
DS3 barème (version A)

Exercice 1 (EDHEC 2019)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 et id l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^3 dont la matrice est I .

1. a) Déterminer $(A - I)^2$.

- 1 pt : $(A - I)^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et de A .

- 1 pt : $(A - I)^2 = A^2 - 2A + I$ (car A et I commutent)

- 1 pt : $A^{-1} = -A + 2I$

2. On pose $A = N + I$.

a) Exprimer pour tout entier naturel n , la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et de N puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A .

- 1 pt : $\forall k \geq 2, N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ par récurrence immédiate

- 1 pt : I et N commutent

- 1 pt : Ecriture correcte du binôme de Newton

- 1 pt : Découpage de la somme en deux (pour $n \geq 1$)

- 1 pt : Utilisation de $N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ pour $k \geq 2$ et fin du calcul : $A^n = I + nN$

- 1 pt : Cas $n = 0$

- 1 pt : $A^n = (1 - n)I + nA$

0 pt à la question si la formule du binôme est fautive

b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

- 1 pt : $A^{-1} = -A + 2I$ et $(1 - (-1))I + (-1)A = -A + 2I$

0 pt à la question si il est écrit $A^{-1} = (1 - (-1))I + (-1)A = -A + 2I$

3. a) Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A .

- 1 pt : $(X - 1)^2$ polynôme annulateur de A donc $\text{Sp}(A) \subset \{1\}$

- 1 pt : $(A - I)$ est non inversible donc 1 est bien une valeur propre de A

b) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.

1^{ère} méthode : par l'absurde

- 1 pt : Ecriture correcte " A est diagonalisable"

- 1 pt : conclusion $A = I$, ce qui est faux, donc A n'est pas diagonalisable

2^{ème} méthode : par le calcul des dimensions des espaces propres de A

- 1 pt : $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

- **1 pt** : $\dim(E_1(A)) = 2 < 3$ donc A n'est pas diagonalisable

4. On pose $u_1 = (f - \text{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.

a) Montrer que le rang de $f - \text{id}$ est égal à 1.

- **1 pt** : $\text{rg}(f - \text{id}) = \text{rg}(A - I) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

- **1 pt** : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est libre donc $\text{rg}(f - \text{id}) = 1$

b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\text{Ker}(f - \text{id})$.

- **3 pt** : Calcul de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1)$:

- × **1 pt** : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f - \text{id})\text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1)$ (par passerelle matrice-endomorphisme)

- × **1 pt** : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1) = (A - I)E_1$ (par linéarité de la représentation matricielle)

- × **1 pt** : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- **1 pt** : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}((f - \text{id})(u_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $u_1 \in \text{Ker}(f - \text{id})$

- **1 pt** : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}((f - \text{id})(u_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $u_2 \in \text{Ker}(f - \text{id})$

- **1 pt** : Thm du rang $\implies \dim(\text{Ker}(f - \text{id})) = 2$

- **1 pt** : (u_1, u_2) est libre

- **1 pt** : $\text{Card}((u_1, u_2)) = 2 = \dim(\text{Ker}(f - \text{id}))$

5. a) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de \mathbb{R}^3 .

- **1 pt** : Ecriture correcte "famille libre" : $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 e_1 = 0$

- **1 pt** : Application de $f - \text{id}$ pour obtenir $\lambda_3 = 0$

- **1 pt** : (u_1, u_2) est libre $\implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

- **1 pt** : $\text{Card}((u_1, u_2, e_1)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

- **3 pts** : $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ décomposé en

- × **1 pt** : $f(u_1) = 1u_1 + 0u_2 + 0e_1$ ou $\text{Mat}_{(u_1, u_2, e_1)}(f(u_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- × **1 pt** : $f(u_2) = 0u_1 + 1u_2 + 0e_1$ ou $\text{Mat}_{(u_1, u_2, e_1)}(f(u_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- × **1 pt** : $f(e_1) = 1u_1 + 0u_2 + 1e_1$ ou $\text{Mat}_{(u_1, u_2, e_1)}(f(e_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

max 2 pts à la question si il y a une confusion d'objets ou si T est incorrecte

6. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A , T , P et P^{-1} .

