DS1 (version B)

Exercice 1 (EML 2021)

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on définit la matrice $M(a, b, c)$ par :

$$M(a,b,c) \ = \ \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on appelle cardinal de l'ensemble $\{a, b, c\}$, noté $\text{Card}\big(\{a, b, c\}\big)$, le nombre d'éléments distincts de cet ensemble.
Par exemple, si $a = b = c$, alors $\text{Card}\big(\{a, b, c\}\big) = 1$; si $a = b$ et $a \neq c$, alors $\text{Card}\big(\{a, b, c\}\big) = 2$.

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on s'intéresse dans ce problème au nombre de valeurs propres distinctes de la matrice $M(a, b, c)$ et on souhaite démontrer la propriété $(*)$ suivante :

$$(*) \qquad M(a,b,c) \text{ est inversible } \Leftrightarrow \ ab + bc + ac + abc \neq 0$$

Partie A : Généralités

1. Justifier que, pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, la matrice $M(a, b, c)$ est diagonalisable.

- **1 pt : La matrice $M(a,b,c)$ est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable**

2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

a) Montrer que la matrice $M(a, b, c)$ ne peut admettre une unique valeur propre.
On pourra par exemple raisonner par l'absurde.

- **1 pt : Il existe alors :**
  - × $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ **inversible,**
  - × $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ **diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de** $M(a,b,c)$**,**

  telles que : $M(a,b,c) = PDP^{-1}$
- **1 pt :** $M(a,b,c) = \lambda I_3$**. C'est absurde.**

b) En déduire que la matrice $M(a, b, c)$ admet soit deux soit trois valeurs propres distinctes.

- **1 pt : Comme $M(a,b,c) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice $M(a,b,c)$ possède au plus 3 valeurs propres distinctes**
- **1 pt : Comme $M(a,b,c)$, est diagonalisable, la matrice $M(a,b,c)$ admet au moins une valeur propre**
- **1 pt : d'après la question précédente, la matrice $M(a,b,c)$ ne peut admettre une unique valeur propre**

3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On pose f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $M(a, b, c)$.

a) Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}' = (e_2, e_1, e_3)$.

- **1 pt :** $f(e_2) = (1+b)\cdot e_2 + 1\cdot e_1 + 1\cdot e_3$ **et ainsi :** $\text{Mat}_{(e_2,e_1,e_3)}\big(f(e_2)\big) = \begin{pmatrix} 1+b \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- **1 pt :** $f(e_1) = 1\cdot e_2 + (1+a)\cdot e_1 + 1\cdot e_3$ **et ainsi :** $\text{Mat}_{(e_2,e_1,e_3)}\big(f(e_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+a \\ 1 \end{pmatrix}$.

- **1 pt :** $f(e_3) = 1\cdot e_2 + 1\cdot e_1 + (1+c)\cdot e_3$ **et ainsi :** $\text{Mat}_{(e_2,e_1,e_3)}\big(f(e_3)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+c \end{pmatrix}$.
- **1 pt : argument d'isomorphisme de représentation ou de passerelle matrice-endomorphisme cité au moins une fois**
- **1 pt :** $\text{Mat}_{(e_2,e_1,e_3)}(f) = \begin{pmatrix} 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} = M(b,a,c)$

b) En déduire que les matrices $M(a,b,c)$ et $M(b,a,c)$ ont les mêmes valeurs propres.

- **1 pt : les matrices $M(a,b,c)$ et $M(b,a,c)$ représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes (respectivement $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$) donc elles ont les même valeurs propres**

c) De la même façon, montrer que les matrices $M(a,b,c)$ et $M(a,c,b)$ ont les mêmes valeurs propres.

- **1 pt : En opérant de la même manière qu'en question *3.a)*, on démontre :** $\text{Mat}_{(e_1,e_3,e_2)}(f) = M(a,c,b)$
- **1 pt : les matrices $M(a,b,c)$ et $M(a,c,b)$ représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes (respectivement $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'' = (e_1,e_3,e_2)$) donc elles ont les même valeurs propres**

Ces deux derniers résultats permettent de justifier que les valeurs propres de la matrice $M(a,b,c)$ ne dépendent pas de l'ordre des réels du triplet (a,b,c).

Partie B : Cas où $\text{Card}\big(\{a,b,c\}\big) = 1$

4. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $a = b = c = 0$ et on note $J = M(0,0,0)$.

a) Calculer J^2. Déterminer alors un polynôme annulateur de J.

- **1 pt :** $J^2 = 3J$
- **1 pt : le polynôme $Q(X) = X^2 - 3\,X$ est un polynôme annulateur de J**

b) En déduire les valeurs propres de J et préciser une base des sous-espaces propres de J.

- **1 pt :** $Q(X) = X^2 - 3\,X = X\,(X-3)$ **est un polynôme annulateur de J donc** $\text{Sp}(J) \subset$ **{racines de Q}** $= \{0,3\}$
- **1 pt : La matrice J possède deux colonnes égales ($C_1 = C_2$). Ainsi, J n'est pas inversible et 0 est bien valeur propre de J**
- **1 pt :** $\text{rg}(J - 3\cdot I_3) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}\right) = 2 < 3$ **donc $J - 3I_3$ n'est pas inversible et 3 est bien valeur propre de J**
- **1 pt :** $E_0(J) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

- **1 pt : la famille** $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ **est une base de** $E_0(J)$ **(argument de non colinéarité sinon 0 pt)**
- **1 pt :** $E_3(J) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$
- **1 pt : la famille** $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ **est une base de** $E_3(J)$

c) Déterminer une matrice P inversible de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $J = PDP^{-1}$.

