DS3 correction (version A)

Exercice 1 (EDHEC 2019)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathscr{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I.

1. a) Déterminer $(A - I)^2$.

Démonstration.

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(A-I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

□

b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et de A.

Démonstration.

- Calculons tout d'abord :

$$(A-I)^2 = A^2 - 2\,A + I$$ *(car la matrice I commute avec A, matrice de même ordre)*

- Ainsi, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{lrcl} & A^2 - 2\,A + I & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ \text{donc} & -A^2 + 2\,A & = & I \\ \text{et} & A\,(-A + 2\,I) & = & I \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } A \text{ est inversible d'inverse } A^{-1} = -A + 2\,I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

□

2. On pose $A = N + I$.

Commentaire

Autrement dit, on note $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice définie par : $N = A - I$.

a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et de N puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.

Démonstration.

- On a démontré en question ***1.a)*** : $N^2 = \big(A - I\big)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

  On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
  (ou alors on remarque : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = N^2\ N^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\ N^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$)

- Les matrices I et N commutent (car I commute avec toutes les matrices du même ordre).
- Soit $n \geqslant 1$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcll}
A^n & = & (N+I)^n \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \, (I)^{n-k} \, (N)^k & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \, I \, N^k \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \, N^k & \textit{(car : } \forall j \in \mathbb{N}, \ I^j = I\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \, N^k + \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \, N^k & \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \, N^k & \textit{(car : } \forall k \geqslant 2, \ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\
& = & \binom{n}{0} \, N^0 + \binom{n}{1} \, N^1 & \\
& = & I + n\,N &
\end{array}$$

- De plus : $I - 0 \cdot N = I$ et $A^0 = I$.
  La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}, \ A^n = I + n\,N.}$$

Commentaire

- La « relation de Chasles » stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

  (la somme la plus à droite est nulle si $p = n$)
  où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
  L'argument $n \geqslant 1$ est donc essentiel pour découper la somme.
  Le cas $n = 0$ doit donc être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ et $n = 1$ (le découpage de la somme est alors valable pour $n \geqslant 2$).

- Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n \ = \ I + n\,N \ = \ I + n\,(A - I) \ = \ (1-n)\,I + n\,A$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A^n \ = \ (1-n)\,I + n\,A}$$

□

b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A^{-1} = 2\,I - A$ d'après la question ***1.b)***.
- D'autre part : $(1 - (-1))\, I + (-1)\, A = 2\,I - A$.

$$\boxed{\text{La formule précédente est aussi valable pour } n = -1.}$$

□

3. a) Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A.

Démonstration.

- D'après la question précédente, le polynôme $Q(X) = (X-1)^2$ est un polynôme annulateur de la matrice A. Ainsi : $\mathrm{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{1\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(A) \subset \{1\} \text{ et 1 est l'unique valeur propre possible de } A.}$$

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul Q.
  On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si Q est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, Q$ est toujours un polynôme annulateur de A puisque :
  $$(\alpha\, Q)(A) \ = \ \alpha\, Q(A) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
  Cela suffit à démontrer que A possède une infinité de polynômes annulateurs.
  On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur de A puisque :
  $$R(A) \ = \ (A - 5\,I)\, Q(A) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
  Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de A. Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

- Démontrons que 1 est valeur propre de A.

$$A - I \ = \ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est non inversible car possède 2 colonnes colinéaires ($C_2 = -C_1$).

$$\boxed{\text{On en déduit que 1 est l'unique valeur propre de } A.}$$

□

b) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.

Démonstration.
Démontrons que A n'est pas diagonalisable. On procède par l'absurde.
Supposons que A est diagonalisable.
Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A telles que $A = PDP^{-1}$.
Or 1 est la seule valeur propre de A. Ainsi $D = I$ et :

$$A \ = \ P\, I_3\, P^{-1} \ = \ P\, I_3\, P^{-1} \ = \ I_3$$

Absurde !

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

4. On pose $u_1 = (f - \mathrm{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.

a) Montrer que le rang de $f - \mathrm{id}$ est égal à 1.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(f-\mathrm{id}) &= \mathrm{rg}(A - I) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \ = \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \ = \ 1
\end{aligned}$$

La dernière égalité est vérifié car la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est libre (constituée uniquement d'un vecteur non nul).

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{rg}(f - \mathrm{id}) = 1.}$$

□

b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

Démonstration.
Notons $E_1 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_1 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1)$, $U_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2)$.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\Big((f-\mathrm{id})(e_1)\Big) \\
&= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f - \mathrm{id}\big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1) \\
&= \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id})\big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1) \qquad \textit{(par linéarité de } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)\textit{)} \\
&= \big(A - I\big)\ E_1 \ = \ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \ = \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((-1,-2,1)\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Par isomorphisme de représentation, } u_1 = (-1,-2,1).}$$

Puis : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\Big((f-\mathrm{id})(u_1)\Big) = \big(A-I\big)\, U_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((0,0,0)\big).$

$$\boxed{\text{Ainsi : } (f-\mathrm{id})(u_1) = 0_{\mathbb{R}^3}, \text{ c'est-à-dire : } u_1 \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}).}$$

Commentaire

On pouvait ici opter pour une présentation plus élégante :

$$\begin{aligned} (f-\mathrm{id})\,(u_1) &= (f-\mathrm{id})\Big((f-\mathrm{id})(e_1)\Big) \\ &= (f-\mathrm{id})^2\,(e_1) \ = \ 0_{\mathbb{R}^3} \qquad \textit{(car } (f-\mathrm{id})^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)} \textit{ puisque } (A-I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \end{aligned}$$

La présentation choisie est plus calculatoire. Cela a un intérêt : on obtient la valeur de u_1.

- Ensuite :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((f-\mathrm{id})(u_2)\big) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f-\mathrm{id}\big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(u_1\big) \\ &= (A-I)\,(E_1+E_3) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((0,0,0)\big) \end{aligned}$$

On en déduit, par isomorphisme de représentation : $(f-\mathrm{id})(u_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } u_2 \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}).}$$

Commentaire

- L'énoncé ne donne pas directement accès à f mais à A, sa matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$. La base $\mathscr{B}$ étant fixée, l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$, appelée parfois isomorphisme de représentation, permet de traduire les propriétés énoncées dans le monde des espaces vectoriels en des propriétés énoncées dans le monde matriciel.
Voici quelques correspondances dans le cas général :

$$\begin{aligned} E \text{ espace vectoriel de dimension } n &\longleftrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ f : E \to E \text{ endomorphisme} &\longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ f \text{ bijectif} &\longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ inversible} \end{aligned}$$

Ou encore, dans le cas précis de l'exercice :

$$\begin{aligned} f &\longleftrightarrow A \\ f-\mathrm{id} &\longleftrightarrow A-I \\ (f-\mathrm{id})(u_2) = 0_{\mathbb{R}^3} &\longleftrightarrow (A-I)\times U_2 = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Il est très fréquent que les énoncés de concours requièrent de savoir traduire une propriété d'un monde à l'autre. Il est donc indispensable d'être à l'aise sur ce mécanisme.

- Enfin, par théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim\left(\mathbb{R}^3\right) & = & \dim\Big(\operatorname{Ker}\left(f-\mathrm{id}\right)\Big) & + & \operatorname{rg}\left(f-\mathrm{id}\right) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & 1 \end{array}$$

  On en déduit : $\dim\big(\operatorname{Ker}\left(f-\mathrm{id}\right)\big) \ = \ 3-1 \ = \ 2$.

$$\boxed{\dim\big(\operatorname{Ker}\left(f-\mathrm{id}\right)\big) \ = \ 2}$$

- La famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2)$ est :
  - × libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires $((-1,-2,1)$ et $(1,0,1))$.
  - × de cardinal $\operatorname{Card}\big(\mathcal{F}\big) = 2 = \dim\big(\operatorname{Ker}\left(f-\mathrm{id}\right)\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la famille } \mathcal{F} \text{ est une base de } \operatorname{Ker}\big(f-\mathrm{id}\big).}$$

Commentaire

- On peut aussi déterminer le noyau de $f-\mathrm{id}$ par résolution de systèmes. Détaillons cette méthode.
- Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} u \in \operatorname{Ker}\big(f-\mathrm{id}\big) & \iff & \big(f-\mathrm{id}\big)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \iff & (A-I)\,U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ -2\,x & + & 2\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \ x \ = \ y \ + \ z \right. \end{array}$$

  Finalement, on obtient l'expression de $\operatorname{Ker}(f)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Ker}\big(f-\mathrm{id}\big) & = & \{(x,\,y,\,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y+z\} \\ & = & \{(y+z, y, z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{y \cdot (1,\,1,\,0) + z \cdot (1,\,0,\,1) + \ \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \operatorname{Vect}\left((1,1,0),(1,0,1)\right) \end{array}$$

- On remarque que la famille génératrice trouvée n'est pas celle qui est présente dans l'énoncé. Cependant, comme : $(-1,-2,1) = -2\cdot(1,1,0) + (1,0,1)$, on a :

$$\operatorname{Vect}\left((1,1,0),(1,0,1)\right) \ = \ \operatorname{Vect}\left((-1,-2,1),(1,0,1)\right) \ = \ \operatorname{Vect}\left(u_1,u_2\right)$$

□

5. a) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Montrons que la famille (u_1, u_2, e_1) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot e_1 \;=\; 0_{\mathbb{R}^3}$ $(*)$.
  - Par linéarité de $f - \mathrm{id}$, on obtient, en appliquant $f - \mathrm{id}$ de part et d'autre de l'égalité :

$$\lambda_1 \cdot \cancel{(f-\mathrm{id})(u_1)} + \lambda_2 \cdot \underbrace{\cancel{(f-\mathrm{id})(u_2)} + \lambda_3 \cdot (f-\mathrm{id})(e_1)}_{\lambda_3 \cdot u_1} \;=\; \underbrace{(f-\mathrm{id})\big(0_{\mathbb{R}^3}\big)}_{0_{\mathbb{R}^3}}$$

    En effet, comme u_1 et u_2 sont deux éléménts de $\mathrm{Ker}\,\big(f - \mathrm{id}\big)$ alors :

$$(f-\mathrm{id})(u_1) \;=\; 0_{\mathbb{R}^3} \;=\; (f-\mathrm{id})(u_2)$$

$$\boxed{\text{Comme } \lambda_3 \cdot u_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \text{ et } u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}, \text{ alors : } \lambda_3 = 0.}$$

  - L'égalité $(*)$ se réécrit alors : $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$.
    Or, d'après la question précédente, la famille (u_1, u_2) est libre.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lambda_1 = \lambda_2 = 0.}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \text{ et la famille } (u_1, u_2, e_1) \text{ est bien libre.}}$$

Commentaire

- Il était une nouvelle fois possible de procéder par résolution de système.
  Détaillons ce point.
- Montrons que la famille (u_1, u_2, e_1) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot e_1 \;=\; 0_{\mathbb{R}^3}$.

