justification n'est attendue pour ces questions.

1. $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$,
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\ dt$,
3. $f : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}$,
4. $f(t)$,
5. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x - 4 \geqslant 0\}$,
6. $\displaystyle\sum_{i=j}^{n} i^3$,
7. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} (i+3j)^3$,
8. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$,
9. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
10. $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} u_n$,
11. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \ln(2)$
12. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

Démonstration.

1. objet : réel
2. objet : réel
3. objet : fonction
4. objet : réel
5. objet : ensemble
6. objet : réel
7. objet : réel
8. proposition
9. objet : suite
10. objet : réel
11. proposition
12. proposition

□

Exercice 3

1. ***a)*** Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 3\,x & - & 6\,y & + & 9\,z & = & 0 \\ -x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$.

Démonstration.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 3\,x & - & 6\,y & + & 9\,z & = & 0 \\ -x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{\ x - 2\,y + 3\,z = 0\right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{\ x = 2\,y - 3\,z\right.$$

□

b) On note : $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & -8 & 9 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_{-2}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X\}$.

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} X \in E_{-2}(A) & \Leftrightarrow & AX = -2X \\ & \Leftrightarrow & (A + 2I)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 3\,x & - & 6\,y & + & 9\,z & = & 0 \\ -x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 2\,y & - & 3\,z \end{array} \right. \end{array}$$

(d'après la question précédente)

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_{-2}(A) & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = 2y - 3z \} \\ & = & \{ \begin{pmatrix} 2y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \} \\ & = & \{ y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

$$\boxed{E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□

2. ***a)*** Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$.

Démonstration.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & + & 5z & = & 0 \\ & & 3y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & z \\ & & 3y & = & -5z \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} 6x & & & = & 8z \\ & & 3y & = & -5z \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x & & & = & \dfrac{4}{3}\,z \\ & & y & = & -\dfrac{5}{3}\,z \end{array}\right.$$

□

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$.

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} X \in E_1(A) & \Leftrightarrow & AX = X \\ & \Leftrightarrow & (A - I)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} x & & & = & \dfrac{4}{3}\,z \\ & & y & = & -\dfrac{5}{3}\,z \end{array}\right. \end{array}$$

(d'après la question précédente)

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_1(A) & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = \dfrac{4}{3}z,\ y = -\dfrac{5}{3}z\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} \frac{4}{3}z \\ -\frac{5}{3}z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{z \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

$$\boxed{E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right)}$$

□

3. ***a)*** Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & + & 9\,y & + & z & = & 0 \\ 3\,x & + & 10\,y & + & z & = & 0 \\ -6\,x & - & 18\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array}\right.$.

Démonstration.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & + & 9\,y & + & z & = & 0 \\ 3\,x & + & 10\,y & + & z & = & 0 \\ -6\,x & - & 18\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & + & 9\,y & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 3\,x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\dfrac{1}{3}z \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

□

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 3 & 13 & 1 \\ -6 & -18 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_3(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$.

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_3(A) & \Leftrightarrow & AX = 3X \\
& \Leftrightarrow & (A - 3I)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ -6 & -18 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & + & 9\,y & + & z & = & 0 \\ 3\,x & + & 10\,y & + & z & = & 0 \\ -6\,x & - & 18\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\dfrac{1}{3} z \\ y & = & 0 \end{array} \right. \qquad \textit{(d'après la question précédente)}
\end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_3(A) & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -\dfrac{1}{3} z,\ y = 0 \} \\
& = & \{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \} \\
& = & \{ z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \\
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)}$$

□

4. Résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array} \right.$$

Démonstration.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow}} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & - & 4\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & 6\,y & - & 7\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + 3\,L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & - & 4\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & & - & 5\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccl} x & & & = & 0 \\ & y & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right.$$

(par remontées successives)

□

Exercice 4
Soit $p \in \,]0,1[$. On note $q = 1-p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit une loi géométrique de paramètre p.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- On remarque tout d'abord :

$$\mathbb{P}([X > k]) \; = \; 1 - \mathbb{P}\left(\overline{[X > k]}\right) \; = \; 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k])$$

- Par ailleurs, comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$: $[X \leqslant k] \; = \; \bigcup\limits_{i=1}^{k} \, [X = i]$.