• 1 pt : $\text{rg}(P) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right)$

• 1 pt : la réduite obtenue est inversible (triangulaire supérieure + coefficients diagonaux non nuls)

• 1 pt : Formule de changement de base : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},(u_1,u_2,e_1)} \text{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}(f) P_{(u_1,u_2,e_1),\mathcal{B}}$

• 1 pt : On reconnaît $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $T = \text{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}(f)$ et $P = P_{\mathcal{B},(u_1,u_2,e_1)}$

7. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T , c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

• 1 pt : écriture système associé à l'équation matricielle $MT = TM$

• 1 pt : résolution système

• 1 pt : $E = \text{Vect}(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F} = (E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$

• 1 pt : \mathcal{F} est libre

• 1 pt : \mathcal{F} est une base de E donc $\dim(E) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 5$

b) Soit N une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)$$

• 1 pt : Utilisation de $A = PTP^{-1}$

• 1 pt : multiplication à gauche par P^{-1} et à droite par P

c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, P E_{1,2} P^{-1}, P E_{1,3} P^{-1}, P E_{2,2} P^{-1}, P E_{2,3} P^{-1})$.

• 1 pt : $N \in F \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP) \iff (P^{-1}NP) \in E$

• 1 pt : $N \in F \iff \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5, P^{-1}NP = \lambda_1 \cdot (E_{1,1} + E_{3,3}) + \lambda_2 \cdot E_{1,2} + \lambda_3 \cdot E_{1,3} + \lambda_4 \cdot E_{2,2} + \lambda_5 \cdot E_{2,3}$

• 1 pt : $N \in F \iff N \in \text{Vect}(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, P E_{1,2} P^{-1}, P E_{1,3} P^{-1}, P E_{2,2} P^{-1}, P E_{2,3} P^{-1})$

Exercice 2 (EML 2015)

Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < e < 3$.

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \varphi(x) = x^2 e^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de φ , en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.

- 1 pt : La fonction φ est dérivable sur \mathbb{R} comme somme et produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R}
- 1 pt : $\varphi'(x) = x(2+x)e^x$
- 1 pt : tableau de variations correct

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-	0
Variations de f		$4e^{-2} - 1$		$+\infty$
	-1		-1	

- 1 pt : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$ par croissances comparées
 - 1 pt : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$
2. Établir que l'équation $e^x = \frac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et que α appartient à l'intervalle $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$.

- 1 pt : $e^x = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 e^x = 1 \Leftrightarrow x^2 e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$
- 1 pt : φ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$
- 1 pt : $\varphi(]0, +\infty[) =]-1, +\infty[$
- 1 pt : $0 \in]-1, +\infty[$
- 1 pt : $\varphi(\frac{1}{2}) < \varphi(\alpha) < \varphi(1)$
- 1 pt : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ par stricte croissance de φ sur l'intervalle $]0, +\infty[$

Partie II : Étude d'une suite

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3 e^x$, et la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Ecrire une fonction en **Python** (nommée `suiteU`) qui prend en paramètre un entier n et qui renvoie la valeur de u_n .

```

1 def suiteU(n):
2     u = 1                                #initialisation de la suite
3     for k in range(n):                  #boucle de taille n
4         u = (u**3) * np.exp(u)         #u_(n+1) = f(u_n)
5     return u                             #on renvoie u_n

```

- 1 pt : initialisation

- **2 pt** : boucle for

4. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

- **1 pt** : initialisation

- **2 pt** : hérédité

5. Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- **1 pt** : $u_{n+1} - u_n = (u_n^2 e^{u_n} - 1) u_n$

- **1 pt** : $e^{u_n} \geq e^1 \geq 1$ et $u_n^2 \geq 1$

6. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

- **1 pt** : si (u_n) majorée, alors (u_n) converge vers un réel $\ell \geq 1$

- **1 pt** : f est continue en ℓ donc $\ell = f(\ell)$

- **1 pt** : on en déduit que $\ell = \alpha < 1$

- **1 pt** : (u_n) est croissante et non majorée donc (u_n) diverge vers $+\infty$

Partie III : Étude d'une série

7. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$.