  Les équivalences suivantes sont vérifiées.

$$\begin{array}{rl}
 & \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot e_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \\
\iff & \lambda_1 \cdot (-1,-2,1) + \lambda_2 \cdot (1,0,1) + \lambda_3 \cdot (1,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
\iff & (-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,\ -\lambda_2,\ \lambda_1 + \lambda_2) \;=\; (0,0,0) \\
\iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & 2\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}\right. \\
\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & 2\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ & & 2\,\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & 2\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
\iff & \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\
 & \textit{(par remontées successives)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } (u_1, u_2, e_1) \text{ est une famille libre de } \mathbb{R}^3.}$$

- On a alors :
  × la famille (u_1, u_2, e_1) est une famille libre,
  × $\text{Card}\big((u_1, u_2, e_1)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (u_1, u_2, e_1) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille (u_1, u_2, e_1) est un ensemble qui contient 3 vecteurs. Elle est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note $\text{Card}((u_1, u_2, e_1)) = 3$).
- $\text{Vect}\,(u_1, u_2, e_1)$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs (u_1, u_2, e_1). C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base (u_1, u_2, e_1) d'un espace vectoriel, tout vecteur se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\text{Card}\big(\text{Vect}\,(u_1, u_2, e_1)\big)}$ et $\cancel{\dim((u_1, u_2, e_1))}$ n'ont aucun sens !

☐

b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

Démonstration.

- $f(u_1) = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot e_1$ car $u_1 \in \text{Ker}(f - \text{id}) = E_1(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}\big(f(u_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

- $f(u_2) = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 0 \cdot e_1$ car $u_2 \in \text{Ker}(f - \text{id}) = E_1(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}\big(f(u_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

- Rappelons que par définition : $u_1 = (f - \text{id})(e_1) = f(e_1) - e_1$.
  On en déduit : $f(e_1) = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot e_1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}\big(f(e_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \text{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T.}$$

Commentaire

- Rappelons tout d'abord que déterminer la matrice représentative de f dans la base (u_1, u_2, e_1) consiste à exprimer l'image par f des vecteurs u_1, u_2, e_1 suivant cette même base (u_1, u_2, e_1).
- Pour résoudre la question, on se sert ici une nouvelle fois de la correspondance entre le monde des espaces vectoriels et le monde matriciel.
  Ou peut ajouter la correspondance suivante à celle déjà évoquée :

$$\text{expression de } f(u_1) \text{ dans } (u_1, u_2, e_1) \quad \longleftrightarrow \quad \text{expression de } AU_1 \text{ dans } (U_1, U_2, E_1)$$

Commentaire

- Comme on l'a vu dans la question ***3.b)***, l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable. Il n'existe donc pas de base dans laquelle la matrice représentant f est diagonale.
- Dans ce cas, on se rabat sur une propriété plus faible : existe-t-il une base dans laquelle la représentation matricielle de f serait triangulaire supérieure ? Cette propriété est beaucoup plus simple à obtenir notamment si l'on accepte d'utiliser des matrices dont les coefficients sont complexes (hors de notre portée en ECE).
  On parle alors de **trigonaliser** (on dit aussi **triangulariser**) la matrice A.
- Considérer un espace vectoriel E de dimesnion finie.
  Si un endomorphisme $f : E \to E$ est triangularisable, comment le triangularise-t-on ?
  Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres de f. On cherche alors une base de chaque sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$ et on considère la famille obtenue en concaténant toutes ces bases.
  Cette famille `N'EST PAS` une base de E. Si tel était le cas, on aurait formé une base de vecteurs prores et donc E serait diagonalisable.
  Par contre, cette famille est libre. On peut alors la compléter en une base de E.
  Sans entrer dans les détails, on peut faire en sorte (en choisissant correctement les vecteurs qu'on ajoute) que la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$ soit triangulaire supérieure.
- C'est la méthode développée dans cette question. Ici, f n'a qu'une valeur propre. Le sous-espace propre $E_1(f)$ a pour base la famille (u_1, u_2). On complète alors cette famille en ajoutant e_1. La matrice représentative de f dans la base (u_1, u_2, e_1) obtenue est triangulaire supérieure. □

6. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(P) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

  La réduite obtenue est triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux tous non nuls.
  Elle est donc inversible et il en est de même de la matrice initiale P.

$$\boxed{\text{La matrice } P \text{ est inversible.}}$$

- Notons $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, e_1)$. D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & \times & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ A & = & P & \times & T & \times & P^{-1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } A = P\,T\,P^{-1}.}$$ □

7. On note $(E_{1,1},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,1},\ E_{2,2},\ E_{2,3},\ E_{3,1},\ E_{3,2},\ E_{3,3})$ la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1}+E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

Commentaire

Le concepteur a décidé ici de décrire les ensembles dont on doit démontrer l'égalité avec des phrases mathématiques plutôt qu'avec des symboles. Il faut savoir lire l'égalité souhaitée si elle est énoncée sous la forme suivante :

$$\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MT = TM\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(E_{1,1}+E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3}\right)$$

Démonstration.

Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Il existe donc $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_9) \in \mathbb{R}^9$ tel que : $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$.

- On a alors :

$$\begin{aligned} MT = TM \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_1+a_3 \\ a_4 & a_5 & a_4+a_6 \\ a_7 & a_8 & a_7+a_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_7 & a_2+a_8 & a_3+a_9 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_1 & = & a_1+a_7 \\ a_2 & = & a_2+a_8 \\ a_1+a_3 & = & a_3+a_9 \\ a_4+a_6 & = & a_6 \\ a_7+a_9 & = & a_9 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_7 & = & 0 \\ a_8 & = & 0 \\ a_1 & = & a_9 \\ a_4 & = & 0 \\ a_7 & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Commentaire

On peut aussi poser $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que : $T = I + R$. On a alors :

$$MT = TM \ \Leftrightarrow \ M\,(I+R) = (I+R)\,M \ \Leftrightarrow \ \cancel{M} + MR = \cancel{M} + RM \ \Leftrightarrow \ MR = RM$$

Cela permet d'obtenir plus rapidement les équations au-dessus.

On en conclut :

$$\begin{aligned} & \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MT = TM\} \\ = \ & \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \mid a_1 = a_9 \quad \text{et} \quad a_4 = a_7 = a_8 = 0 \right\} \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} a_9 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_5 & a_6 \\ 0 & 0 & a_9 \end{pmatrix} \mid (a_2, a_3, a_5, a_6, a_9) \in \mathbb{R}^5 \right\} \\ = \ & \{a_9 \cdot (E_{1,1}+E_{3,3}) + a_2 \cdot E_{1,2} + a_3 \cdot E_{1,3} + a_5 \cdot E_{2,2} + a_6 \cdot E_{2,3} \mid (a_2, a_3, a_5, a_6, a_9) \in \mathbb{R}^5\} \\ = \ & \mathrm{Vect}\left(E_{1,1}+E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E = \mathrm{Vect}\left(E_{1,1}+E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3}\right)}$$

- Montrons que la famille $\mathcal{F} = \big(E_{1,1} + E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3}\big)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot (E_{1,1} + E_{3,3}) + \lambda_2 \cdot E_{1,2} + \lambda_3 \cdot E_{1,3} + \lambda_4 \cdot E_{2,2} + \lambda_5 \cdot E_{2,3} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
  Ce qui se réécrit :

$$\lambda_1 \cdot E_{1,1} + \lambda_1 \cdot E_{3,3} + \lambda_2 \cdot E_{1,2} + \lambda_3 \cdot E_{1,3} + \lambda_4 \cdot E_{2,2} + \lambda_5 \cdot E_{2,3} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

  Or, la famille $\big(E_{1,1},\ E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3}\big)$ est libre comme sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ (qui est elle-même libre). On en déduit :

$$\lambda_1 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \mathcal{F} \text{ est libre.}}$$

- La famille $\mathcal{F}$ est :
  × libre.
  × génératrice de E.

  On en déduit que $\mathcal{F}$ est une base de E.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \dim(E) = \mathrm{Card}\,(\mathcal{F}) = 5.}$$

□

b) Soit N une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \quad \Leftrightarrow \quad \big(P^{-1}NP\big)\,T \ = \ T\,\big(P^{-1}NP\big)$$

Démonstration.

$$\begin{array}{rll}
& NA = AN & \\
\Leftrightarrow & N\,\big(PTP^{-1}\big) = \big(PTP^{-1}\big)\,N & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.}}\textit{)} \\
\Leftrightarrow & P^{-1}\,N\,PTP^{-1} = \big(P^{-1}P\big)\,TP^{-1}\,N & \textit{(en multipliant à gauche par } P^{-1}\textit{)} \\
\Leftrightarrow & P^{-1}\,N\,PT\,\big(P^{-1}P\big) = TP^{-1}\,N\,P & \textit{(en multipliant à droite par } P^{-1}\textit{)} \\
\Leftrightarrow & \big(P^{-1}NP\big)\,T = T\,\big(P^{-1}NP\big) &
\end{array}$$

$$\boxed{NA = AN \ \Leftrightarrow \ \big(P^{-1}NP\big)\,T = T\,\big(P^{-1}NP\big)}$$

□

c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\big(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\big)$.

Commentaire

Ici aussi, le concepteur a préféré décrire les ensembles plutôt que de les écrire avec des symboles mathématiques. On aurait pu écrire l'égalité souhaitée sous la forme suivante.

$$\begin{array}{rcl}
F & = & \{N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid NA = AN\} \\
& = & \mathrm{Vect}\,\big(P\,(E_{1,1} + E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\big)
\end{array}$$

Démonstration.

$$
\begin{array}{cll}
 & N \in F & \\
\Leftrightarrow & NA = AN & \textit{(par définition de } F\textit{)} \\
\Leftrightarrow & \left(P^{-1}NP\right)T = T\left(P^{-1}NP\right) & \textit{(d'après la question précédente)} \\
\Leftrightarrow & P^{-1}NP \in E = \operatorname{Vect}\left(E_{1,1}+E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3}\right) & \textit{(par définition de } E \textit{ et question } \textbf{7.a)}\textit{)} \\
\Leftrightarrow & \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)\in\mathbb{R}^5, & \\
 & P^{-1}NP = \lambda_1\cdot(E_{1,1}+E_{3,3}) + \lambda_2\cdot E_{1,2} + \lambda_3\cdot E_{1,3} + \lambda_4\cdot E_{2,2} + \lambda_5\cdot E_{2,3} & \\
\Leftrightarrow & \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)\in\mathbb{R}^5, & \\
 & N = P\left(\lambda_1\cdot(E_{1,1}+E_{3,3}) + \lambda_2\cdot E_{1,2} + \lambda_3\cdot E_{1,3} + \lambda_4\cdot E_{2,2} + \lambda_5\cdot E_{2,3}\right)P^{-1} & \\
\Leftrightarrow & \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)\in\mathbb{R}^5, & \\
 & N = \lambda_1\cdot P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1} + \lambda_2\cdot P\,E_{1,2}\,P^{-1} + \lambda_3\cdot P\,E_{1,3}\,P^{-1} + \lambda_4\cdot P\,E_{2,2}\,P^{-1} + \lambda_5\cdot P\,E_{2,3}\,P^{-1} & \\
\Leftrightarrow & N \in \operatorname{Vect}\left(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\right) &
\end{array}
$$

$$\boxed{\text{On a bien : } F \ = \ \operatorname{Vect}\left(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\right).}$$

Commentaire

- Résumons le procédé mis en place lors de la question ***7***. On souhaite déterminer l'ensemble F des matrices qui commutent avec A (cet ensemble s'appelle le **commutant de** A). Pour ce faire, on commence par déterminer E, l'ensemble des matrices qui commutent avec la matrice triangulaire supérieure T (question ***7.a)***.
  Puis, en question ***7.b)***, on établit un lien entre E et F :
  $$N \in F \quad \Leftrightarrow \quad \left(P^{-1}NP\right) \in E$$
  Cela permet enfin de déterminer F en ***7.a)***.
- Cette question ***7*** illustre un procédé fréquent en mathématiques. Déterminer F de manière directe est difficile. Procéder comme en ***7.a)*** n'est pas judicieux. En effet, si l'on essaie de déterminer par équivalence les contraintes que la propriété $AN = NA$ impose sur les coefficients d'une matrice N quelconque, on obtient un système qui est difficile à résoudre. Il faut noter que la complexité de cette résolution provient de l'aspect de la matrice A. Déterminer le commutant d'une matrice diagonale est plutôt simple. On se pose donc la question de savoir si la matrice A admet un représentant sous forme diagonale. Plus formellement, on cherche s'il existe une base dans laquelle l'endomorphisme f est diagonalisable. Ici, on seulement réussi à exhibé une base dans laquelle la matrice représentative T de f est particulièrement simple ($T = I + R$). On peut donc déterminer le commutant de T. Et en déduire, par les étapes décrites dans le point précédent, le commutant de A.
- On retiendra cette idée générale : lorsqu'on cherche des propriétés sur f, il est souvent préférable d'utiliser la représentation de f la plus simple à manipuler.

