
DS3 (version A)

Exercice 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et id l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^3 dont la matrice est I .

1. a) Déterminer $(A - I)^2$.
b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et de A .
2. On pose $A = N + I$.
a) Exprimer pour tout entier naturel n , la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et de N puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A .
b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.
3. a) (CUBES UNIQUEMENT) Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A .
b) (CUBES UNIQUEMENT) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.
4. On pose $u_1 = (f - \text{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
a) Montrer que le rang de $f - \text{id}$ est égal à 1.
b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\text{Ker}(f - \text{id})$.
5. a) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de \mathbb{R}^3 .
b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

6. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1} .

7. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.
a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T , c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.
b) Soit N une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \quad \Leftrightarrow \quad (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)$$

- c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, P E_{1,2} P^{-1}, P E_{1,3} P^{-1}, P E_{2,2} P^{-1}, P E_{2,3} P^{-1})$.

Exercice 2

Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < e < 3$.

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \varphi(x) = x^2 e^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de φ , en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.

2. Établir que l'équation $e^x = \frac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et que α appartient à l'intervalle $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$.

Partie II : Étude d'une suite

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3 e^x$, et la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Ecrire une fonction en **Python** (nommée `suiteU`) qui prend en paramètre un entier n et qui renvoie la valeur de u_n .

4. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

5. Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

6. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Partie III : Étude d'une série

7. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$.

8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}$.

9. En déduire une fonction en **Python** qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.

On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage.

Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n .

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2, 4, 1, 5 et 9, alors on obtient : $S_1 = 2, S_2 = 6, S_3 = 7, S_4 = 12, S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
2. a) Déterminer $T_n(\Omega)$.
b) Calculer $\mathbb{P}([T_n = 1])$.
c) Montrer que :

$$\mathbb{P}([T_n = n]) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2 .
4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3 . Vérifier que $\mathbb{E}(T_3) = \frac{16}{9}$.

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
6. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1} .
b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k , démontrer alors que :

$$\forall i \in \llbracket k+1, n \rrbracket, \mathbb{P}([S_{k+1} = i]) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j]).$$

7. a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.
b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

- c) Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note \mathcal{H}_k la proposition :

$$\ll \forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, \mathbb{P}([S_k = i]) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \gg.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, \mathcal{H}_k est vraie.

8. a) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Comparer les événements $[T_n > k]$ et $[S_k \leq n-1]$.
b) En déduire que : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \mathbb{P}([T_n > k]) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}$.
9. Démontrer que $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k])$, puis que $\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

10. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

11. On rappelle que la commande `rd.randint(a,b)` simule une v.a.r. qui suit la loi uniforme sur $\llbracket a, b-1 \rrbracket$. Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la v.a.r. T_n :

```

1 def SimulT(n):
2     S=0
3     k=0
4     while _____ :
5         S = _____
6         k = _____
7     return _____
```

Exercice 4

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. a) Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = n]) = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule de cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose : $V = X - U$.

2. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable U .

b) Déterminer, pour tout n de \mathbb{N} , la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.

c) En déduire, pour tout k de \mathbb{N} :

$$\mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \mathbb{P}([X = n]) \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}$$

d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

3. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V .

b) Déterminer, pour tout n de \mathbb{N} , la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.

c) En déduire la loi de V .

4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

5. (CUBES UNIQUEMENT) Que vaut $\text{Cov}(U, V)$? En déduire $\text{Cov}(X, U)$.

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0, 1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose de la pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

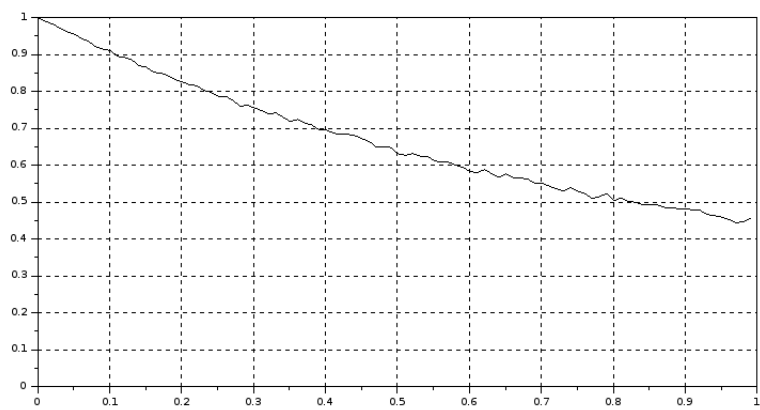
On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

6. Simulation informatique

- a) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def simule_X()` : qui simule la v.a.r. X .
- b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0, 1[$, simule la variable aléatoire Y . Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
1 def mystere(p):  
2     r = 0  
3     N = 10 ^ 4  
4     for k in range(N):  
5         x = simule_X()  
6         y = simule_Y(p)  
7         if x <= y:  
8             r = r + 1/N  
9     return r
```

- c) On trace, en fonction de p , une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour laquelle le jeu serait équilibré.

7. Étude de la variable aléatoire Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B .

- a) Reconnaître la loi de Z et préciser son (ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.
 - b) Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.
 - c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([Y \geq n]) = (1 - p)^n$.
8. a) Montrer : $\mathbb{P}([X \leq Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) \mathbb{P}([Y \geq n])$.
- b) Déduire des résultats précédents : $\mathbb{P}([X \leq Y]) = \frac{4}{(2 + p)^2}$.
 - c) Déterminer la valeur de p pour lequel le jeu est équilibré.