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X \leqslant k]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \, [X = i]\right) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left([X = i]\right) & \textit{(car les événements de la famille } \big([X=i]\big)_{i \in [\![1,k]\!]} \textit{ sont 2 à 2 incompatibles)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} p \, q^{i-1} \; = \; p \sum\limits_{i=0}^{k-1} q^i & \\ & = & p \, \dfrac{1-q^k}{1-q} & \textit{(car } q \neq 1\textit{)} \\ & = & 1 - q^k & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Enfin : } \mathbb{P}([X > k]) \; = \; 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k]) \; = \; 1 - (1 - q^k) \; = \; q^k.}$$

□

2. On suppose maintenant que X est une v.a.r. **quelconque** qui vérifie : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

a) Démontrer soigneusement que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\big(\,[X = k]\,\big) \; = \; \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} [X > k-1] & = & [X \geqslant k] & \textit{(car } X \textit{ est à valeurs entières)} \\ & = & [X = k] \cup [X > k] & \end{array}$$

Les événements $[X = k]$ et $[X > k]$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}([X > k-1]) = \mathbb{P}\big(\,[X = k]\,\big) + \mathbb{P}([X > k])$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big(\,[X = k]\,\big) = \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k]).}$$

□

b) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([X = k]\big) & = & \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k]) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & q^{k-1} - q^k & \textit{(par hypothèse de la question } \textbf{\textit{1.b)}}\textit{)} \\ & = & q^{k-1}(1-q) \ = \ q^{k-1}p & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ suit la loi } \mathcal{G}(p).}$$

□

3. Conclure.

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)*** : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k$.
- D'après la question ***1.b)*** : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k \quad \Rightarrow \quad X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
- Ainsi, si X est une variable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On obtient ainsi une nouvelle caractérisation de la loi géométrique, à savoir :} \\ X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \big(\ X(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = (1-p)^k\ \big)\end{array}}$$

□

Exercice 5 (issu de EML 1997)
Dans tout cet exercice, g désigne la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in\ [0, +\infty[,\ g(x) = \frac{1+x}{1+\mathrm{e}^x}$$

On donne $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \simeq 1,65$ et $\mathrm{e} \simeq 2,72$.

Partie I : Étude de la fonction g

1. Soit $\varphi : x \mapsto x - \mathrm{e}^{-x}$.

a. Dresser le tableau de variations de φ. On fera apparaître les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\varphi'(x) \ = \ 1 + \mathrm{e}^{-x} > 0$$

Donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$	$+$
Variations de φ	$-\infty \nearrow +\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$.

$$\boxed{\text{Donc : } \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty.}$$

  - $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -\mathrm{e}^{-x} = -\infty$.

$$\boxed{\text{Donc : } \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty.}$$

□

b. En déduire que l'équation $\mathrm{e}^{-x} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On notera α cette solution.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{e}^{-x} = x \iff x - \mathrm{e}^{-x} = 0 \iff \varphi(x) = 0$$

- La fonction φ est :
  × continue sur $\mathbb{R}$
  × strictement croissante sur $\mathbb{R}$

  Ainsi, φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
  De plus, $0 \in \mathbb{R}$, donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
  On note α cette solution, d'où le résultat.

□

c. Montrer que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

Démonstration.

- On a $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}$. Or, $0 < \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \simeq 1,65 < 2$, d'où, par passage à l'inverse ($x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$) : $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}$.

$$\boxed{\text{Donc : } \varphi\left(\frac{1}{2}\right) < 0.}$$

- On a $\varphi(1) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. Or, $0 < 1 < \mathrm{e} \simeq 2,72$, d'où, par passage à l'inverse : $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < 1$.

$$\boxed{\text{Donc : } \varphi(1) > 0.}$$

- On a $\varphi(\alpha) = 0$ donc, d'après ce qui précède :

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) < \varphi(\alpha) < \varphi(1)$$

  On applique à cet encadrement la bijection réciproque de φ (qui a même sens de variations que φ et donc est strictement croissante sur $\mathbb{R}$). On obtient $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

□

2. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution sur $[0, +\infty[$ et que cette solution est α.