$\square$

Exercice 2 (EML 2015)

Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < \mathrm{e} < 3$.

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \varphi(x) = x^2\,\mathrm{e}^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de φ, en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\varphi'(x) \;=\; 2x\,\mathrm{e}^x + x^2\,\mathrm{e}^x \;=\; x\,(2+x)\,\mathrm{e}^x$$
Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $\varphi'(x)$ est du signe de $x\,(2+x)$.
Or le polynôme $P(X) = X(2+X)$ est un polynôme de degré 2, dont les racines sont 0 et -2. De plus son coefficient dominant est positif.
- On obtient alors le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-1	$\nearrow$	$4\,\mathrm{e}^{-2} - 1$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les différents éléments de ce tableau.
  - × En posant le changement de variable $u = -x$, on obtient :
  $$\lim_{x\to-\infty} x^2\,\mathrm{e}^x \;=\; \lim_{u\to+\infty} (-u)^2\,\mathrm{e}^{-u} \;=\; \lim_{u\to+\infty} \frac{u^2}{\mathrm{e}^u} = 0 \qquad \textit{(par croissances comparées)}$$
  D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = -1$.
  - × Ensuite : $\varphi(0) = -1$
  - × Enfin : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\,\mathrm{e}^x = +\infty$. Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

□

2. Établir que l'équation $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in \,]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que α appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

Démonstration.

- Soit $x \in \,]0, +\infty[$. Remarquons :
$$\mathrm{e}^x = \frac{1}{x^2} \;\Leftrightarrow\; x^2\,\mathrm{e}^x = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2\,\mathrm{e}^x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi(x) = 0$$

- La fonction φ est :
  × continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$,
  × strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

  Ainsi, φ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\varphi(]0, +\infty[)$ avec :
$$\varphi(]0, +\infty[) \;=\; \left]\varphi(0), \lim_{x \to +\infty} \varphi(x)\right[\;=\;]-1, +\infty[$$
  Or $0 \in\,]-1, +\infty[$. On en déduit que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in\,]0, +\infty[$.

  $\boxed{\text{L'équation } \mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2} \text{ admet une unique solution } \alpha \in\,]0, +\infty[.}$

- De plus :
  × $\varphi(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1$. Or :
$$\begin{array}{rcll} \varphi(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1 & < & \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e} - 1 & \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & < & \dfrac{1}{4} \times 3 - 1 & \textit{(car } e < 3\textit{)} \\ & < & 0 & \end{array}$$
  × $\varphi(\alpha) = 0$.
  × $\varphi(1) = \mathrm{e}^1 - 1 > 0$ car $\mathrm{e} > 2$.

  Ainsi : $\varphi(\frac{1}{2}) < 0 < \varphi(1)$.
  D'après le théorème de la bijection, $f^{-1} :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

  $\boxed{\text{En appliquant } f^{-1} \text{ de part et d'autre de l'inégalité précédente : } \dfrac{1}{2} < \alpha < 1.}$

□

Partie II : Étude d'une suite

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3\,\mathrm{e}^x$,
et la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Ecrire une fonction en **Python** (nommée `suiteU`) qui prend en paramètre un entier n et qui renvoie la valeur de u_n.

Démonstration.

```
def suiteU(n):
    u = 1                             #initialisation de la suite
    for k in range(n):                #boucle de taille n
        u = (u**3) * np.exp(u)        #u_(n+1) = f(u_n)
    return u                          #on renvoie u_n
```

□

4. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n \geqslant 1$.

- **Initialisation**
  D'après l'énoncé : $u_0 = 1 \geqslant 1$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \geqslant 1$).
  Par hypothèse de récurrence : $u_n \geqslant 1$. Ainsi :
  × par croissance de la fonction $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$: $u_n^3 \ \geqslant \ 1^3 = 1$,
  × par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{u_n} \ \geqslant \ \mathrm{e}^1 \geqslant 1$.
  On en déduit : $u_{n+1} = u_n^3\,\mathrm{e}^{u_n} \geqslant 1$.
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1.}$$

Commentaire

Dans cette question, on a utilisé l'implication suivante :

$$\begin{gathered} 1 \leqslant u_n^3 \quad \text{et} \quad 1 \leqslant \mathrm{e}^{u_n} \\ \Downarrow \\ 1 \times 1 \leqslant u_n^3 \times \mathrm{e}^{u_n} \end{gathered}$$

On a donc « multiplié » deux inégalités. Rappelons que ceci est valide seulement parce que **tous les termes en présence sont positifs**. □

5. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$u_{n+1} - u_n \ = \ u_n^3\,\mathrm{e}^{u_n} - u_n \ = \ \left(u_n^2\,\mathrm{e}^{u_n} - 1\right) u_n$$

- Or, d'après la question précédente : $u_n \geqslant 1$. Ainsi :
  × par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$: $u_n^2 \geqslant 1$,
  × par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{u_n} \geqslant \mathrm{e}^1 \geqslant 1$.
  Ainsi : $u_n^2\,\mathrm{e}^{u_n} \geqslant 1$. D'où : $u_n^2\,\mathrm{e}^{u_n} - 1 \geqslant 0$.
- Enfin, comme de plus : $u_n \geqslant 1 \geqslant 0$, on en déduit : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}}$$

Commentaire

- On pouvait aussi démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_{n+1} \geqslant u_n$:
  - ▸ **Initialisation**
    - × D'une part : $u_0 = 1$.
    - × D'autre part : $u_1 = f(u_0) = 1^3 \times \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$).
    Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{array}{rrl} & u_{n+1} \geqslant u_n & \\ \text{donc} & f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n) & \textit{(par croissance de } f \textit{ sur } [1,+\infty[\textit{ (à démontrer))} \end{array}$$

    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

  Attention : le caractère croissant de f ne suffit pas à démontrer que (u_n) est croissante ! (si $u_0 \geqslant u_1$, la suite obtenue est décroissante).
- On pouvait aussi démontrer : $\forall x \geqslant 1,\ f(x) \geqslant x$.
  Or, comme $u_n \geqslant 1$ (d'après la question précédente) : $f(u_n) \geqslant u_n$. Ainsi : $u_{n+1} \geqslant u_n$.
  Attention :

$$f \textit{ croissante} \quad \not\Rightarrow \quad f(x) \geqslant x$$

  On peut penser à la fonction racine qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie : $\forall x \geqslant 1,\ \sqrt{x} \leqslant x$. □

6. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Démonstration.

- Démontrons que (u_n) n'est pas majorée. On procède par l'absurde.
  Supposons que la suite (u_n) est majorée.
  Dans ce cas, la suite (u_n) est :
  - × croissante,
  - × majorée.

  On en déduit que la suite (u_n) converge vers ℓ.
  - × D'une part, d'après la question ***3.*** : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 1$.
    Ainsi, par passage à la limite : $\ell \geqslant 1$.
  - × D'autre part, par définition de (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
    Or la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc au point ℓ. Ainsi, par passage à la limite dans l'égalité précédente :

$$\ell = f(\ell)$$

    Or :

$$\begin{array}{rcll} \ell = f(\ell) & \Leftrightarrow & \ell = \ell^3 \,\mathrm{e}^\ell & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{\ell^2} = \mathrm{e}^\ell & \textit{(car, comme } \ell \geqslant 1\textit{, en particulier : } \ell \neq 0\textit{)} \end{array}$$

    D'après la question ***2.***, cette équation admet le réel α comme unique solution sur $]0, +\infty[$. On en déduit : $\ell = \alpha$.
  - × Or, toujours d'après la question ***2.*** : $\alpha < 1$.

Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ n'est pas majorée.}}$$

- Finalement, la suite (u_n) est :
  - $\times$ croissante,
  - $\times$ non majorée.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$$

Commentaire

- On cherche dans cette question à déterminer la limite d'une suite (u_n) dont on vient de démontrer qu'elle est croissante (en particulier, **monotone**). Il faut alors immédiatement songer à l'utilisation d'un théorème de convergence monotone. Ce dernier nous fournit la disjonction de cas suivante (dans le cas d'une suite croissante) :
  - $\times$ soit la suite (u_n) est majorée.
    Dans ce cas, elle est convergente (et on peut trouver une majoration / minoration / encadrement de sa limite grâce à une majoration / minoration / encadrement de la quantité u_n)
  - $\times$ soit la suite (u_n) n'est pas majorée.
    Dans ce cas, elle diverge vers $+\infty$.
    On rappelle que la démonstration de cette propriété s'effectue presque toujours par l'absurde.
- Dans cette question, on ne demande rien d'autre que d'établir cette disjonction de cas. $\square$

Partie III : Étude d'une série

7. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$.