- **1 pt :** $P = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$
- **1 pt :** $D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

5. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a) Vérifier : $M(a,a,a) = P\,(a\,I_3 + D)\,P^{-1}$.

- **1 pt : calcul correct**

b) En déduire que la matrice $M(a,a,a)$ admet exactement deux valeurs propres distinctes et les déterminer en fonction de a.

- **1 pt : les matrices** $M(a,a,a)$ **et** $a \cdot I_3 + D$ **sont semblables, donc elles ont les même valeurs propres**
- **1 pt : La matrice** $a \cdot I_3 + D$ **étant diagonale, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux**
- **1 pt :** $\text{Sp}\big(M(a,a,a)\big) = \text{Sp}\big(a \cdot I_3 + D\big) = \{a, a+3\}$

c) Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a,a,a)$.

- **1 pt :** $M(a,a,a)$ **est inversible ssi** $a \neq 0$ `ET` $a+3 \neq 0$
- **1 pt : avec** $b = c = a$**, on a** $ab + bc + ac + abc \neq 0$ **ssi** $a \neq 0$ `ET` $a + 3 \neq 0$

Partie C : Cas où $\text{Card}\big(\{a,b,c\}\big) = 2$

6. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $a = b = 0$ et que $c \in \mathbb{R}^*$.
On note $C = M(0,0,c)$.

a) Justifier que 0 est une valeur propre de C.

- **1 pt :** $C = M(0,0,c) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+c\end{pmatrix}$**. La matrice** C **possède deux colonnes égales (**$C_1 = C_2$**). Ainsi,** C **n'est pas inversible**

b) Soit λ un réel non nul.

(i) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence :

$$CX \;=\; \lambda\, X \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ z = (\lambda - 2)\, x \\ \big(\lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c\big)\, x = 0 \end{array} \right.$$

- 1 pt : écriture système.

$$CX \;=\; \lambda\, X \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)\, x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & (1-\lambda)\, y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & (1-\lambda+c)\, z & = & 0 \end{array} \right.$$

- 3 pts : mise sous forme échelonnée.

$$CX \;=\; \lambda\, X \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} z & + & (2-\lambda)\, x & = & 0 \\ - \;\; y & + & x & = & 0 \\ & & \big(-\lambda^2 + (c+3)\,\lambda - 2c\big)\, x & = & 0 \end{array} \right. .$$

(ii) En déduire : λ est une valeur propre de $C \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c = 0$.

- 2 pts : sens direct. Un vecteur propre $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour la valeur propre λ vérifie nécessairement $x \neq 0$

- 2 pts : réciproque. Notons : $x = 1$, $y = x = 1$, $z = (\lambda - 2)\, x = \lambda - 2$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
Alors X est un vecteur propre de C pour la valeur propre λ

c) Montrer alors que C admet trois valeurs propres distinctes.

- 1 pt : D'après la question *6.a)*, le réel 0 est valeur propre de la matrice C

- 1 pt : un réel λ différent de 0 est valeur propre de C si et seulement si $\lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c = 0$. Le polynôme $R(X) = X^2 - (c+3)\, X + 2c$ admet pour discriminant :

$$\Delta_1 = (c+3)^2 - 8c = (c^2 + 6c + 9) - 8c = c^2 - 2c + 9$$

- 1 pt : le polynôme $T(X) = X^2 - 2X + 9$ admet pour discriminant :

$$\Delta_2 = (-2)^2 - 4 \times 9 = 4 - 36 = -32 < 0$$

- 1 pt : Ainsi, pour tout $c \in \mathbb{R}^*$, $\Delta_1 > 0$, donc le polynôme $R(X)$ admet deux racines distinctes λ_1 et λ_2

- 1 pt : $R(0) = 2c \neq 0$ donc 0 n'est pas racine de $R(0)$

7. Soit $(a, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq c$.

a. Exprimer $M(a, a, c)$ comme une combinaison linéaire de I_3 et de $M(0, 0, c-a)$.

- 1 pt : $M(a, a, c) = a \cdot I_3 + M(0, 0, c-a)$

b. En déduire que la matrice $M(a, a, c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

- 1 pt : $M(0, 0, c-a)$ admet 3 valeurs propres distinctes

- 1 pt : Il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de $M(0, 0, c-a)$ telles que : $M(0, 0, c-a) = P\, D\, P^{-1}$

- 1 pt : la matrice $M(a, a, c)$ est semblable à la matrice $a \cdot I_3 + D$

- **1 pt : la matrice $a \cdot I_3 + D$ est diagonale et ses coefficients diagonaux sont tous les trois distincts**

c. Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a,a,c)$.