- **1 pt** : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{f(n)} \geq 0$ et $\frac{1}{n^2} \geq 0$

- **1 pt** : $\frac{1}{f(n)} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$

- **1 pt** : la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, elle est donc convergente

- **1 pt** : conclusion via le critère de négligeabilité des séries à termes positifs

8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}$.

- **1 pt** : $S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3 e^k}$

- **1 pt** : $\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^3 e^k} \leq \sum_{k=n+1}^N \left(\frac{1}{e} \right)^k$

- **1 pt** : la série $\sum_{k \geq n+1} \left(\frac{1}{e} \right)^k$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{e} \in]-1, 1[$, elle est donc convergente

- **1 pt** : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e} \right)^k = \frac{1}{e^n (e-1)}$

- **1 pt** : par passage à la limite, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3 e^k} \leq \frac{1}{e^n (e-1)}$

- **1 pt** : $\left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3 e^k} \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3 e^k}$

9. En déduire une fonction en **Scilab** qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

```

1 def f(x):
2     return (x**3) * np.exp(x)

```

```

1 def approx():
2     n = 0
3     S = 0
4     while np.exp(n)*(np.e - 1) < 10**4:
5         n = n + 1
6         S = S + 1/f(n)
7     return S

```

- 1 pt : syntaxe fonction correcte
- 1 pt : condition d'arrêt boucle while
- 1 pt : incrémentation compteur
- 1 pt : calcul somme de manière itérative

Exercice 3 (ECRICOME 2017)

Soit n un entier naturel non nul.

On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage.

Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n .

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2, 4, 1, 5 et 9, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.

- 1 pt : $X_k(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$
- 1 pt : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}([X_k = i]) = \frac{1}{n}$ par équiprobabilité
- 1 pt : $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$
- 1 pt : $\mathbb{E}(X_k) = \frac{n+1}{2}$

2. a) Déterminer $T_n(\Omega)$.

- 1 pt : $T_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$
- 1 pt : explications satisfaisantes

b) Calculer $\mathbb{P}([T_n = 1])$.

- 1 pt : $[T_n = 1] = [X_1 = n]$
- 1 pt : $\mathbb{P}([T_n = 1]) = \frac{1}{n}$

c) Montrer que :

$$\mathbb{P}([T_n = n]) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

- **1 pt** : L'événement $[T_n = n]$ est réalisé ssi la somme des numéros des boules obtenues est supérieur à n pour la première fois lors du $n^{\text{ème}}$ tirage

- **1 pt** : $[T_n = n] = \bigcap_{k=1}^{n-1} [X_k = 1]$

- **1 pt** : indépendance citée

3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2 .

- **1 pt** : $T_2(\Omega) = \llbracket 1, 2 \rrbracket = \{1, 2\}$

- **1 pt** : $\mathbb{P}([T_2 = 1]) = \mathbb{P}([T_2 = 2]) = \frac{1}{2}$

- **1 pt** : $T_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 2 \rrbracket)$

4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3 . Vérifier que $\mathbb{E}(T_3) = \frac{16}{9}$.

- **1 pt** : $\mathbb{P}([T_3 = 1]) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}([T_3 = 2]) = \frac{5}{9}$ et $\mathbb{P}([T_3 = 3]) = \frac{1}{9}$

- **1 pt** : La v.a.r. T_3 est finie donc elle admet une espérance

- **1 pt** : $\mathbb{E}(T_3) = \frac{16}{9}$

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

- **1 pt** : $S_k(\Omega) = \llbracket k, nk \rrbracket$

- **1 pt** : explications satisfaisantes

6. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1} .