Démonstration.
Remarquons :

$\times$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{f(n)} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{lc} & n^3 > 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^n > 0 \\ \text{donc} & n^3\,\mathrm{e}^n > 0 \\ \text{d'où} & \dfrac{1}{f(n)} = \dfrac{1}{n^3\,\mathrm{e}^n} > 0 \end{array}$$

$\times$ De plus : $\dfrac{1}{f(n)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. En effet :

$$\frac{\frac{1}{f(n)}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^3\,\mathrm{e}^n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^3\,\mathrm{e}^n} = \frac{1}{n\,\mathrm{e}^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\times$ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$. Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{Par critère de négligeabilité des séries à termes positifs, la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{f(n)} \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

Il est important de bien lire la question. On demande ici de **démontrer la convergence** d'une série. Il n'est donc pas demandé explicitement de calculer sa somme. Dans ce cas, il faut privilégier l'utilisation d'un critère de comparaison / équivalence / négligeabilité des séries à termes positifs. Au passage, si ce cacul n'est pas demandé c'est certainement parce qu'il est très technique ou impossible à réaliser dans le cadre du programme ECE. □

8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| S - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)} \right| \leqslant \dfrac{1}{(\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{f(k)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{f(k)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3\,\mathrm{e}^k}$$

- Soit $N \geqslant n+1$. Soit $k \in [\![n+1, N]\!]$.

$$k \geqslant n+1 \geqslant 1$$

donc $k^3 \geqslant 1$ *(par croissance de la fonction $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$)*

d'où $k^3\,\mathrm{e}^k \geqslant \mathrm{e}^k$ *(car $\mathrm{e}^k > 0$)*

ainsi $\dfrac{1}{k^3\,\mathrm{e}^k} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^k} = \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^k$ *(par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$)*

En sommant les encadrements précédents pour k variant entre $n+1$ et N, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^3\,\mathrm{e}^k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k \qquad (\star)$$

- Or la série $\sum\limits_{k \geqslant n+1} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^k$ est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \in \,]-1, 1[$.
  Elle est donc convergente et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{k+n+1} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}} \times \frac{1}{\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}} \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}^{n+\cancel{1}}} \times \frac{\cancel{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}-1} = \frac{1}{\mathrm{e}^n\,(\mathrm{e}-1)}
\end{aligned}$$

- On en déduit, par passage à la limite dans l'inégalité $(\star)$ (ce qui est autorisé car les sommes partielles en présence convergent) :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3\,\mathrm{e}^k} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^n\,(\mathrm{e}-1)}$$

- Or, pour tout $k \geqslant 1$: $\dfrac{1}{k^3\, \mathrm{e}^k} \geqslant 0$. D'où :

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3\, \mathrm{e}^k} \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3\, \mathrm{e}^k}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \leqslant \frac{1}{(\mathrm{e}-1)\, \mathrm{e}^n}}$$

□

9. En déduire une fonction en **Python** qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Démonstration.

- On cherche ici à trouver un entier n tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)}$ est une valeur approchée de S à 10^{-4} près.
  Autrement dit, on souhaite exhiber $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \leqslant 10^{-4}$$

- Or, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^n\ (\mathrm{e}-1)}$$

  Il suffit alors de trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\dfrac{1}{\mathrm{e}^n\ (\mathrm{e}-1)} \leqslant 10^{-4}$.
  En effet, par transitivité, on aura alors :

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^n\ (\mathrm{e}-1)} \leqslant 10^{-4}$$

- On commence alors par coder la fonction f.

```
def f(x):
    return (x**3) * np.exp(x)
```

- On propose ensuite la fonction suivante :

```
def approx():
    n = 0
    S = 0
    while np.exp(n)*(np.e -1) < 10**4:
        n = n + 1
        S = S + 1/f(n)
    return S
```

  Détaillons les éléments de cette fonction.

  × **Début de la fonction**
    On commence par préciser la structure de la fonction :
    - cette fonction se nomme `approx`,
    - elle ne prend pas de paramètre en entrée,

```
def approx():
```

La variable `n` est initialisée à 0.
La variable `S`, qui contiendra les valeurs successives de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)}$, est initialisée à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation).

```
2       n = 0
3       S = 0
```

× **Structure itérative**
Les lignes 4 à 6 consistent à :

1) déterminer un entier n tel que : $\dfrac{1}{\mathrm{e}^n\ (\mathrm{e}-1)} \leqslant 10^{-4}$,

2) calculer les valeurs successives de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)}$.

On doit donc :

1) incrémenter la variable `n` de 1 jusqu'à ce que : $\dfrac{1}{\mathrm{e}^n\ (\mathrm{e}-1)} \leqslant 10^{-4}$. Autrement dit, on doit incrémenter la variable `n` de 1 tant que : $\dfrac{1}{\mathrm{e}^n\ (\mathrm{e}-1)} > 10^{-4}$, cette dernière condition se réécrivant $\mathrm{e}^n\ (\mathrm{e}-1) < 10^4$. Pour cela, on met en place une structure while :

```
4       while np.exp(n)*(np.e -1) < 10**4:
```

Puis on met à jour la variable `n` :

```
5           n = n + 1
```

2) calculer les valeurs successives de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)}$:

```
6           S = S + 1 / f(n)
```

× **Fin du programme**
À l'issue de cette boucle, la variable `S` contient la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{f(k)}$ vérifiant :

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \ \leqslant\ 10^{-4}$$

Autrement dit, `S` contient une valeur approchée de S à 10^{-4} près, ce qui était souhaité. On renvoie alors S :

```
7       return S
```

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un programme **Python** correct démontre la bonne compréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.
- Le programme précédent propose de déterminer la valeur de n et de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)}$ en procédant par itération. On peut aussi remarquer :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{(\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^n} \leqslant 10^{-4} & \Leftrightarrow & \mathrm{e}^n \geqslant \dfrac{10^4}{(\mathrm{e}-1)} \\ & \Leftrightarrow & n \geqslant 4\ln(10) - \ln(\mathrm{e}-1) \quad \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)}$ est une approximation de S pour tout $n \geqslant N$, où $N = \lceil 4\ln(10) - \ln(\mathrm{e}-1) \rceil$.
On en déduit la fonction **Python** suivante :

```
def approx()
    N = np.ceil(4 * np.log(10) - np.log(np.e - 1))
    S = 0
    for k in range(1,N+1)
        S = S + 1 / f(k)
    return S
```

$\square$

Exercice 3 (ECRICOME 2017)

Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2, 4, 1, 5 et 9, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.

Démonstration.

- Déterminons $X_k(\Omega)$:
L'urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire parmi celles-ci avec remise.
Donc X_k peut prendre toutes les valeurs entre 1 et n.

$$\boxed{X_k(\Omega) = [\![1, n]\!]}$$

- Le tirage parmi les n boules est équiprobable, ainsi :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}([X_k = i]) = \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\text{On reconnaît la loi uniforme sur discrète sur } [\![1, n]\!] : X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!]).}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } X_k \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(X_k) = \frac{n+1}{2}.}$$

Commentaire

- On pouvait directement décrire l'expérience et conclure quant à la loi de X_k : lors du $k^{\text{ème}}$ tirage, on effectue une expérience à n **issues équiprobables**, numérotées de 1 à n. Donc $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.
- Lorsqu'on demande de déterminer la loi d'une v.a.r. X, on procède toujours de la manière suivante :
  × si X est une v.a.r. discrète,
    1) on détermine $X(\Omega)$,
    2) on détermine les probabilités $\mathbb{P}([X = k])$ pour $k \in X(\Omega)$.
  × si X est une v.a.r. à densité,
    1) on détermine $X(\Omega)$,
    2) on détermine la fonction de répartition de X, $F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x])$ pour $x \in \mathbb{R}$.

□

2. a) Déterminer $T_n(\Omega)$.

Démonstration.
L'expérience consiste en une infinité de tirages avec remise.
Donc l'univers Ω est ici l'ensemble des ∞-tirages constitués d'éléments de $[\![1, n]\!]$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'événement $[T_n = i]$ est réalisé si et seulement si la somme des boules dépasse n au $i^{\text{ème}}$ tirage mais pas au $(i-1)^{\text{ème}}$ tirage.
En particulier :

× l'événement $[T_n = 1]$ est réalisé par l'∞-tirage $\omega = (n, 1, 1, 1, \ldots)$.

× l'événement $[T_n = 2]$ est réalisé par l'∞-tirage $\omega = (1, n, 1, 1, 1, \ldots)$.

× $\cdots$

× l'événement $[T_n = n]$ est réalisé par l'∞-tirage $\omega = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1 \text{ fois}}, n, 1, 1, 1, \ldots)$.

Plus généralement, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'événement $[T_n = i]$ est réalisé par l'∞-tirage qui comporte que des 1 sauf en position i où l'on trouve n(ce qui correspond à l'obtention de la boule n lors du $i^{\text{ème}}$ tirage).

$$\boxed{\text{Donc } T_n(\Omega) = [\![1, n]\!].}$$

Commentaire

- Pour chaque événement, nous avons donné **un exemple** d'∞-tirage le réalisant. Bien évidemment, bien d'autres ∞-tirages étaient possibles. Par exemple :
  - × l'événement $[T_n = 2]$ est réalisé par l'∞-tirage $\omega = (1, n-1, 1, 1, 1, \dots)$.
  - × l'événement $[T_n = 3]$ est réalisé par l'∞-tirage $\omega = (1, 1, n-2, 1, 1, 1, \dots)$.
  - × $\vdots$
  - × l'événement $[T_n = n]$ est réalisé par l'∞-tirage $\omega = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n-1 \text{ fois}}, 1, 1, 1, 1, \dots)$.
- Comme l'énoncé demandait de déterminer $T_n(\Omega)$ mais ne fournissait pas sa valeur, on peut penser que la simple réponse « $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ » (sans justification) permettait d'obtenir une grande partie des points alloués à cette question.
  Évidemment, si la question s'exprime sous la forme « Montrer que $X(\Omega) = \cdots$ », il faut détailler la réponse.

□

b) Calculer $\mathbb{P}([T_n = 1])$.

Démonstration.
On remarque qu'on a l'égalité entre événements suivantes : $[T_n = 1] \; = \; [X_1 = n]$.
Comme la v.a.r. X_1 suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ (question ***1.***) :

$$\mathbb{P}([T_n = 1]) = \mathbb{P}([X_1 = n]) = \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([T_n = 1]) = \frac{1}{n}}$$

□

c) Montrer que :

$$\mathbb{P}([T_n = n]) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

Démonstration.

- L'événement $[T_n = n]$ est réalisé si la somme des numéros des boules obtenues est supérieur à n pour la première fois lors du $n^{\text{ème}}$ tirage. Ceci ne se produit que si on a obtenu la boule 1 lors des $n-1$ premiers tirages (si ce n'est pas le cas, la somme dépasse n strictement avant le $n^{\text{ème}}$ tirage. En termes d'événements, cela signifie :

$$[T_n = n] \; = \; \bigcap_{k=1}^{n-1} [X_k = 1]$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([T_n = n]) & = & \mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n-1} [X_k = 1]\right) & \\ & = & \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_k = 1]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \\ & & & \textit{sont indépendantes)} \\ & = & \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} & \textit{(car } X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])\textit{)} \\ & = & \left(\dfrac{1}{n}\right)^{n-1} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([T_n = n]) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}}$$

Commentaire

- Dans cette démonstration, on met en place une méthode classique de raisonnement :
  (i) on commence par une étape de décomposition de l'événement,
  (ii) puis on applique la fonction $\mathbb{P}$ de part et d'autre.
  Il faut prendre le réflexe de raisonner sur les événements avant d'appliquer la fonction $\mathbb{P}$.
- La formule est présentée ici sous forme de produit. Il faut donc penser à une décomposition d'événement à l'aide d'une intersection.