- **2 pts : $M(a,a,c)$ est inversible ssi**
  $a \neq 0$ ET $-a$ **n'est pas valeur propre de** $M(0,0,c-a)$
- **1 pt : λ est une valeur propre de $M(0,0,c-a)$ ssi** $\lambda^2 - \big((c-a)+3\big)\,\lambda + 2\,(c-a) = 0$
- **1 pt : $-a$ n'est pas valeur propre de $M(0,0,c-a)$ ssi** $a + 2c + ac \neq 0$
- **1 pt : avec $b = a$, on a $ab + bc + ac + abc \neq 0$ ssi**
  $a \neq 0$ ET $-a$ **n'est pas valeur propre de** $M(0,0,c-a)$

8. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\text{Card}\big(\{a,b,c\}\big) = 2$.
À l'aide de la conclusion de la question *3.*, montrer que la matrice $M(a,b,c)$ admet trois valeurs propres distinctes et vérifier la propriété $(*)$ dans ce cas.

- **1 pt : deux des réels a, b et c sont égaux. On note x ces deux réels et z le dernier. La matrice $M(a,b,c)$ s'écrit alors $M(x,x,z)$, ou $M(x,z,x)$, ou $M(z,x,x)$**
- **1 pt : d'après la question *3.*,** $\text{Sp}\,\big(M(a,b,c) = \text{Sp}\,\big(M(x,x,z)\big) = \{x, x+\mu_1, x+\mu_2\}$ **où μ_1 et μ_2 sont les deux racines distinctes du polynôme :** $R(X) = X^2 - \big((z-x)+3\big)\,X + 2\,(z-x)$
- **2 pts :**

$$\begin{aligned}
M(a,b,c) \textbf{ inversible} \ &\Leftrightarrow\ 0 \notin \text{Sp}\,\big(M(a,b,c)\big) \\
&\Leftrightarrow\ 0 \notin \text{Sp}\,\big(M(x,x,z)\big) && \textit{(car } \text{Sp}\,\big(M(a,b,c) = \text{Sp}\,\big(M(x,x,z)\big)\textit{)} \\
&\Leftrightarrow\ x^2 + x^2 + xz + x^2 z \neq 0 && \textit{(car } M(x,x,z) \textit{ vérifie la propriété } (*) \textit{ d'après la question } \textbf{7.c)}\textit{)} \\
&\Leftrightarrow\ ab + bc + ac + abc \neq 0
\end{aligned}$$

Partie D : Cas où $\text{Card}\big(\{a,b,c\}\big) = 3$

9. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a < b < c$.
On note g la fonction définie sur l'ensemble $D = \mathbb{R} \setminus \{a,b,c\}$ par :

$$\forall x \in D,\ g(x) \ = \ \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$$

a) Dresser le tableau de variations de g sur D en y précisant les limites en $+\infty$, en $-\infty$, ainsi qu'à gauche et à droite de a, de b et de c.

- **1 pt : La fonction $g = h_1 + h_2 + h_3$ est dérivable sur D comme somme de fonctions dérivables sur D**
- **1 pt :** $g'(x) = -\dfrac{1}{(x-a)^2} - \dfrac{1}{(x-b)^2} - \dfrac{1}{(x-c)^2} < 0$
- **1 pt : limites à l'infini**
- **1 pt : limites aux points a, b et c**
- **1 pt :**

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
Variations de g	0 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

b) En déduire que l'équation $g(x) = 1$, d'inconnue $x \in D$, admet exactement trois solutions distinctes λ_1, λ_2, λ_3, vérifiant : $a < \lambda_1 < b < \lambda_2 < c < \lambda_3$.

- **1 pt : On note $x_1 = a$, $x_2 = b$ et $x_3 = c$. La fonction g est :**
  - × **continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ (car dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$),**
  - × **strictement décroissante sur $]x_i, x_{i+1}[$.**
- **1 pt : g réalise une bijection de $]x_i, x_{i+1}[$ dans $g\big(]x_i, x_{i+1}[\big) =]-\infty, +\infty[$**
- **1 pt :** $1 \in]-\infty, +\infty[$
- **1 pt : Idem sur $]c, +\infty[$**
- **1 pt : comme $1 \notin]-\infty, 0[$, alors l'équation $g(x) = 1$ n'admet pas de solution sur $]-\infty, a[$**

c) Soit $\lambda \in D$ une solution de l'équation $g(x) = 1$.

On note X_λ la matrice colonne de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par : $X_\lambda = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda - a} \\ \dfrac{1}{\lambda - b} \\ \dfrac{1}{\lambda - c} \end{pmatrix}$.

Montrer que X_λ est un vecteur propre de la matrice $M(a, b, c)$ associé à la valeur propre λ.

- **1 pt :** $X_\lambda \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $M(a, b, c)\, X_\lambda = \begin{pmatrix} \dfrac{1+a}{\lambda - a} + \dfrac{1}{\lambda - b} + \dfrac{1}{\lambda - c} \\ \dfrac{1}{\lambda - a} + \dfrac{1+b}{\lambda - b} + \dfrac{1}{\lambda - c} \\ \dfrac{1}{\lambda - a} + \dfrac{1}{\lambda - b} + \dfrac{1+c}{\lambda - c} \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\dfrac{1+a}{\lambda - a} + \dfrac{1}{\lambda - b} + \dfrac{1}{\lambda - c} = \lambda\, \dfrac{1}{\lambda - a}$ **et formules analogues pour b et c**
- **1 pt :** $M(a, b, c)\, X_\lambda = \lambda \cdot X_\lambda$

d) En déduire que la matrice $M(a, b, c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