- **1 pt** : $S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$

b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k , démontrer alors que :

$$\forall i \in \llbracket k+1, n \rrbracket, \mathbb{P}([S_{k+1} = i]) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j]).$$

- **1 pt** : La famille $([S_k = j])_{j \in \llbracket k, kn \rrbracket}$ forme un système complet d'événements

- **1 pt** : $\mathbb{P}([S_{k+1} = i]) = \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [S_{k+1} = i])$ (FPT correcte)

- **1 pt** : $\mathbb{P}([S_{k+1} = i]) = \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [X_{k+1} = i - j])$

- **1 pt** : $\mathbb{P}([S_{k+1} = i]) = \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [X_{k+1} = i - j])$ (justification via le système formé de deux encadrements)

- **1 pt** : lemme des coalitions cité

7. a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}$,

$\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.

- **1 pt** : $\binom{j}{k} = \binom{j-1}{k} + \binom{j-1}{k-1}$

b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k + 1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

- **2 pts** : **somme télescopique bien présentée**

c) Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note \mathcal{H}_k la proposition :

$$\ll \forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}([S_k = i]) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \gg.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, \mathcal{H}_k est vraie.

- **2 pts** : **initialisation**

- **2 pts** : **hérédité**

- **1 pt** : **rédaction récurrence précise à chaque étape**

8. a) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Comparer les événements $[T_n > k]$ et $[S_k \leq n-1]$.

- **1 pt** : $[T_n > k] \subset [S_k \leq n-1]$

- **1 pt** : $[S_k \leq n-1] \subset [T_n > k]$

b) En déduire que : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \mathbb{P}([T_n > k]) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}$.

- **2 pts** : **cas général**

× **1 pt** : $\mathbb{P}([S_k \leq n-1]) = \sum_{i=k}^{n-1} \mathbb{P}([S_k = i])$

× **1 pt** : **fin du calcul**

- **1 pt** : **Cas $k = 0$**

9. Démontrer que $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k])$, puis que $\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

- **1 pt** : **La v.a.r. T_n est finie. Elle admet donc une espérance.**

- **1 pt** : **T_n est à valeurs entières :**

$$[T_n > k-1] = [T_n \geq k] = [T_n > k] \cup [T_n = k]$$

- **1 pt** : **les événements $[T_n > k]$ et $[T_n = k]$ sont incompatibles, donc :**

$$\mathbb{P}([T_n > k-1]) = \mathbb{P}([T_n > k]) + \mathbb{P}([T_n = k])$$

- **3 pts** : $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k])$ (**1 pt si quelques idées mais bloqué en cours de route**)

- **2 pts** : $\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$ (**utilisation binôme**)

10. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

- **1 pt** : **mise sous forme exponentielle**

- **1 pt** : $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

- 1 pt : la fonction \exp est continue en 1, donc, par composition de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n) = e^1 = e$

11. On rappelle que la commande `rd.randint(a,b)` simule une v.a.r. qui suit la loi uniforme sur $\llbracket a, b - 1 \rrbracket$. Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la v.a.r. T_n :

```

1 def SimulT(n):
2     S=0
3     k=0
4     while _____ :
5         S = _____
6         k = _____
7     return _____

```

- 1 pt : `while S < n`
- 1 pt : `S = S + rd.randint(1,n+1)`
- 1 pt : `k = k+1`
- 1 pt : `return k`

Exercice 4 (EML 2018)

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. a) Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.

- 1 pt : Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements suivants :

P_k : « obtenir Pile au $k^{\text{ème}}$ lancer »

F_k : « obtenir Face au $k^{\text{ème}}$ lancer »

- 1 pt : rédaction : l'événement $[X = 0]$ est réalisé ssi ...
- 1 pt : $[X = 0] = P_1 \cap P_2$
- 1 pt : $\mathbb{P}([X = 0]) = \frac{4}{9}$
- 1 pt : $[X = 1] = (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)$
- 2 pt : $\mathbb{P}([X = 1]) = 2 \frac{4}{3^3} = \frac{8}{27}$ (1 pt pour l'incompatibilité)
- 2 pt : $[X = 2] = (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4)$
- 1 pt : $\mathbb{P}([X = 2]) = 3 \frac{4}{3^4} = \frac{4}{27}$
- 1 pt : indépendance citée au moins une fois

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = n]) = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}$.