□

3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{2.a)}},\ T_2(\Omega) = [\![1, 2]\!] = \{1, 2\}.}$$

D'après la question ***2.b)*** : $\mathbb{P}([T_2 = 1]) = \frac{1}{2}$.
Comme $([T_2 = 1], [T_2 = 2])$ est un système complet d'événements, on obtient :

$$\mathbb{P}([T_2 = 2]) = 1 - \mathbb{P}([T_2 = 1]) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{T_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 2]\!])}$$

□

4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $\mathbb{E}(T_3) = \frac{16}{9}$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{2.a)}},\ T_3(\Omega) = [\![1, 3]\!].}$$

- D'après la question ***2.b)*** : $\mathbb{P}([T_3 = 1]) = \frac{1}{3}$.
- D'après la question ***2.c)*** :

$$\mathbb{P}([T_3 = 3]) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

- Comme $([T_3 = 1], [T_3 = 2], [T_3 = 3])$ est un système complet d'événements, on obtient :

$$\mathbb{P}([T_3 = 2]) = 1 - \mathbb{P}([T_3 = 1]) - \mathbb{P}([T_3 = 3]) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([T_3 = 1]) = \frac{1}{3},\ \ \mathbb{P}([T_3 = 2]) = \frac{5}{9}\ \text{ et }\ \mathbb{P}([T_3 = 3]) = \frac{1}{9}}$$

- La v.a.r. T_3 est finie donc elle admet une espérance. De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_3) &= \sum_{k=1}^{3} k\, \mathbb{P}\big([T_3 = k]\big) \\
&= 1 \times \mathbb{P}\big([T_3 = 1]\big) + 2 \times \mathbb{P}\big([T_3 = 2]\big) + 3 \times \mathbb{P}\big([T_3 = 3]\big) \\
&= \frac{1}{3} + 2\, \frac{5}{9} + 3\, \frac{1}{9} \;=\; \frac{3 + 10 + 3}{9} \\
&= \frac{16}{9}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On retrouve bien : } \mathbb{E}(T_3) = \frac{16}{9}.}$$

□

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.

- À chaque tirage, le plus petit numéro de boule que l'on peut obtenir est 1. Ainsi, la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages vaut au minimum k.

  Donc S_k vaut au minimum k.
- À chaque tirage, le plus grand numéro de boule que l'on peut obtenir est n. Ainsi, la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages vaut au maximum nk.

  Donc S_k vaut au maximum nk.
- De plus S_k peut prendre toutes les valeurs intermédiaires entre k et nk.

$$\boxed{\text{On en conclut : } S_k(\Omega) = [\![k, nk]\!].}$$

Commentaire

- Comme pour la question ***2.a)***, la valeur $S_k(\Omega)$ n'est pas donnée dans l'énoncé.
Une brève justification suffit donc ici.
- Cependant, pour être parfaitement rigoureux, on peut déterminer $S_k(\Omega)$ en procédant par récurrence. Détaillons ce raisonnement.

Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k)$: $S_k(\Omega) \subset [\![k, nk]\!]$.

- **Initialisation** :
Tout d'abord : $S_1 = X_1$.
Cela permet de conclure, d'après la question ***1.*** : $S_1(\Omega) = X_1(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
D'où $\mathcal{P}(1)$.
- **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* : $S_{k+1}(\Omega) = [\![k+1, n(k+1)]\!]$).
  - Par définition : $S_{k+1} = \sum\limits_{i=1}^{k+1} X_i = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} X_i\right) + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}$.

    Ainsi, pour tout ∞-tirage $\omega = (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots)$:

$$\begin{array}{rcl} S_{k+1}(\omega) & = & S_k(\omega) + X_{k+1}(\omega) \\ & = & \left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i\right) + a_{k+1} \end{array}$$

  - Par hypothèse de récurrence : $S_k(\Omega) = [\![k, nk]\!]$.
Ainsi, $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i$ peut prendre toutes les valeurs de $[\![k, nk]\!]$.
Par ailleurs, a_{k+1} est le résultat du $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.
Ainsi, a_{k+1} peut prendre toutes les valeurs de $X_{k+1}(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

    On en déduit que $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i\right) + a_{k+1}$ peut prendre toutes les valeurs entières possibles entre $k+1$ et $nk + n = n\ (k+1)$. Et ainsi : $S_{k+1}(\Omega) = [\![k+1, n(k+1)]\!]$.

  D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

On en conclut, par principe de récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$. □

6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1}.

Démonstration.
On remarque :

$$S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} X_i = \sum_{i=1}^{k} X_i + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}$$

$$\boxed{S_{k+1} = S_k + X_{k+1}}$$

□

b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que :

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ \mathbb{P}([S_{k+1} = i]) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j]).$$

Démonstration.
Soit $i \in [\![k+1, n]\!]$.

- La famille $([S_k = j])_{j \in [\![k,kn]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S_{k+1} = i]) &= \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [S_{k+1} = i]) \\
&= \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [S_k + X_{k+1} = i]) \\
&= \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [X_{k+1} = i - j]) \\
&= \sum_{\substack{j = k \\ i-j \in X_{k+1}(\Omega)}}^{nk} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [X_{k+1} = i - j]) \\
&\quad + \cancel{\sum_{\substack{j = k \\ i-j \notin X_{k+1}(\Omega)}}^{nk} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [X_{k+1} = i - j])} \quad \textit{(car } [X_{k+1} = i - j] = \varnothing\textit{)} \\
&= \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [X_{k+1} = i - j])
\end{aligned}$$

- La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} i - j \in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![k, nk[\![\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant i - j \leqslant n \\ k \leqslant j \leqslant nk \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 - i \leqslant -j \leqslant n - i \\ k \leqslant j \leqslant nk \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} i - n \leqslant j \leqslant i - 1 \\ k \leqslant j \leqslant nk \end{array}\right.$$

  (on rappelle : $X_{k+1}(\Omega) = [\![1,n]\!]$*)*

  Or : $i - n \leqslant 0 \leqslant k$ et $i - 1 \leqslant n - 1 \leqslant nk$. On en déduit :

$$[\![k, nk]\!] \ \cap \ [\![i - n, i - 1]\!] \ = \ [\![k, i - 1]\!]$$

- Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S_{k+1} = i]) &= \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [X_{k+1} = i - j]) \\
&= \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j]) \mathbb{P}([X_{k+1} = i - j]) && \text{(car } X_{k+1} \text{ et } S_k \text{ sont indépendantes par le lemme des coalitions)} \\
&= \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j]) \ \frac{1}{n} && \text{(car } X_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])\text{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![k+1, n]\!], \quad \mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j)}$$

Commentaire

Il est fréquent, lors de l'étape de restriction des indices de la somme de tomber sur une contrainte s'exprimant par deux inégalités :

$$a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ET} \ c \leqslant i \leqslant d \quad \text{où } (a,b,c,d) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^4$$

où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On pourra alors utiliser le résultat suivant :

$$\boxed{(a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ET} \ c \leqslant i \leqslant d) \quad \Leftrightarrow \quad \max(a,c) \leqslant i \leqslant \min(b,d)}$$

(à gauche c'est le plus grand élément qui contraint le plus, à droite c'est le plus petit élément qui contraint le plus)

□

7. a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.

Démonstration.

$$\boxed{\binom{j}{k} = \binom{j-1}{k} + \binom{j-1}{k-1}}$$

Commentaire

La formule du triangle de Pascal peut se démontrer en revenant à la définition calculatoire des coefficients binomiaux. Détaillons cette démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $j > k$.

$$\begin{aligned}
\binom{j-1}{k} + \binom{j-1}{k-1} &= \frac{(j-1)!}{k!\ (j-1-k)!} + \frac{(j-1)!}{(k-1)!\ (j-\cancel{1}-(k-\cancel{1}))!} \\
&= \frac{(j-1)!}{k!\ (j-1-k)!} + \frac{(j-1)!}{(k-1)!\ (j-k)!} \\
&= \frac{(j-1)!}{(k-1)!\ (j-k-1)!} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{j-k} \right) \\
&= \frac{(j-1)!}{(k-1)!\ (j-k-1)!} \left(\frac{j-\cancel{k}+\cancel{k}}{k(j-k)} \right) \;=\; \frac{j!}{k!\ (j-k)!} \;=\; \binom{j}{k}
\end{aligned}$$

Commentaire

On peut aussi démontrer ce type de relations en revenant à la définition des coefficients binomiaux, à savoir : $\binom{j}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à j éléments. Illustrons cette méthode sur la formule du triangle de Pascal.

Considérons une pièce contenant j personnes. On s'intéresse au nombre de groupes différents de k personnes que l'on peut former à partir de ces j personnes.
Il y a $\binom{j}{k}$ tels groupes.
Pour former un tel groupe de k personnes, on remarque que :

× soit ce groupe contient la personne numéro j. Il est donc composé de la personne numéro j et de $k-1$ personnes choisies parmi les $j-1$ personnes restantes.
 Il y a $\binom{j-1}{k-1}$ tels groupes.
× soit ce groupe ne contient pas la personne numéro j. Il est donc composée de k personnes choisies parmi les $j-1$ personnes restantes.
 Il y a $\binom{j-1}{k}$ tels groupes.

Finalement on a bien : $\binom{j}{k} = \binom{j-1}{k} + \binom{j-1}{k-1}$.

□

b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \geqslant k+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} &= \binom{k-1}{k-1} + \sum_{j=k+1}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} \\
&= 1 + \sum_{j=k+1}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} \\
&= 1 + \sum_{j=k+1}^{i-1} \left(\binom{j}{k} - \binom{j-1}{k} \right) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= 1 + \sum_{j=k+1}^{i-1} \binom{j}{k} - \sum_{j=k+1}^{i-1} \binom{j-1}{k} \\
&= 1 + \sum_{j=k+1}^{i-1} \binom{j}{k} - \sum_{j=k}^{i-2} \binom{j}{k} \\
&= 1 + \left(\cancel{\sum_{j=k+1}^{i-2} \binom{j}{k}} + \binom{i-1}{k} \right) - \left(\binom{k}{k} + \cancel{\sum_{j=k+1}^{i-2} \binom{j}{k}} \right) \\
&= \binom{i-1}{k} && \textit{(car } \binom{k}{k} = 1\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall i \geqslant k+1, \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}}$$

□

c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$« \forall i \in [\![k, n]\!], \quad \mathbb{P}([S_k = i]) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} ».$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall k \in [\![1, n]\!], \mathcal{H}_k$, où $\mathcal{H}_k : \forall i \in [\![k, n]\!], \mathbb{P}([S_k = i]) = \dfrac{1}{n^k} \dbinom{i-1}{k-1}$.

▸ **Initialisation** :
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([S_1 = i]) & = & \mathbb{P}([X_1 = i]) & \textit{(car } S_1 = X_1\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n} & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n^1} \dbinom{i-1}{1-1} & \textit{(car } \dbinom{i-1}{0} = 1\textit{)} \end{array}$$

D'où $\mathcal{H}_1$.

▸ **Hérédité** : soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Supposons $\mathcal{H}_k$ et démontrons $\mathcal{H}_{k+1}$ (*i.e.* : $\forall i \in [\![k+1, n]\!], \quad \mathbb{P}([S_{k+1} = i]) = \dfrac{1}{n^{k+1}} \dbinom{i-1}{(k+1)-1}$).
Soit $i \in [\![k+1, n]\!]$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([S_{k+1} = i]) & = & \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j]) & \textit{(question } \textbf{\textit{6.b)}}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=k}^{i-1} \dfrac{1}{n^k} \dbinom{i-1}{k-1} & \textit{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ & = & \dfrac{1}{n^{k+1}} \displaystyle\sum_{j=k}^{i-1} \dbinom{i-1}{k-1} & \\ & = & \dfrac{1}{n^{k+1}} \dbinom{i-1}{k} & \textit{(question } \textbf{\textit{7.b)}}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n^{k+1}} \dbinom{i-1}{(k+1)-1} & \end{array}$$

D'où $\mathcal{H}_{k+1}$.