- **1 pt : Comme $M(a, b, c) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice $M(a, b, c)$ admet au plus 3 valeurs propres (ou alors en utilisant le résultat de la question 2.b)**
- **1 pt : D'après la question *9.c)*, tout réel λ solution de $g(x) = 1$ est valeur propre de $M(a, b, c)$. D'après l'étude menée en *9.b)*, cette équation a trois solutions distinctes λ_1, λ_2 et λ_3**

10. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\text{Card}\big(\{a, b, c\}\big) = 3$.

a) Montrer que la matrice $M(a, b, c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

- **1 pt : Les trois réels a, b et c sont distincts. On note u le plus petit d'entre eux, w le plus grand et v le dernier.**
- **1 pt :** $\text{Sp}\big(M(a, b, c)\big) = \text{Sp}\big(M(u, v, w)\big)$
- **1 pt :** $\text{Sp}\big(M(u, v, w)\big) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid g(\lambda) = 1\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$

b) Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a, b, c)$.

- **1 pt :** $M(a, b, c)$ **inversible ssi** $g(0) \neq 1$
- **1 pt :** $g(0) = 1$ **ssi** $bc + ac + ab + abc = 0$

11. On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Justifier que la matrice A est inversible.

- **1 pt :** $A = M(0,1,2)$
- **1 pt : En notant** $a = 0$**,** $b = 1$**,** $c = 2$**, on est dans le cas de la question *10* :** $M(a,b,c)$ **inversible ssi** $2 \neq 0$

b) On note α la plus grande valeur propre de A.

(i) Montrer : $4 < \alpha < 5$.

- **1 pt : En notant** $a = 0$**,** $b = 1$**,** $c = 2$**, on est dans le cadre de l'application *9*. On en conclut que** A **admet alors trois valeurs propres telles que :** $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2 < 2 < \lambda_3 = \alpha$
- **1 pt : la fonction** g **est strictement décroissante sur** $]2, +\infty[$
- **1 pt :** $g(4) > 1$ **et** $g(5) < 1$
- **1 pt : on compose par la fonction réciproque de** g **sur** $]2, +\infty[$

(ii) Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction **Python** ci-dessous afin qu'elle renvoie une valeur approchée de α à 10^{-3} près à l'aide de la méthode de dichotomie.

```
1  def valeur_approchee():
2      x = 4
3      y = 5
4      while  y-x > 10**(-3)  :
5          m = (x + y) / 2
6          if 1/m + 1/(m-1) + 1/(m-2)  -1 > 0  :
7              x = m
8          else:
9              y = m
10     return (x+y)/2
```

- **1 pt :** 4 `while y-x > 10**(-3) :`
- **1 pt :** 6 `if 1/m + 1/(m-1) + 1/(m-2) -1 > 0:`
- **1 pt :** 7 `x = m`
- **1 pt :** 9 `y = m`

Exercice 2 (inspiré de ECRICOME 2008)

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto 1 + \ln(x+n)$ et $h_n : x \mapsto x - f_n(x)$. On admet que $\ln(2) \simeq 0,69$.

Etude de f_1

1. Donner sans démonstration le domaine de définition $\mathcal{D}_{f_1}$ de la fonction f_1.

- **1 pt :** $\mathcal{D}_{f_1} =]-1, +\infty[$

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f_1. On ne justifiera pas les limites.

- **1 pt : La fonction** f_1 **est dérivable sur** $]-1, +\infty[$ **comme somme et composée de fonctions dérivables**
- **1 pt :** $f_1'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$
- **1 pt :**

x	-1 $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f_1'(x)$	$+$
Variations de f_1	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

(il faut que les limites soient correctes pour avoir le point)

3. ***a.*** Déterminer l'équation de la tangente en 0 au graphe de f_1.

- **1 pt : l'équation de la tangente en** 0 **au graphe de** f_1 **est** $y = x + 1$

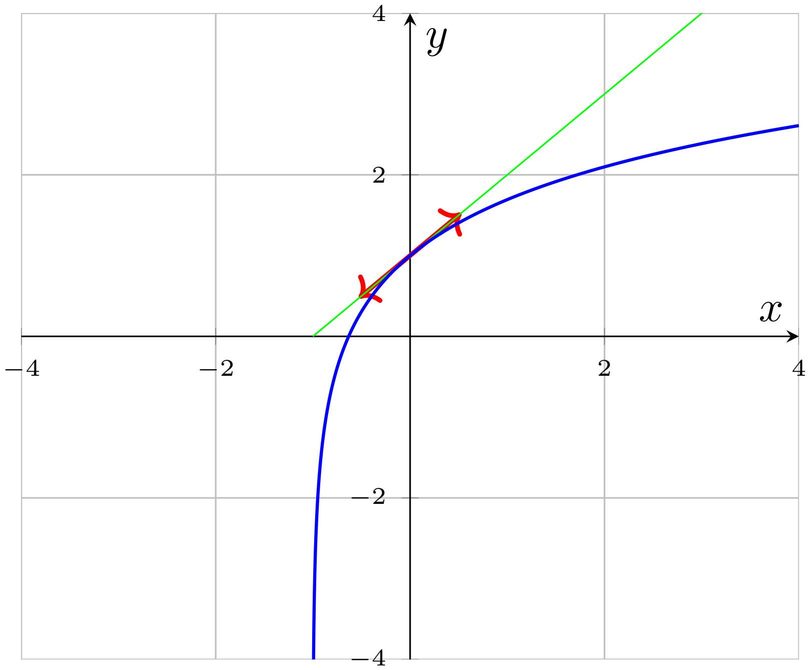
b. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_1}$, $f_1(x) \leqslant x + 1$.