- 1 pt : L'événement $[X = n]$ est réalisé par les tirages qui contiennent n Face et 2 Pile, et dont le $2^{\text{ème}}$ Pile est obtenu au lancer $n + 2$

- **1 pt** : De tels $(n + 2)$ -tirages sont entièrement caractérisés par :
 - × la place du 2nd Pile : 1 choix (le $(n + 2)$ ^{ème} lancer),
 - × la place du 1^{er} Pile : $(n + 1)$ choix (du 1^{er} lancer au $(n + 1)$ ^{ème} lancer).

Il y a donc $1 \times (n + 1) = n + 1$ tels $(n + 2)$ -tirages

- **1 pt** : tous ces $(n + 2)$ -tirages ont la même probabilité d'apparition, car ils comportent tous le même nombre de Face (n) et le même nombre de Pile (2).
Donc en particulier, ils ont la même probabilité d'apparition que le tirage suivant qui réalise l'événement :

$$F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}$$

- **1 pt** : $\mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}) = \mathbb{P}(F_1) \mathbb{P}(F_2) \dots \mathbb{P}(F_n) \mathbb{P}(P_{n+1}) \mathbb{P}(P_{n+2})$ par indépendance

- **1 pt** : $\mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}) = \frac{4}{3^{n+2}}$

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule de cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose : $V = X - U$.

2. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable U .

- **1 pt** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Si l'événement $[X = n]$ est réalisé, alors l'expérience consiste à piocher parmi les boules numérotées de 0 à n .

Donc la v.a.r. U peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et n .

- **1 pt** : Ceci est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $X(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $U(\Omega) = \mathbb{N}$

b) Déterminer, pour tout n de \mathbb{N} , la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.

- **1 pt** : si l'événement $[X = n]$ est réalisé, alors l'expérience consiste à piocher au hasard une boule parmi les boules numérotées de 0 à n

- **1 pt** : si $k \in \llbracket n + 1, +\infty \llbracket$, $\mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) = 0$

car il est impossible de piocher une boule de numéro supérieur ou égal à $(n + 1)$

- **1 pt** : si $k \in \llbracket 0, n \llbracket$, $\mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) = \frac{1}{n + 1}$

car la probabilité de choisir parmi ces $(n + 1)$ boules est uniforme

c) En déduire, pour tout k de \mathbb{N} :

$$\mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n + 1} \mathbb{P}([X = n]) \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}$$

- **1 pt** : La famille $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements

- **1 pt** : D'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [U = k])$

- **1 pt** : $\mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) \mathbb{P}_{[X=n]}([U = k])$

- **1 pt** : $\mathbb{P}([U = k]) = \frac{4}{3^2} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$

- 1 pt : $\mathbb{P}([U = k]) = \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

- 1 pt : on reconnaît la somme d'une série géométrique convergente de raison $q = \frac{1}{3}$ avec $|q| < 1$

d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

- 1 pt : La v.a.r. U admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} k \mathbb{P}([U = k])$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer sa convergence car la série est à termes positifs

- 1 pt : $\sum_{k=0}^N k \mathbb{P}([U = k]) = \frac{2}{3^2} \sum_{k=1}^N k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

- 1 pt : On reconnaît la somme partielle d'ordre N de la série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{3}$ (avec $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$), donc elle converge. Ainsi, la v.a.r. U admet une espérance

- 1 pt : $\mathbb{E}(U) = \frac{1}{2}$

- 1 pt : La v.a.r. U admet une variance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} k^2 \mathbb{P}([U = k])$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer sa convergence car la série est à termes positifs

- 1 pt : $\sum_{k=0}^N k^2 \mathbb{P}([U = k]) = \sum_{k=2}^N k(k-1) \mathbb{P}([U = k]) + \sum_{k=1}^N k \mathbb{P}([U = k])$

- 1 pt : $\sum_{k=2}^N k(k-1) \mathbb{P}([U = k]) = \frac{2}{3^3} \sum_{k=2}^N k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$

- 1 pt : $\mathbb{E}(U^2) = 1$

- 1 pt : d'après la formule de Kœnig-Huygens : $\mathbb{V}(U) = \mathbb{E}(U^2) - (\mathbb{E}(U))^2$

- 1 pt : $\mathbb{V}(U) = \frac{3}{4}$

3. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V .