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \forall i \in [\![k, n]\!], \mathbb{P}([S_k = i]) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1}}$$

Commentaire

La rédaction de cette récurrence est particulièrement difficile.

- La quantification en i est **dans** l'hypothèse de récurrence.
  Donc il ne faut pas oublier de l'introduire pour la démonstration de $\mathcal{H}_1$ (dans l'étape d'initialisation) et de $\mathcal{H}_{k+1}$ (dans l'étape d'hérédité).
- Il s'agit ici d'une récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$ (et non sur $\mathbb{N}$).
  Pour qu'on puisse parler de $\mathcal{H}_k$, il faut que que $k \in [\![1, n]\!]$ et pour parler de $\mathcal{H}_{k+1}$ (ce qui est nécessaire dans l'étape d'hérédité), il faut que $k+1 \in [\![1, n]\!]$.
  Donc il faut, dans l'hérédité, que $k \in [\![1, n]\!] \cap [\![0, n-1]\!] = [\![1, n-1]\!]$.

□

8. a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements $[T_n > k]$ et $[S_k \leqslant n-1]$.

Démonstration.

- Si l'événement $[T_n > k]$ est réalisé, alors il a fallu strictement plus de k tirages pour que la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale, pour la première fois, à n. Il a donc fallu au moins $k+1$ tirages.
  Ainsi, la somme des numéros obtenus jusqu'au $k^{\text{ème}}$ tirage est strictement inférieure à n, c'est-à-dire inférieure ou égale à $n-1$. L'événement $[S_k \leqslant n-1]$ est donc réalisé.
  On en déduit : $[T_n > k] \ \subset\ [S_k \leqslant n-1]$.
- Si l'événement $[S_k \leqslant n-1]$ est réalisé, alors la somme des numéros obtenus jusqu'au $k^{\text{ème}}$ tirage est inférieure ou égale à $n-1$ donc strictement inférieure à n.
  Ainsi, la somme des numéros de boules dépasse n pour la première fois au plus tôt au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage. L'événement $[T_n \geqslant k+1]$ est donc réalisé.
  Or, comme T_n est une v.a.r. à valeurs entières : $[T_n \geqslant k+1] = [T_n > k]$.
  Donc $[T_n > k]$ est réalisé.
  On en déduit : $[S_k \leqslant n-1] \ \subset\ [T_n > k]$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ [T_n > k] = [S_k \leqslant n-1].}$$

□

b) En déduire que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{P}([T_n > k]) = \dfrac{1}{n^k} \dbinom{n-1}{k}$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([T_n > k]) & = & \mathbb{P}([S_k \leqslant n-1]) & \textit{(question } \textbf{\textit{8.a)}}\textit{)} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=k}^{n-1} \mathbb{P}([S_k = i]) & \textit{(car } S_k(\Omega) = [\![k, nk]\!]\textit{)} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} & \textit{(question } \textbf{\textit{7.c)}}\textit{)} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n^k} \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i-1}{k-1} & \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} & \textit{(question } \textbf{\textit{7.b)}}\textit{)} \end{array}$$

Par ailleurs :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([T_n > 0]) & = & 1 & \textit{(car } T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]\textit{)} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n^0} \binom{n-1}{0} & \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}([T_n > k]) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}}$$

Commentaire

La propriété de la question précédente (***8.a)***) a été démontrée pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. On ne peut donc l'utiliser que pour un entier $k \in [\![1, n-1]\!]$. C'est une évidence qu'il convient toutefois de rappeler car elle est trop régulièrement ignorée par les candidats. Lorsque l'on souhaite utiliser un résultat précédemment démontré ou admis, il faut scrupuleusement vérifier que l'on est dans les conditions d'application de ce résultat.

□

9. Démontrer que $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k])$, puis que $\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.

- La v.a.r. T_n est finie. Elle admet donc une espérance.
- Tout d'abord, comme T_n est à valeurs entières :

$$[T_n > k-1] \ = \ [T_n \geqslant k] \ = \ [T_n > k] \cup [T_n = k]$$

  Or les événements $[T_n > k]$ et $[T_n = k]$ sont incompatibles, donc :

$$\mathbb{P}([T_n > k-1]) \ = \ \mathbb{P}([T_n > k]) + \mathbb{P}([T_n = k])$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(T_n) & = & \sum\limits_{k=1}^{n} k \ \mathbb{P}([T_n = k]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} k \ \big(\mathbb{P}([T_n > k-1]) - \mathbb{P}([T_n > k])\big) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} k \ \mathbb{P}([T_n > k-1]) - \sum\limits_{k=1}^{n} k \ \mathbb{P}([T_n > k]) & \textit{(par linéarité de la somme)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} (k+1) \ \mathbb{P}([T_n > k]) - \sum\limits_{k=1}^{n} k \ \mathbb{P}([T_n > k]) & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & \mathbb{P}([T_n > 0]) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} (k+1) \ \mathbb{P}([T_n > k]) - \sum\limits_{k=1}^{n-1} k \ \mathbb{P}([T_n > k]) - n \ \mathbb{P}([T_n > n]) &
\end{array}$$

  Comme $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ alors $[T_n > n] = \varnothing$. Ainsi : $\mathbb{P}([T_n > n]) = 0$. On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(T_n) & = & \mathbb{P}([T_n > 0]) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} (k+1) \ \mathbb{P}([T_n > k]) - \sum\limits_{k=1}^{n-1} k \ \mathbb{P}([T_n > k]) \\
& = & \mathbb{P}([T_n > 0]) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \big((\cancel{k} + 1) - \cancel{k}\big) \ \mathbb{P}([T_n > k]) \\
& = & \mathbb{P}([T_n > 0]) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k]) \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k])
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k])}$$

Calculons maintenant $\mathbb{E}(T_n)$ avec le résultat de la question ***8.b)***.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(T_n) & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k]) \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{n^k} \dbinom{n-1}{k} & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dbinom{n-1}{k} \left(\dfrac{1}{n}\right)^k 1^{(n-1)-k} \ = \ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1} & \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}}$$

Commentaire

- L'égalité $[T_n > k-1] = [T_n > k] \cup [T_n = k]$ peut sembler « sortie du chapeau » mais elle est relativement classique dès qu'on étudie une v.a.r. à valeurs entières.
  Il en est de même de la formule :
  $$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k])$$
  qu'il convient de savoir démontrer.
- Pour démontrer cette dernière formule, on peut aussi utiliser l'égalité entre événements suivante :
  $$[T_n > k] = \bigcup_{i=k+1}^{n} [T_n = i]$$
  Cette égalité est plus naturelle mais entraîne une démonstration plus complexe faisant intervenir des sommes doubles. Détaillons celle-ci.
  En appliquant $\mathbb{P}$ de part et d'autre de l'égalité précédente, par incompatibilité des événements de la réunion :
  $$\mathbb{P}([T_n > k]) = \sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{P}([T_n = i])$$
  On obtient donc :
  $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k]) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{P}([T_n = i]) \right) \\ &= \sum_{0 \leqslant k < i \leqslant n} \mathbb{P}([T_n = i]) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{i-1} \mathbb{P}([T_n = i]) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} i \, \mathbb{P}([T_n = i]) \; = \; \mathbb{E}(T_n) \end{aligned}$$

□

10. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{E}(T_n) \; = \; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \; = \; \exp\left(\ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}\right)\right) \; = \; \exp\left((n-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

Par ailleurs, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a : $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. D'où :

$$(n-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} (n-1)\frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \cancel{n}\frac{1}{\cancel{n}} = 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

Or la fonction exp est continue en 1, donc, par composition de **limites**, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n) = \mathrm{e}}$$

Commentaire

- On rappelle que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a :

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$

Ce résultat est obtenu par composition des limites à partir du résultat : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

- Lorsqu'on étudie une suite de la forme $\left({u_n}^{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, il est classique d'utiliser l'écriture :

$${u_n}^{a_n} \;=\; \exp\left(a_n \ \ln(u_n)\right)$$

(il faut évidemment vérifier au préalable : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n > 0$)
Cette écriture n'est autre que la définition de ${u_n}^{a_n}$ si a_n n'est pas un entier. Il faut donc systématiquement penser à cette écriture dans ce cas. Comme le démontre la question précédente, cette écriture peut aussi être utile dans le cas où a_n est entier. □

11. On rappelle que la commande `rd.randint(a,b)` simule une v.a.r. qui suit la loi uniforme sur $[\![a, b-1]\!]$.Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la v.a.r. T_n :

```
def SimulT(n):
    S=0
    k=0
    while _________ :
        S = _____________________________
        k = _______
    return _____
```

Démonstration.

```
def SimulT(n):
    S=0
    k=0
    while S < n :
        S = S + rd.randint(1,n+1)
        k = k+1
    return k
```

- La variable `S` joue le rôle de S_k
- La variable `k` joue le rôle de k

On ajoute à `S`, à chaque tirage, le numéro de la boule tirée. On garde en mémoire le nombre de tirages effectués à l'aide de la variable `k`. Lorsque la variable `S` prend une valeur supérieure ou égale à n, on s'arrête et on renvoie le nombre de tirages effectués, c'est-à-dire `k`. □

Exercice 4 (EML 2018)

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. a) Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.

Démonstration.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements suivants :

$$\begin{array}{lcl} P_k & : & \text{« obtenir Pile au } k^{\text{ème}} \text{ lancer »} \\ F_k & : & \text{« obtenir Face au } k^{\text{ème}} \text{ lancer »} \end{array}$$

- L'événement $[X = 0]$ est réalisé si et seulement si on n'a obtenu aucun Face avant l'obtention du $2^{\text{ème}}$ Pile.
  On a donc obtenu successivement deux Pile.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } [X = 0] = P_1 \cap P_2.}$$

  Les lancers de pièce sont indépendants, donc :

  $$\mathbb{P}([X = 0]) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) = \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

  $$\boxed{\mathbb{P}([X = 0]) = \frac{4}{9}}$$

Commentaire

L'énoncé ne précise pas explicitement que les lancers sont indépendants. Cette hypothèse est cependant raisonnable puisque l'expérience de lancer est répétée dans des conditions identiques.