- **1 pt : la fonction** f_1 **est concave sur** $]-1, +\infty[$
- **1 pt : son graphe est en dessous de sa tangente en** 0

4. Tracer la courbe représentative de f_1.

- **1 pt : tracé de la tangente en** 0
- **1 pt : tracé cohérent avec** $f_1(0) = 1$
- **1 pt : tracé cohérent avec les limites**
- **1 pt : tracé cohérent avec la concavité de** f_1

Démonstration.



□

Etude d'une suite implicite

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = x$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée α_n. (On ne cherchera pas à calculer α_n)

- **1 pt :** $h_n'(x) = 1 - \frac{1}{x+n} = \frac{x+n-1}{x+n} > 0$
- **1 pt :**

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
Signe de $h_n'(x)$	$+$
Variations de h_n	$h_n(0) \nearrow +\infty$

- **1 pt :** h_n **est continue sur** $]0, +\infty[$ **et strictement croissante sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt :** h_n **réalise une bijection de** $]0, +\infty[$ **sur** $h_n(]0, +\infty[) =]h_n(0), +\infty[$
- **1 pt :** $h_n(0) < 0$ **donc** $0 \in]h_n(0), +\infty[$ **(il faut expliquer pourquoi** $h_n(0) < 0$ **pour avoir le point)**

6. ***a.*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$h_n(\alpha_{n+1}) = \ln\left(\frac{\alpha_{n+1} + n + 1}{\alpha_{n+1} + n}\right)$$

- **1 pt : penser à utiliser** $\alpha_{n+1} = f_{n+1}(\alpha_{n+1})$
- **1 pt : fin du calcul correct**

b. En déduire que la suite (α_n) est strictement monotone. On précisera son sens de variations.

- **1 pt :** $\frac{\alpha_{n+1}+n+1}{\alpha_{n+1}+n} > 1$ **donc** $h_n(\alpha_{n+1}) > 0 = h_n(\alpha_n)$
- **1 pt : composition par** h_n^{-1}**, la bijection réciproque de** h_n **(de même stricte monotonie, c'est-à-dire strictement croissante)**

7. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n > 1 + \ln(n)$.

- **1 pt : penser à utiliser** $\alpha_n = f_n(\alpha_n) = 1 + \ln(\alpha_n + n)$
- **1 pt :** $\alpha_n > 0$ **donc** $\ln(\alpha_n + n) > \ln(n)$ **par stricte croissance de la fonction** $x \mapsto \ln(x)$ **sur** $]0, +\infty[$

b. En déduire la limite de la suite (α_n).

- **1 pt :** $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ **par théorème de comparaison**

8. a. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} h_n\left(\ln(n) + 2\right) = 1$$

On admet alors qu'il existe un rang $n_0 \geqslant 2$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $h_n\left(\ln(n) + 2\right) > 0$.

- **1 pt :** $h_n\left(\ln(n) + 2\right) = 1 - \ln\left(1 + \frac{\ln(n)+2}{n}\right)$
- **1 pt :** $\dfrac{\ln(n) + 2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **par croissances comparées**

b. Montrer que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\alpha_n < \ln(n) + 2$.

- **1 pt : pour** $n \geqslant n_0$**,** $h_n\left(\ln(n) + 2\right) > h_n(\alpha_n)$
- **1 pt : composition par** h_n^{-1}**, la bijection réciproque de** h_n **(de même stricte monotonie, c'est-à-dire strictement croissante)**

c. En déduire un équivalent simple de α_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- **1 pt :** $1 + \ln(n) < \alpha_n < \ln(n) + 2$ **donc** $\frac{1}{\ln(n)} + 1 < \frac{\alpha_n}{\ln(n)} < 1 + \frac{2}{\ln(n)}$ **(pas de point si l'argument** $\ln(n) > 0$ **car** $n \geqslant n_0 \geqslant 2$ **n'est pas donné)**
- **1 pt :** $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ **(pas de point si le théorème d'encadrement n'est pas cité)**

9. a. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$.

- **1 pt : pour tout** $n \geqslant 1$**,** $\frac{\alpha_n}{n} \geqslant 0$ **et** $\frac{\ln(n)}{n} \geqslant 0$ **et** $\frac{\alpha_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$
- **1 pt : par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, les séries** $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$ **et** $\sum \dfrac{\ln(n)}{n}$ **ont même nature**
- **1 pt :** $\frac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **donc** $\frac{1}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$
- **1 pt : la série** $\sum \dfrac{1}{n}$ **diverge (série de Riemann d'exposant** 1**)**
- **1 pt : par critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série** $\sum \dfrac{\ln(n)}{n}$ **diverge et donc la série** $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$ **diverge (pas de point si il manque l'argument : pour tout** $n \geqslant 1$**,** $\frac{1}{n} \geqslant 0$ **et** $\frac{\ln(n)}{n} \geqslant 0$**)**

b. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\alpha_n}{n^2}$.