Démonstration. Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} g(x) = x &\iff \frac{1+x}{1+\mathrm{e}^x} = x \\ &\iff 1 + x = x(1 + \mathrm{e}^x) \\ &\iff 1 = x\mathrm{e}^x \\ &\iff \mathrm{e}^{-x} = x \\ &\iff x = \alpha \qquad \text{d'après les questions 1b et 1c (on a bien } \alpha \geqslant 0) \end{aligned}$$

□

3. ***a.*** Calculer, pour tout $x \in\ [0, +\infty[$, $g'(x)$. Préciser $g'(0)$.

Démonstration.

- La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Soit $x \in\ [0, +\infty[$.

$$g'(x) = \frac{(1 + \mathrm{e}^x) - (1 + x)\mathrm{e}^x}{(1 + \mathrm{e}^x)^2} = \frac{1 - x\mathrm{e}^x}{(1 + \mathrm{e}^x)^2}$$

- En particulier, $g'(0) = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$.

□

b. Dresser le tableau de variations de g. On fera apparaître la limite en $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $x \in\ [0, +\infty[$.

$$g'(x) \geqslant 0 \iff 1 - x\mathrm{e}^x \geqslant 0 \iff 1 \geqslant x\mathrm{e}^x \iff \mathrm{e}^{-x} \geqslant x \iff \varphi(x) \leqslant 0 \iff x \leqslant \alpha$$

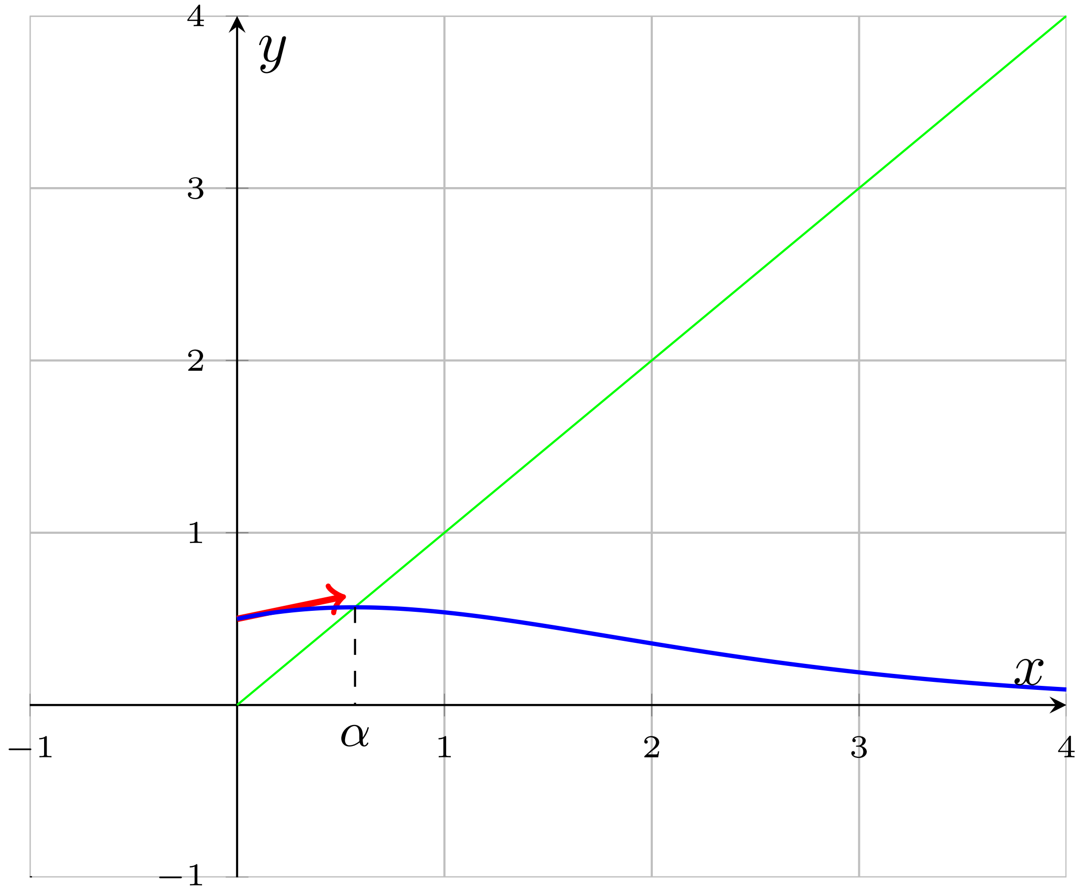
- Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
- On obtient le tableau de variations :