- L'événement $[X = 1]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu un unique Face avant l'apparition du $2^{\text{ème}}$ Pile.
  Deux cas se présentent alors :
  - × soit on a obtenu ce Face avant deux Pile successifs,
  - × soit on a obtenu ce Face entre les deux premiers Pile.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } [X = 1] = (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3).}$$

  On obtient alors :

  $$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X = 1]) & = & \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap P_3) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap P_3) & \textit{(par incompatibilité de } F_1 \cap P_2 \cap P_3 \textit{ et } P_1 \cap F_2 \cap P_3\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}(F_1)\,\mathbb{P}(P_2)\,\mathbb{P}(P_3) + \mathbb{P}(P_1)\,\mathbb{P}(F_2)\,\mathbb{P}(P_3) & \textit{(par indépendance des lancers)} \\ & = & \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} & \\ & = & 2\,\frac{4}{3^3} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X=1]) = 2\ \dfrac{4}{3^3}}$$

- On raisonne de la même manière pour l'événement $[X = 2]$.

$$\boxed{[X=2] \ = \ (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4)}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}([X=2]) & \\ = & \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) + \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) & \textit{(par incompatibilité)} \\ = & \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \ + \ \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} \ + \ \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} & \textit{(par indépendance)} \\ = & 3\ \dfrac{4}{3^4} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X=2]) = 3\ \dfrac{4}{3^4}}$$

□

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X = n]) = (n+1)\ \dfrac{4}{3^{n+2}}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- L'événement $[X = n]$ est réalisé par les tirages qui contiennent n Face et 2 Pile.
  De tels $(n+2)$-tirages sont entièrement caractérisés par :
  × la place du 2nd Pile : 1 choix (le $(n+2)^{\text{ème}}$ lancer),
  × la place du 1er Pile : $(n+1)$ choix (du 1er lancer au $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer).
  Il y a donc $1 \times (n+1) = n+1$ tels $(n+2)$-tirages.
- Il s'agit alors de savoir qu'elle est la probabilité d'apparition de ces $(n+2)$-tirage.
  - Tout d'abord, tous ces $(n+2)$-tirages ont la même probabilité d'apparition, car ils comportent tous le même nombre de Face (n) et le même nombre de Pile (2).
    Donc en particulier, ils ont la même probabilité d'apparition que le tirage suivant qui réalise l'événement :
    $$F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}$$
  - Or, comme les lancers sont indépendants :
    $$\begin{array}{rl} & \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}) \\ = & \mathbb{P}(F_1)\,\mathbb{P}(F_2)\ \cdots\ \mathbb{P}(F_n)\,\mathbb{P}(P_{n+1})\,\mathbb{P}(P_{n+2}) \\ = & \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \cdots \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \\ = & \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \ = \ \dfrac{1}{3^n} \times \dfrac{4}{3^2} \\ = & \dfrac{4}{3^{n+2}} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a donc : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X=n]) = (n+1)\ \dfrac{4}{3^{n+2}}.}$$

Commentaire

On peut exprimer l'événement $[X = n]$ à partir des (P_k) et (F_k) :

$$\begin{array}{rcl} [X = n] & = & (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n \cap F_{n+1} \cap P_{n+2}) \\ & \cup & (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n \cap F_{n+1} \cap P_{n+2}) \\ & \cup & (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \cdots \cap F_n \cap F_{n+1} \cap P_{n+2}) \\ & \vdots & \\ & \cup & (F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}) \end{array}$$

On voit apparaître le fait que $[X = n]$ est la réunion de $(n + 1)$ événements incompatibles (on voit bien également que c'est le choix de la place du 1^{er} Pile qui importe).
Les probabilités de chacun de ces événements sont identiques (égales à $\dfrac{4}{3^{n+2}}$ avec le même calcul que précédemment).
On retrouve bien évidemment le résultat démontré plus haut. Seule la présentation de la démonstration diffère.

□

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule de cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose : $V = X - U$.

2. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable U.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si l'événement $[X = n]$ est réalisé, alors l'expérience consiste à piocher parmi les boules numérotées de 0 à n.
Donc la v.a.r. U peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et n.
Ceci est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } U(\Omega) = \mathbb{N}}$$

□

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Comme expliqué précédemment, si l'événement $[X = n]$ est réalisé, alors l'expérience consiste à piocher parmi les boules numérotées de 0 à n. On en déduit :

× soit $k \in [\![n + 1, +\infty[\![$.
Comme il est impossible de piocher une boule de numéro supérieur à $(n + 1)$, on a :

$$\mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) = 0$$

× soit $k \in [\![0, n]\!]$.
Comme la probabilité de choisir parmi ces $(n + 1)$ boules est uniforme, on a :

$$\mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) = \frac{1}{n + 1}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![n+1, +\infty[\![,\ \mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) = 0.}$$

Commentaire

Le caractère uniforme du choix d'une boule est justifiée par :
- le fait que les boules sont indiscernables au toucher,
- on pioche au hasard dans une urne.

□

c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\, \mathbb{P}([X = n]) \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}$$

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}$.
  La famille $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([U = k]) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [U = k]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\, \mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\, \mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) && \textit{(car : } \forall n < k,\ \mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) = 0 \textit{ d'après la question } \textbf{\textit{2.b)}}\textit{)} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\, \frac{1}{n+1} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.b)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\, \mathbb{P}([X = n])}$$

- D'après la question ***1.b)*** :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X = n]) = (n+1)\, \frac{4}{3^{n+2}}$$

  On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([U = k]) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{\cancel{n+1}}\, \cancel{(n+1)}\, \frac{4}{3^{n+2}} = \frac{4}{3^2} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\
&= \frac{4}{3^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+k}} = \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= \frac{4}{3^{k+2}}\, \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{3^{k+2}}\, \frac{3}{2} \\
&= \frac{2}{3^{k+1}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}}$$

□

d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

Démonstration.

- La v.a.r. U admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} k\, \mathbb{P}([U=k])$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer sa convergence car la série est à termes positifs.
- Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{N} k\, \mathbb{P}([U=k]) = \sum_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}([U=k]) = \sum_{k=1}^{N} k\, \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{3^2} \sum_{k=1}^{N} k\, \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{2}{3^2} \sum_{k=1}^{N} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

On reconnaît la somme partielle d'ordre N de la série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{3}$ (avec $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$), donc elle converge.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } U \text{ admet une espérance.}}$$

De plus :

$$\mathbb{E}(U) = \frac{2}{3^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{3^2} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3^2} \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3^2}} \frac{\cancel{3^2}}{2^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(U) = \frac{1}{2}}$$

- La v.a.r. U admet une variance si et seulement si la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} k^2\, \mathbb{P}([U=k])$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer sa convergence car la série est à termes positifs.
- Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} k^2\, \mathbb{P}([U=k]) &= \sum_{k=1}^{N} \big(k(k-1)+k\big)\, \mathbb{P}([U=k]) \\ &= \sum_{k=1}^{N} k(k-1)\, \mathbb{P}([U=k]) + \sum_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}([U=k]) \\ &= \sum_{k=2}^{N} k(k-1)\, \mathbb{P}([U=k]) + \sum_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}([U=k]) \end{aligned}$$

On sait déjà que la série $\sum\limits_{k \geqslant 1}^{k} \mathbb{P}([U=k])$ converge et est de somme $\frac{1}{2}$, car l'espérance $\mathbb{E}(U)$ existe et vaut $\frac{1}{2}$.
De plus :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{N} k(k-1)\, \mathbb{P}([U=k]) &= \sum_{k=2}^{N} k(k-1)\, \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{3^3} \sum_{k=2}^{N} k(k-1)\, \frac{1}{3^{k-2}} \\ &= \frac{2}{3^3} \sum_{k=2}^{N} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \end{aligned}$$

On reconnaît la somme partielle d'ordre N de la série géométrique dérivée seconde de raison $\frac{1}{3}$ (avec $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$), donc elle converge.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } U \text{ admet une variance.}}$$

De plus :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U^2) &= \frac{2}{3^3}\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3^3}\,\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2^2}{3^3}\,\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} + \frac{1}{2} = \frac{\cancel{2^2}}{\cancel{3^3}}\,\frac{\cancel{3^3}}{\cancel{2^3}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

Enfin, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(U) = \mathbb{E}(U^2) - \big(\mathbb{E}(U)\big)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(U) = \frac{3}{4}}$$

Commentaire

On pouvait résoudre cette question plu rapidement en remarquant que la v.a.r. $U+1$ suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{2}{3}$.

- En effet :
  - × $U(\Omega) = \mathbb{N}$. Donc $(U+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
  - × soit $k \in \mathbb{N}^*$.

  $$\mathbb{P}([U+1=k]) = \mathbb{P}([U=k-1]) = \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^{k-1}} \times \frac{2}{3} = \left(1-\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{2}{3}$$

  On reconnaît une loi géométrique de paramètre $\dfrac{2}{3}$. D'où : $U+1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{2}{3}\right)$.
- On en déduit l'espérance et la variance de U.
  - × Tout d'abord : $\mathbb{E}(U+1) = \dfrac{1}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{2}$.
    Or, par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(U+1) = \mathbb{E}(U) + 1$.
    D'où : $\mathbb{E}(U) = \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$.
  - × Ensuite : $V(U+1) = \dfrac{1-\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{\frac{1}{\cancel{3}}}{\frac{4}{3^{\cancel{2}}}} = \dfrac{3}{4}$.
    Par propriété de la variance : $V(U+1) = \mathbb{V}(U)$. D'où : $V(U) = \dfrac{3}{4}$.

□

3. ***a)*** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.

Démonstration.
Rappelons que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On procède alors par disjonction de cas.
Soit $n \in X(\Omega) = \mathbb{N}$. Supposons que l'événement $[X = n]$ est réalisé.

- On a donc obtenu n Face avant le $2^{\text{ème}}$ Pile.
- On doit donc ensuite piocher parmi les boules numérotées de 0 à n. Dans ce cas, la v.a.r. U peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et n.
- On en déduit que $V = X - U$ peut prendre toutes les valeurs entières entre $n - 0$ et $n - n$, c'est-à-dire toutes les valeurs entières entre 0 et n.

$$\boxed{\text{Ceci étant valable pour tout } n \in X(\Omega) = \mathbb{N}, \text{ on en déduit : } V(\Omega) = \mathbb{N}.}$$

Commentaire

On pouvait aussi démontrer que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ par double inclusion.

- Par définition des v.a.r. U et X : $\forall \omega \in \Omega,\ U(\omega) \leqslant X(\omega)$.
  Donc : $\forall \omega \in \Omega,\ V(\omega) = X(\omega) - U(\omega) \geqslant 0$.
  De plus, les v.a.r. X et U prennent des valeurs entières.
  On en déduit : $V(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  L'événement $[V = n]$ est réalisé par exemple si on obtient d'abord n Face, puis on pioche la boule numérotée 0.
  On a ainsi trouvé une réalisation de l'événement $[V = n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  On en déduit : $\mathbb{N} \subset V(\Omega)$.

Finalement : $V(\Omega) = \mathbb{N}$.

□

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$.
Deux cas se présentent.

- Si $k \in [\![n+1, +\infty[\![$, alors : $\mathbb{P}_{[X=n]}([V = k]) = 0$.
  En effet, si l'événement $[X = n]$ est réalisé, alors la v.a.r. U peut prendre des valeurs entre 0 et n, et donc V ne peut prendre une valeur strictement supérieure à n.
- Si $k \in [\![0, n]\!]$, alors, d'après la question ***2.b)*** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X=n]}([V = k]) &= \frac{\mathbb{P}([X = n] \cap [V = k])}{\mathbb{P}([X = n])} = \frac{\mathbb{P}([X = n] \cap [X - U = k])}{\mathbb{P}([X = n])} \\
&= \frac{\mathbb{P}([X = n] \cap [U = n - k])}{\mathbb{P}([X = n])} = \frac{\cancel{\mathbb{P}([X = n])}\, \mathbb{P}_{[X=n]}([U = n - k])}{\cancel{\mathbb{P}([X = n])}} \\
&= \mathbb{P}_{[X=n]}([U = n - k]) = \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Finalement : } \forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}_{[X=n]}([V = k]) = \dfrac{1}{n+1} \quad \text{et} \\ \qquad \forall k \in [\![n+1, +\infty[\![,\ \mathbb{P}_{[X=n]}([V = k]) = 0. \end{array}}$$

□

c) En déduire la loi de V.