- **1 pt :** $\sum \dfrac{\alpha_n}{n^2}$ **et** $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ **ont même nature (même raisonnement que la question précédente)**
- **1 pt :** $\frac{\ln(n)}{n^{1/2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **par croissances comparées donc** $\frac{\ln(n)}{n^2} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

- **1 pt : la série** $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ **converge (série de Riemann d'exposant** $\frac{3}{2} > 1$**)**
- **1 pt : par critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série** $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ **converge et donc la série** $\sum \dfrac{\alpha_n}{n^2}$ **diverge (pas de point si il manque l'argument : pour tout** $n \geqslant 1$**,** $\frac{1}{n^{3/2}} \geqslant 0$ **et** $\frac{\ln(n)}{n^2} \geqslant 0$**)**

Valeur approchée de α_1 par dichotomie

10. Montrer que $1 < \alpha_1 < 3$. On pourra utiliser la question 7a.

- **1 pt :** $\alpha_1 > 1 + \ln(1) = 1$
- **1 pt :** $h_1(3) = 2(1 - \ln(2)) > 0$ **car** $\ln(2) \simeq 0,69$
- **1 pt :** $h_1(3) > h_1(\alpha_1)$ **et, en composant par** h_1^{-1} **qui est strictement croissante, on obtient** $3 > \alpha_1$

11. Recopier et compléter le script **Python** suivant afin qu'il renvoie une valeur approchée de α_1 à 10^{-4} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
1  import numpy as np
2  a,b = 1,3
3  while  b-a > 10**(-4)  :
4      c = (a + b) / 2
5      if  c-1-np.log(c+1) > 0  :
6          b = c
7      else :
8          a = c
9  print (c)
```

- **1 pt :** `3 while b-a > 10**(-4):`
- **2 pt :** `5     if c-1-np.log(c+1) > 0:`
- **1 pt :** `9 print(c)`

Valeur approchée de α_1 par méthode de point fixe

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$$

12. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pt : hérédité (1pt pour** u_{n+1} **est bien défini et 1pt pour** $u_{n+1} \geqslant 1$**)**

13. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha_1| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1|$$

- **1 pt :** $|f_1'(x)| = \frac{1}{x+1} \leqslant \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$
- **1 pt : on pose** $x = u_n \in [1, +\infty[$ **(cf question 12) et** $y = \alpha_1 \in [1, +\infty[$ **(cf question 10)**
- **1 pt :** $|f_1(u_n) - f_1(\alpha_1)| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1|$ **donc** $|u_{n+1} - \alpha_1| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1|$

14. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha_1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

- **2 pt : initialisation (0 pt si la preuve commence en affirmant $P(0)$)**
- **2 pt : hérédité**

15. En déduire la limite de la suite (u_n).

- **1 pt : $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$**
- **1 pt : $|u_n - \alpha_1| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par théorème d'encadrement**
- **1 pt : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha_1$**

16. Recopier et compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle

- prenne en argument un réel `epsilon` strictement positif
- renvoie une liste `[n,u]` où `n` est un entier qui vérifie $|u_{\mathtt{n}} - \alpha_1| \leqslant$ `epsilon` et $\mathtt{u} = u_{\mathtt{n}}$.