- 1 pt : Supposons que l'événement $[X = n]$ est réalisé. Alors la v.a.r. $V = X - U$ peut prendre toutes les valeurs entières entre $n - 0$ et $n - n$, c'est-à-dire toutes les valeurs entières entre 0 et n

- 1 pt : Ceci étant valable pour tout $n \in X(\Omega) = \mathbb{N}$, on en déduit : $V(\Omega) = \mathbb{N}$

b) Déterminer, pour tout n de \mathbb{N} , la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.

- 1 pt : Si $k \in \llbracket n + 1, +\infty \llbracket$, alors $\mathbb{P}_{[X=n]}([V = k]) = 0$

- 1 pt : Si $k \in \llbracket 0, n \llbracket$, $\mathbb{P}_{[X=n]}([V = k]) = \mathbb{P}_{[X=n]}([U = n - k])$

- 1 pt : Si $k \in \llbracket 0, n \llbracket$, $\mathbb{P}_{[X=n]}([V = k]) = \frac{1}{n + 1}$

c) En déduire la loi de V .

- 1 pt : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V par rapport à $[X = n]$ est la même que la loi conditionnelle de U par rapport à $[X = n]$

- 1 pt : en faisant les mêmes calculs que précédemment, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([V = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}$

4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

- **2 pt** : $\mathbb{P}([U = k] \cap [V = j]) = \frac{4}{3^{k+j+2}}$
- **1 pt** : $\mathbb{P}([U = k]) \mathbb{P}([V = j]) = \frac{2}{3^{k+1}} \times \frac{2}{3^{j+1}} = \frac{4}{3^{k+j+2}}$

5. Que vaut $\text{Cov}(U, V)$? En déduire $\text{Cov}(X, U)$?

- **1 pt** : Les v.a.r. U et V sont indépendantes d'après la question précédente donc $\text{Cov}(U, V) = 0$
- **1 pt** : $\text{Cov}(X, U) = \text{Cov}(U + V, U)$
- **1 pt** : $\text{Cov}(X, U) = \text{Cov}(U, U) + \text{Cov}(V, U)$
- **1 pt** : $\text{Cov}(X, U) = \mathbb{V}(U)$
- **1 pt** : $\text{Cov}(X, U) = \frac{3}{4}$

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0, 1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose de la pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

6. Simulation informatique

a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête fonction `x = simule_X()` qui simule la v.a.r. X .

```
1 def simule_X():
2     nbFace = 0
3     nbPile = 0
4     while nbPile < 2:
5         lancer = rd.binomial(1,2/3)
6         if lancer==1:
7             nbPile = nbPile + 1
8         else:
9             nbFace = nbFace + 1
10    return nbFace
```

- **1 pt** : initialisation lignes 2 et 3
- **1 pt** : condition boucle while
- **1 pt** : utilisation de `rd.binomial` avec les bons paramètres
- **1 pt** : gestion des deux cas avec if