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	α	$\searrow$	0

□

c. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g. On fera apparaître en particulier la tangente en 0 à la courbe $\mathscr{C}_g$ et la droite d'équation $y = x$.

Démonstration.



□

d. Montrer que, pour tout $x \in \ [0, +\infty[$,

$$g''(x) = -\mathrm{e}^x \frac{3 + x + (1-x)\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3}$$

Démonstration. Utiliser la formule de dérivation d'un quotient puis factoriser et simplifier au maximum. □

e. En déduire que g' est décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Démonstration. Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
On a alors $1 - x \geqslant 0$ et donc $\frac{3+x+(1-x)\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3} \geqslant 0$ et donc $g''(x) \leqslant 0$. □

f. On admet que $g'(\frac{1}{2}) \simeq 0,025$ et $g'(1) \simeq -0,124$.
En déduire que, pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $|g'(x)| \leqslant 0,125$. On note $M = 0,125$.

Démonstration. Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Par décroissance de g', on a

$$g'(1) \leqslant g'(x) \leqslant g'\left(\frac{1}{2}\right)$$

d'où

$$-M \leqslant -0,124 \leqslant g'(x) \leqslant 0,025 \leqslant M$$

et donc $|g'(x)| \leqslant M$. □

Partie II : Étude d'une suite

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$
où $P(n)$: « u_n est bien défini et $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$ ».

- Initialisation :
  $u_0 = 0$ donc u_0 est bien défini et $0 \leqslant u_0 \leqslant \alpha$ (car $\alpha > \frac{1}{2} > 0$). D'où $P(0)$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
  u_n est bien défini et $u_n \geqslant 0$. De plus, g est définie sur $[0, +\infty[$, donc $u_{n+1} = g(u_n)$ est bien défini. D'autre part, g est croissante sur $[0, \alpha]$ et $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$. Donc $\frac{1}{2} = g(0) \leqslant u_{n+1} \leqslant g(\alpha) = \alpha$. D'où $P(n+1)$.

Par principe de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$. □

5. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$
où $P(n)$: « $u_{n+1} \geqslant u_n$ ».

- Initialisation :
  $u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{1}{2}$ donc $u_1 \geqslant u_0$. D'où $P(0)$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
  On a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$. Or, g est croissante sur $[0, \alpha]$. D'où $u_{n+1} = g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) = u_{n+2}$. D'où $P(n+1)$.

Par principe de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$. □

6. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

Démonstration. D'après les questions précédentes, la suite (u_n) est :

- croissante
- majorée par α

Par théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge et sa limite ℓ vérifie : $\ell \leqslant \alpha$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$, or :

- $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$
- $g(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(\ell)$ par continuité de la fonction g en ℓ

Par unicité de la limite, $\ell = g(\ell)$. D'où $\ell = \alpha$. □

7. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$
où $P(n)$: « $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \alpha$ ».

- Initialisation :
  $u_1 = g(0) = \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{2} \leqslant u_1 \leqslant \alpha$. D'où $P(1)$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
  La fonction g est croissante sur $[0, \alpha]$ et $0 < \dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \alpha$. Donc $\frac{1}{2} = g(0) \leqslant u_{n+1} \leqslant g(\alpha) = \alpha$.
  D'où $P(n+1)$.

Par principe de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \alpha$. □

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant M\,|u_n - \alpha|$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $x = u_n$ et $y = \alpha$. D'après ce qui précède, $(x, y) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]^2$. De plus, la fonction g est dérivable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et vérifie : pour tout $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $|g'(t)| \leqslant M$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis, on obtient :

$$|g(x) - g(y)| \leqslant M\,|x - y|$$

d'où

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant M\,|u_n - \alpha|$$

□

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2} M^{n-1}$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$
où $P(n)$: « $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2} M^{n-1}$ ».