```
1  import numpy as np
2  def ApprocheAlpha(epsilon) :
3      n = 0
4      u = 1
5      while  1/(2**(n-1)) > epsilon  :
6          n =  n + 1
7          u =  1 + np.log(u+1)
8      return [n,u]
```

- **1 pt :** 5 `while 1/(2**(n-1)) > epsilon :`
- **1 pt :** 6 `n = n + 1`
- **1 pt :** 7 `u = 1 + np.log(u+1)`

Exercice 3 (EDHEC 2015 voie S)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)^2}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que I_n est une intégrale convergente.

- **1 pt : La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^n(x+1)}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale I_n est impropre en $+\infty$**
- **1 pt : $\dfrac{1}{x^n(x+1)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{n+1}}$ et pour tout $x \geqslant 1$, $\dfrac{1}{x^n(x+1)} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^{n+1}} \geqslant 0$**
- **1 pt : L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}}$ est convergente (critère de Riemann au voisinage de $+\infty$ avec $n+1 \geqslant 2 > 1$)**
- **1 pt : par critère d'équivalence pour les intégrales généralisées de fonctions continues et positives, l'intégrale I_n est convergente**

2. *a.* Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \geqslant 1$, on ait :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$$

- **1 pt :** $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x+1-x}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x(x+1)}$ **donc** $a = 1$ **et** $b = 1$ **conviennent**

b. En déduire la valeur de I_1.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_1^B \frac{dx}{x(x+1)} = \ln(2) + \ln\left(\frac{B}{B+1}\right)$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \frac{B}{B+1} = 1$ **donc** $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \ln\left(\frac{B}{B+1}\right) = 0$
- **1 pt :** $\displaystyle I_1 = \lim_{B\to+\infty} \int_1^B \frac{dx}{x(x+1)} = \ln(2)$

3. a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$$

- **1 pt :** $x \geqslant 1$ **donc** $0 \leqslant \dfrac{1}{x^n(x+1)} \leqslant \dfrac{1}{2x^n}$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_1^B \frac{dx}{2x^n} = \frac{1}{2(n-1)}\left(1 - \frac{1}{B^{n-1}}\right) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2(n-1)}$ **donc l'intégrale** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^n}$ **converge et vaut** $\dfrac{1}{2(n-1)}$
- **1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant, on obtient :** $\displaystyle 0 \leqslant I_n \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^n} = \frac{1}{2(n-1)}$

b. En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

- **1 pt :** $\dfrac{1}{2(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **donc par théorème d'encadrement : la suite** (I_n) **converge et** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $I_n + I_{n+1}$.

- **1 pt :** $\displaystyle I_n + I_{n+1} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}}\, dx$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n}$

b. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

- **1 pt :** $\displaystyle I_{n+1} - I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)}\, dx$
- **1 pt :** $\dfrac{1-x}{x^{n+1}(x+1)} \leqslant 0$
- **1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)} \leqslant 0$

c. En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$ puis déterminer la nature de la série $\sum I_n$.

- **1 pt :** $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n}$ **et** $I_{n+1} \leqslant I_n$ **donc** $\dfrac{1}{n} = I_n + I_{n+1} \leqslant 2I_n$
- **1 pt : En utilisant la question 3a, on obtient :** $\dfrac{1}{2n} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2(n-1)}$

- **1 pt :** $\dfrac{n}{2(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ **donc, par théorème d'encadrement,** $nI_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$, ***i.e.*** $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$
- **1 pt :** $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$ **et pour tout** $n \geqslant 2$, $I_n \geqslant 0$ **et** $\dfrac{1}{2n} \geqslant 0$
- **1 pt : La série** $\sum \dfrac{1}{2n}$ **diverge par critère de Riemann**
- **1 pt : par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs : la série** $\sum I_n$ **diverge**

5. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que J_n est une intégrale convergente.

- **1 pt : La fonction** $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^n(x+1)^2}$ **est continue sur** $[1,+\infty[$ **donc l'intégrale** J_n **est impropre en** $+\infty$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{x^n(x+1)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{n+2}}$ **et pour tout** $x \geqslant 1$, $\dfrac{1}{x^n(x+1)^2} \geqslant 0$ **et** $\dfrac{1}{x^{n+2}} \geqslant 0$
- **1 pt : L'intégrale** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^{n+2}}$ **est convergente (critère de Riemann au voisinage de** $+\infty$ **avec** $n+2 \geqslant 2 > 1$**)**
- **1 pt : par critère d'équivalence pour les intégrales généralisées de fonctions continues et positives : l'intégrale** J_n **est convergente**

b. Calculer J_0.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_1^B \dfrac{dx}{(x+1)^2} = \int_1^B (x+1)^{-2}\, dx = \left[\dfrac{(x+1)^{-1}}{-1} \right]_1^B = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{B+1}$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \dfrac{1}{B+1} = 0$ **donc** $J_0 = \dfrac{1}{2}$

6. a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k.

- **1 pt :** $J_k + J_{k-1} = I_k$

b. Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k$ en fonction de J_n.

- **2 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = (-1)^{n-1} J_n + \dfrac{1}{2}$

c. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{4(n-1)}$. Déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

- **1 pt :** $x \geqslant 1$ **donc** $0 \leqslant \dfrac{1}{x^n(x+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{4x^n}$
- **1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre :** $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{4(n-1)}$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{4(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **donc, par théorème d'encadrement :** $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$

d. En déduire que la série $\sum (-1)^{n-1} I_n$ converge et donner sa somme.

- **1 pt :** $J_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **et** $\left|(-1)^{n-1} J_n\right| = |J_n| = J_n$ **(car** $J_n \geqslant 0$**) donc** $(-1)^{n-1} J_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

- **1 pt : la suite des sommes partielles** $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge vers** $\dfrac{1}{2}$ **donc la série** $\sum (-1)^{n-1} I_n$ **converge et** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} I_n = \dfrac{1}{2}$

7. A l'aide des questions 4a et 6a, compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle

- prenne en argument un entier `n` supérieur ou égal à 2
- renvoie une liste `[I,J]` qui contient la valeur de $I_{\mathtt{n}}$ et la valeur de $J_{\mathtt{n}}$