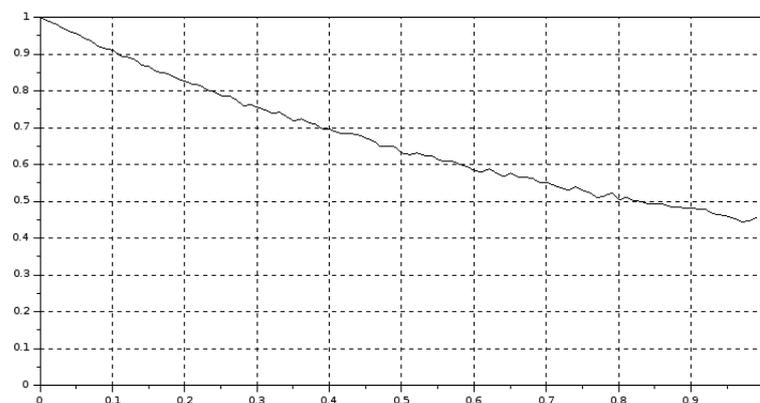
b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0, 1[$, simule la variable aléatoire Y . Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
1 def mystere(p):  
2     r = 0  
3     N = 10 ^ 4  
4     for k in range(N):  
5         x = simule_X()  
6         y = simule_Y(p)  
7         if x <= y:  
8             r = r + 1/N  
9     return r
```

- 1 pt : Cette fonction permet d'obtenir une approximation de la probabilité $\mathbb{P}([X \leq Y])$ en fonction du paramètre p

- 1 pt : explications pertinentes

c) On trace, en fonction de p , une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour laquelle le jeu serait équilibré.

- 1 pt : On conjecture que la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré est 0,83

7. Étude de la variable aléatoire Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B .

a) Reconnaître la loi de Z et préciser son (ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.

- 1 pt : Pour le joueur B , l'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de succès Pile, de probabilité p

- 1 pt : La v.a.r. Z est la v.a.r. associée au rang d'obtention du premier Pile, donc du premier succès

- 1 pt : $Z \leftrightarrow \mathcal{G}(p)$

- 1 pt : $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{p}$

- 1 pt : $\mathbb{V}(Z) = \frac{1-p}{p^2}$

b) Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.

- 1 pt : $Y = Z - 1$
- 1 pt : La v.a.r. Y admet donc une espérance et une variance en tant que transformée affine d'une v.a.r. qui en admet
- 1 pt : Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Y) = \frac{1-p}{p}$
- 1 pt : Par propriété de la variance, $\mathbb{V}(Y) = \frac{1-p}{p^2}$

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([Y \geq n]) = (1-p)^n$.

- 1 pt : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$
- 1 pt : Si $n = 0, \mathbb{P}([Y \geq 0]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1 = (1-p)^0$
- 1 pt : si $n \geq 1, \mathbb{P}([Y \geq n]) = 1 - \mathbb{P}([Z \leq n])$
- 1 pt : $[Z \leq n] = \bigcup_{k=1}^n [Z = k]$
- 1 pt : Les événements $[Z = 1], \dots, [Z = n]$ sont incompatibles donc
 $\mathbb{P}([Z \leq n]) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([Z = k])$
- 1 pt : $\mathbb{P}([Z \leq n]) = 1 - (1-p)^n$

8. a) Montrer : $\mathbb{P}([X \leq Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) \mathbb{P}([Y \geq n])$.

- 1 pt : La famille $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements
- 1 pt : D'après la formule des probabilités totales,
 $\mathbb{P}([X \leq Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [X \leq Y])$
- 1 pt : $\mathbb{P}([X \leq Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) \mathbb{P}([n \leq Y])$ par indépendance

b) Dédurre des résultats précédents : $\mathbb{P}([X \leq Y]) = \frac{4}{(2+p)^2}$.

- 1 pt : $\mathbb{P}([X \leq Y]) = \frac{4}{3^2} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1-p}{3}\right)^{n-1}$
- 1 pt : On reconnaît la somme d'une série géométrique dérivée de raison $\frac{1-p}{3}$ (avec $\left|\frac{1-p}{3}\right| < 1$), donc elle converge bien
- 1 pt : $\mathbb{P}([X \leq Y]) = \frac{4}{(2+p)^2}$ sans arnaque

c) Déterminer la valeur de p pour lequel le jeu est équilibré.

- 1 pt : le jeu est équilibré ssi $\mathbb{P}([X \leq Y]) = \frac{1}{2}$
- 1 pt : $\mathbb{P}([X \leq Y]) = \frac{1}{2} \iff 2(\sqrt{2}-1) = p$