- Initialisation :
  $u_1 = g(0) = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$. Donc $|u_1 - \alpha| = \alpha - \dfrac{1}{2} \leqslant 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.
  D'autre part, $\dfrac{1}{2} M^{1-1} = \dfrac{1}{2}$.
  D'où $P(1)$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
  On a

$$\begin{aligned}
|u_{n+1} - \alpha| &\leqslant M\,|u_n - \alpha| && \text{cf question 7b} \\
&\leqslant M \frac{1}{2} M^{n-1} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&\leqslant \frac{1}{2} M^{(n+1)-1}
\end{aligned}$$

  D'où $P(n+1)$.

Par principe de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2} M^{n-1}$. □

d) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \alpha - u_n$. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$.

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{2} M^{n-1}$.
- La série $\sum M^n$ est géométrique de raison $M \in]-1,1[$ donc converge. Donc la série $\sum \dfrac{1}{2} M^{n-1}$ converge.

Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum v_n$ converge. □

8. a) Recopier et compléter la fonction **Python** suivante qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

```
import math
def suite(n):
    u = ..........
    for k in range(n):
        u = ..........
    return u
```

Démonstration.

```
import math
def suite(n):
    u = 0
    for k in range(n):
        u = (1+u)/(1+math.exp(u))
    return u
```

□

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de α à `epsilon` près.

```
1 def valeur_approchee(epsilon):
2     n = 1
3     while ..........
4         n = n + 1
5     return suite(n)
```

Démonstration.

```
1 def valeur_approchee(epsilon):
2     n = 1
3     while 0.5 * 0.125**(n-1) > epsilon:
4         n = n + 1
5     return suite(n)
```

□

Exercice 6 (CUBES)

Soit $\alpha > 0$. On pose f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. a) Déterminer la valeur de α pour que f soit une densité de probabilité.

Démonstration.

- La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$.
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
- La fonction f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$ donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_{0}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_{0}^{+\infty} \alpha x^2 \mathrm{e}^{-x}\ dx$$

La fonction $x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\ dx$ est impropre en $+\infty$. Soit $B \in [0, +\infty[$. On procède par IPP. On pose

$$\left| \begin{array}{ll} u'(x) = \mathrm{e}^{-x} & u(x) = -\mathrm{e}^{-x} \\ v(x) = x^2 & v'(x) = 2x \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, B]$.

$$\begin{aligned} \int_0^B x^2\mathrm{e}^{-x}\ dx &= \Big[-x^2\mathrm{e}^{-x} \Big]_0^B + \int_0^B 2x\mathrm{e}^{-x}\ dx \\ &= -B^2\mathrm{e}^{-B} + 2\left(\Big[-x\mathrm{e}^{-x} \Big]_0^B + \int_0^B \mathrm{e}^{-x}\ dx \right) \quad \text{en refaisant une IPP similaire} \\ &= -B^2\mathrm{e}^{-B} - 2B\mathrm{e}^{-B} - 2\mathrm{e}^{-B} + 2 \end{aligned}$$

Par croissance comparée :

$$\lim_{B \to +\infty} \int_0^B x^2\mathrm{e}^{-x}\ dx = 2$$

Donc l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$ est convergente et vaut 2α.

On en déduit que f est une densité de probabilité si et seulement si $\alpha = \frac{1}{2}$.

□

Dans la suite, on supposera que α prend cette valeur et on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ admettant f pour densité.

b) Préciser $X(\Omega)$.

Démonstration. La fonction f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$ donc on peut considérer que $X(\Omega) = [0, +\infty[$. □

c) Déterminer la fonction de répartition F de X.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$, alors $F(x) = 0$.