```
1 import numpy as np
2 def CalculeIJ(n) :
3     I = np.log(2)
4     J = 1/2
5     J = I - J
6     for k in range(1,n) :
7         I = 1/k - I
8         J = I - J
9     return [I,J]
```

- **1 pt :** 5 `J = I - J`
- **1 pt :** 7 `I = 1/k - I`
- **1 pt :** 8 `J = I - J`

Exercice 4 (`EDHEC 2009 voie S`)

On désigne par α un entier strictement supérieur à 1 et on pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$$

Dans la suite de l'exercice, on écrira u_n au lieu de $u_n(\alpha)$.

1. *a.* Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le réel u_n est bien défini et que $u_n > 0$.

- **1 pt : La fonction** $f : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ **est continue sur** $[0,+\infty[$**, donc l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ **est impropre en** $+\infty$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha n}}$ **et pour tout** $t \geqslant 1$**,** $\dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n} \geqslant 0$ **et** $\dfrac{1}{t^{\alpha n}} \geqslant 0$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha n}}$ **est convergente par critère de Riemann au voisinage de** $+\infty$ **(**$\alpha > 1$ **et** $n \geqslant 1$ **donc** $\alpha n > 1$**)**
- **1 pt : par critère d'équivalence pour les intégrales généralisées de fonctions continues et positives, que** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ **converge. Donc** u_n **est bien défini.**
- **1 pt : pour tout** $t \geqslant 0$**,** $\dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n} > 0$**. Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant, on en déduit que** $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} > 0$

b. Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et en conlure qu'elle converge.

- **1 pt :** $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\, dt$
- **1 pt : pour tout** $t \geqslant 0$, $\dfrac{-t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \leqslant 0$**. Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant, on en déduit que** $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$
- **1 pt : Par théorème de convergence monotone, la suite** (u_n) **converge et sa limite** ℓ **vérifie :** $\ell \geqslant 0$ **(0 pt si il manque un argument)**

2. ***a.*** Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1})$.

- **1 pt : On procède par intégration par parties :**

$$\left| \begin{array}{ll} u'(t) = 1 & u(t) = t \\ v(t) = (1+t^\alpha)^{-n} & v'(t) = -n\alpha t^{\alpha-1}(1+t^\alpha)^{-n-1} \end{array} \right.$$

- **1 pt : Cette intégration par parties est valide car les fonctions** u **et** v **sont de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur le segment** $[0, B]$.
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^B (1+t^\alpha)^{-n}\, dt = \frac{B}{(1+B^\alpha)^n} + n\alpha \left(\int_0^B \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\, dt - \int_0^B \frac{1}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\, dt \right)$
- **1 pt :** $\frac{B}{(1+B^\alpha)^n} \underset{B\to+\infty}{\sim} \frac{B}{B^{n\alpha}} = \frac{1}{B^{n\alpha-1}}$ **donc** $\lim\limits_{B\to+\infty} \frac{B}{(1+B^\alpha)^n} = 0$ **car** $n\alpha > 1$
- **1 pt : passage à la limite lorsque** $B \to +\infty$ **(toutes les intégrales étant convergentes)**

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n = u_1 \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pt : hérédité**

3. Montrer, en considérant $\ln(u_n)$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

- **1 pt : D'après la question 1.a,** $u_n > 0$ **donc** $\ln(u_n)$ **est bien défini**
- **1 pt :** $\ln(u_n) = \ln(u_1) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)$
- **1 pt :** $-\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k\alpha}$ **et pour tout** $k \geqslant 1$, $-\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) \geqslant 0$ **et** $\frac{1}{k\alpha} \geqslant 0$
- **1 pt : la série** $\sum \frac{1}{k}$ **diverge par critère de Riemann donc la série** $\sum \frac{1}{k\alpha}$ **diverge**
- **1 pt : par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série** $\sum -\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)$ **diverge**
- **1 pt : la série** $\sum -\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)$ **étant une série à termes positifs divergente, on a** $-\sum\limits_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- **1 pt :** $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ **donc** $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n\alpha}{\alpha - 1} u_{n+1}$.

- **1 pt : En sommant l'égalité** $u_k = k\alpha(u_k - u_{k+1})$**, on obtient :**
- **2 pt :** $S_n = \alpha\left(S_n - n u_{n+1}\right)$

- **1 pt :** $S_n(1-\alpha) = -n\alpha u_{n+1}$ **donc** $S_n = \dfrac{n\alpha}{\alpha-1}u_{n+1}$

b. En déduire que : $\forall n \geqslant 2$, $\ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum\limits_{k=2}^{n} \left(\ln\left(1-\dfrac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\right)$.

- **2 pt :** $S_n = nu_1 \prod_{k=2}^{n} \left(1-\dfrac{1}{k\alpha}\right)$
- **1 pt :** $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) = -\ln(n)$ **par télescopage**
- **1 pt : fin du calcul correct**

c. A l'aide d'un développement limité d'ordre 1 en $\dfrac{1}{k}$, donner un équivalent, lorsque k est au voisinage de $+\infty$, de $\ln\left(1-\dfrac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right)$.

- **1 pt :** $\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$
- **2 pt :** $\ln\left(1-\dfrac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{k}$

d. Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.

- **1 pt :** $\ln\left(1-\dfrac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{k}$ **et, pour tout** $k \geqslant 1$**,** $\ln\left(1-\dfrac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) \geqslant 0$ **et** $\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{k} \geqslant 0$
- **1 pt : la série** $\sum \frac{1}{k}$ **diverge par critère de Riemann donc la série** $\sum \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{k}$ **diverge aussi**
- **1 pt : par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs :**
  la série $\sum \ln\left(1-\dfrac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right)$ **diverge**
- **1 pt :** $\ln(S_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ **et donc** $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ **(car** $S_n = \mathrm{e}^{\ln(S_n)}$**). Donc la série** $\sum u_n$ **diverge**

5. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 2$ et on admet qu'alors $u_1 = \dfrac{\pi}{2}$.
On rappelle qu'à l'aide de la bibliothèque `numpy` (importée sous l'alias `np`), on accède à la commande `np.pi` qui renvoie une valeur approchée du nombre π.
Ecrire une fonction **Python** qui

- prend en argument un entier `n` supérieur ou égal à 2
- renvoie la valeur de $u_{\mathtt{n}}$.

```python
1  import numpy as np
2  def CalculeU(n) :
3      u = np.pi / 2
4      for k in range(1,n) :
5          u = u * (1-1/(2*k))
6      return u
```

- **1 pt :** 3 `u = np.pi / 2`
- **1 pt :** 4 `for k in range(1,n) :`
- **1 pt :** 5 `    u = u * (1-1/(2*k))`
- **1 pt :** 6 `return u`