- Si $x \geqslant 0$, alors, , on a

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \\
&= \int_{0}^{x} f(t)\ dt && \text{car } f \text{ est nulle en dehors de } [0,+\infty[\\
&= \alpha \int_{0}^{x} t^2 \mathrm{e}^{-t}\ dt \\
&= \frac{1}{2}\left(-x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} + 2\right) && \text{d'après le calcul fait en question 1a} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right)\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{F : x \mapsto \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right)\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

□

2. On pose $Y = X^2$. Quelle est la loi de Y ?

Démonstration.

- On a $Y(\Omega) = [0, +\infty[$.
- Soit $y \geqslant 0$. On a

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathbb{P}([Y \leqslant y]) \\
&= \mathbb{P}(\left[X^2 \leqslant y\right]) \\
&= \mathbb{P}([-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}]) && \text{car } y \geqslant 0 \\
&= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) && \text{car } X \text{ est à densité} \\
&= F(\sqrt{y}) && \text{car } -\sqrt{y} \leqslant 0 \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2}y + \sqrt{y} + 1\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{F_Y : y \mapsto \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{2}y + \sqrt{y} + 1\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{y}} & \text{si } y \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

□

Soit $n \geqslant 1$. On considère $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de la v.a.r. X.

3. On pose $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

a) Préciser $M_n(\Omega)$.

Démonstration. $M_n(\Omega) = [0, +\infty[$. □

b) Déterminer la fonction de répartition F_{M_n} de M_n.

Démonstration. Soit $x \geqslant 0$. On a

$$\begin{aligned}
F_{M_n}(x) &= \mathbb{P}([M_n \leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}([\min(X_1, \dots, X_n) \leqslant x]) \\
&= 1 - \mathbb{P}([\min(X_1, \dots, X_n) > x]) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k > x]) \\
&= 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_k > x]) && \text{par indépendance} \\
&= 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbb{P}([X_k \leqslant x])) \\
&= 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - F(x)) && \text{car les } X_k \text{ suivent la même loi que } X \\
&= 1 - (1 - F(x))^n
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{F_{M_n} : x \mapsto \begin{cases} 1 - \left(\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right) \mathrm{e}^{-x}\right)^n & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

□

c) Montrer que la suite de v.a.r. (M_n) converge en loi vers une v.a.r. M dont on précisera la loi.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$, on a $F_{M_n}(x) = 0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $x > 0$, on a $0 < F(x) < 1$ donc $0 < 1 - F(x) < 1$ donc $(1 - F(x))^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que $F_{M_n}(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.
- Notons M une v.a.r. qui suit la loi certaine égale à 0. On a

$$F_M : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et F_M est continue sur $\mathbb{R}^*$.
D'après ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $F_{M_n}(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} F_M(x)$.

Donc

$$\boxed{\text{La suite de v.a.r. } (M_n) \text{ converge en loi vers } M.}$$

□

4. On pose $Z_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

a) Préciser $Z_n(\Omega)$.

Démonstration. $Z_n(\Omega) = [0, +\infty.$ □

b) Déterminer la fonction de répartition F_{Z_n} de Z_n.

Démonstration. Soit $x \geqslant 0$. On a

$$\begin{aligned}
F_{Z_n}(x) &= \mathbb{P}([Z_n \leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}([\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant x]) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_k \leqslant x]) && \text{par indépendance} \\
&= \prod_{k=1}^{n} F(x) && \text{car les } X_k \text{ suivent la même loi que } X \\
&= F(x)^n
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{F_{Z_n} : x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right) \mathrm{e}^{-x}\right)^n & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

□

c) Est-que la suite de v.a.r. (Z_n) converge en loi vers une v.a.r. Z ? Si oui, préciser la loi de Z.

Démonstration. Supposons que la suite de v.a.r. (Z_n) converge en loi vers une v.a.r. Z.

- La fonction F_Z vérifie $\lim\limits_{x \to +\infty} F_Z(x) = 1$.
- Soit $x \geqslant 0$. On a $0 \leqslant F(x) < 1$ et donc $F(x)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que $F_{Z_n}(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
- De plus, pour tout $x \geqslant 0$ point de continuité de F_Z, on a $F_{Z_n}(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} F_Z(x)$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_Z(x) = 0$. C'est absurde.

Donc

$$\boxed{\text{La suite de v.a.r. } (Z_n) \text{ ne converge pas en loi.}}$$

□