Démonstration.
On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V par rapport à $[X = n]$ est la même que la loi conditionnelle de U par rapport à $[X = n]$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Donc, avec les mêmes calculs qu'à la question } \textbf{\textit{2.c)}}\text{, on obtient :} \\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([V = k]) = \dfrac{2}{3^{k+1}}. \end{array}}$$

□

4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

Démonstration.
On souhaite montrer dans cette question :

$$\forall (k,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}([U=k] \cap [V=j]) = \mathbb{P}([U=k])\, \mathbb{P}([V=j])$$

Soit $(k,j) \in \mathbb{N}^2$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([U=k] \cap [V=j]) & = & \mathbb{P}([U=k] \cap [X-U=j]) & \\ & = & \mathbb{P}([U=k] \cap [X=k+j]) & \\ & = & \mathbb{P}([X=k+j])\, \mathbb{P}_{[X=k+j]}([U=k]) & \\ & = & \cancel{(k+j+1)}\ \dfrac{4}{3^{k+j+2}} \times \dfrac{1}{\cancel{k+j+1}} & \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{1.b)}} \textit{ et } \textbf{\textit{2.b)}}\textit{, car } k+j \geqslant k\textit{)} \\ & = & \dfrac{4}{3^{k+j+2}} & \end{array}$$

- Ensuite, d'après les questions ***2.c)*** et ***3.c)*** :

$$\mathbb{P}([U=k])\ \mathbb{P}([V=j]) \ = \ \frac{2}{3^{k+1}} \times \frac{2}{3^{j+1}} \ = \ \frac{4}{3^{k+j+2}}$$

On a donc bien : $\forall (k,j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}([U=k] \cap [V=j]) \ = \ \mathbb{P}([U=k])\ \mathbb{P}([V=j])$.

$$\boxed{\text{On en déduit que les v.a.r. } U \text{ et } V \text{ sont indépendantes.}}$$

□

5. Que vaut $\mathrm{Cov}(U,V)$? En déduire $\mathrm{Cov}(X,U)$?

Démonstration.

- Les v.a.r. U et V sont indépendantes d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Cov}(U,V) = 0}$$

Commentaire

Attention ! L'implication suivante n'est pas une équivalence :
X et Y indépendantes $\Rightarrow$ $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

- On calcule :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Cov}(X,U) & = & \mathrm{Cov}(U+V,U) & \textit{(par définition de } V\textit{)} \\ & = & \mathrm{Cov}(U,U) + \mathrm{Cov}(V,U) & \textit{(par linéarité à gauche de la covariance)} \\ & = & \mathrm{Cov}(U,U) + \mathrm{Cov}(U,V) & \textit{(par symétrie de la covariance)} \\ & = & \mathbb{V}(U) + 0 & \textit{(par propriété de la covariance et d'après la question précédente)} \\ & = & \dfrac{3}{4} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.d)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,U) = \frac{3}{4}}$$

□

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0,1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose de la pièce amenant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

6. **Simulation informatique**

a) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def simule_X():` qui simule la v.a.r. X.

Démonstration.

```
def simule_X():
    nbFace = 0
    nbPile = 0
    while nbPile < 2:
        lancer = rd.binomial(1,2/3)
        if lancer==1:
            nbPile = nbPile + 1
        else:
            nbFace = nbFace + 1
    return nbFace
```

Détaillons ce programme.

- On s'intéresse au nombre de Pile et au nombre de Face obtenus dans l'expérience.
  On initialise donc ces deux variables.

```
    nbFace = 0
    nbPile = 0
```

- On veut ensuite simuler l'expérience décrite par l'énoncé.
  On veut donc simuler des lancers de pièces où la probabilité d'obtenir Pile est $\dfrac{2}{3}$ tant qu'on n'a pas obtenu le $2^{\text{ème}}$ Pile. On traduit cette condition avec une boucle `while` :

```
    while nbPile < 2
```

- Un lancer de pièce est une épreuve de Bernoulli de succès Pile.
  Ainsi on simule un lancer avec une v.a.r. , notée Y, de loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{2}{3}$.
  La v.a.r. Y prend la valeur 1 si et seulement si on obtient un Pile, et la valeur 0 sinon.
  On simule la v.a.r. Y dans la variable `lancer`.

```
        lancer = rd.binomial(1,2/3)
```

- À chaque lancer, si la variable `lancer` vaut 1 (c'est-à-dire si on a obtenu Pile), alors on veut augmenter de 1 le nombre de Pile. Si la variable `lancer` vaut 0 (c'est-à-dire si on a obtenu Face), alors on veut augmenter de 1 le nombre de Face.

```
        if lancer==1:
            nbPile = nbPile + 1
        else:
            nbFace = nbFace + 1
```

- La boucle `while` s'arrête dès que `nbPile` vaut 2.
  La réalisation de X obtenue est alors stockée dans la variable `nbFace` et donc on renvoie cette variable :

```
    return nbFace
```

$\square$

b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0,1[$, simule la variable aléatoire Y. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
def mystere(p):
    r = 0
    N = 10 ^ 4
    for k in range(N):
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y:
            r = r + 1/N
    return r
```

Démonstration.

- Cette fonction permet d'obtenir une approximation de la probabilité $\mathbb{P}([X \leqslant Y])$ en fonction du paramètre p.
- L'idée naturelle pour obtenir cette approximation est :
  - × de simuler un grand nombre de fois ($N = 10^4$ est ce grand nombre) les v.a.r. X et Y. Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(x_1, \dots, x_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(X_1, \dots, X_N)$ de la v.a.r. X, et un N-uplet $(y_1, \dots, y_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(Y_1, \dots, Y_N)$ de la v.a.r. Y.
  - × de compter le nombre de fois où $x_i \leqslant y_i$, pour $i \in [\![1, N]\!]$.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\frac{\text{nombre de fois où } x_i \leqslant y_i}{\text{taille de l'observation}} \ \simeq \ \mathbb{P}([X \leqslant Y])$$

- Dans la fonction, les valeurs $(x_1, \dots, x_N)$ et $(y_1, \dots, y_N)$ sont obtenues par des appels successifs (à l'aide d'une boucle `for`) aux fonctions `simule_X` et `simule_Y` et stockées les unes après les autres dans les variables `x` et `y`.

```
    for k in range(N):
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
```

  La variable `r` est alors mise à jour à chaque tour de boucle :

```
        if x <= y:
            r = r + 1/N
```

Détaillons cette mise à jour :

× si `x <= y`, alors on effectue l'instruction `r = r + 1/N`.
Ainsi, à chaque fois que `x <= y`, la variable `r` vaut successivement : $\frac{1}{N}$, $\frac{2}{N}$, …, $\frac{j}{N}$, où j est le nombre de fois, parmi les N observations, où `x <= y`.

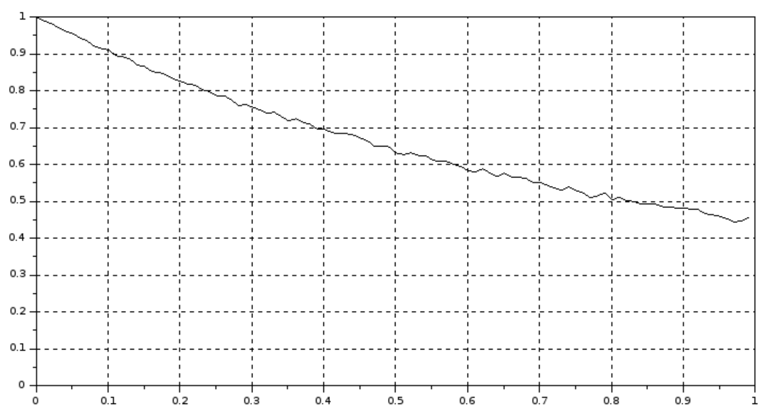
× si `x > y`, alors la variable `r` n'est pas mise à jour.

Cela signifie que la variable `r` compte le nombre de fois où `x <= y` et divise ce nombre par `N`. Une fois cette boucle effectuée, la variable `r` contient donc l'approximation de $\mathbb{P}([X \leqslant Y])$ formulée par la LfGN.

> La fonction `mystere` renvoie une approximation de la probabilité $\mathbb{P}([X \leqslant Y])$ pour différentes valeurs de p.

☐

c) On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour laquelle le jeu serait équilibré.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, le jeu est équilibré si les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner, autrement dit si la probabilité que le joueur A gagne vaut $\frac{1}{2}$.
- La probabilité que le joueur A gagne se lit sur l'axe des ordonnées du graphe.
On constate qu'elle vaut $\frac{1}{2}$ pour une valeur de p à peu près égale à $0,82$.

> On conjecture que la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré est $0,83$.

☐

7. Étude de la variable aléatoire Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

a) Reconnaître la loi de Z et préciser son (ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.

Démonstration.

- Pour le joueur B, l'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de succès Pile, de probabilité p.
- La v.a.r. Z est la v.a.r. associée au rang d'obtention du premier Pile, donc du premier succès.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit : } Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p). \\ \mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Z) = \dfrac{1-p}{p^2}\end{array}}$$

□

b) Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.

Démonstration.

- Le joueur B arrête de jouer lorsqu'il obtient son premier Pile.
  Il a donc obtenu un nombre de Face égal à son nombre de lancers moins 1 (le dernier lancer pour lequel il a obtenu Pile).

$$\boxed{Y = Z - 1}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La v.a.r. } Y \text{ admet donc une espérance et une variance en tant que} \\ \text{transformée affine d'une v.a.r. qui en admet.}\end{array}}$$

- Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Y) \ = \ \mathbb{E}(Z-1) \ = \ \mathbb{E}(Z) - 1 \ = \ \frac{1}{p} - 1 \ = \ \frac{1-p}{p}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{1-p}{p}}$$

- Par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(Y) \ = \ \mathbb{V}(Z-1) \ = \ \mathbb{V}(Z) \ = \ \frac{1-p}{p^2}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Y) = \frac{1-p}{p^2}}$$

□

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y \geqslant n]) = (1-p)^n$.

Démonstration.

- On rappelle que $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Donc $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{Comme } Y = Z - 1, \text{ on a : } Y(\Omega) = \mathbb{N}.}$$

- Si $n = 0$, alors $[Y \geqslant 0] = \Omega$ car $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Donc :

$$\mathbb{P}([Y \geqslant 0]) \ = \ \mathbb{P}(\Omega) \ = \ 1 \ = \ (1-p)^0$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Y \geqslant n]) & = & \mathbb{P}([Z - 1 \geqslant n]) \ = \ \mathbb{P}([Z \geqslant n+1]) \\ & = & 1 - \mathbb{P}([Z < n+1]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([Z \leqslant n]) \end{array}$$ *(car Z est à valeurs entières)*

  Or : $[Z \leqslant n] \ = \ \bigcup\limits_{k=1}^{n} [Z = k]$.

Les événements $[Z = 1]$, $\ldots$, $[Z = n]$ sont incompatibles. Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z \leqslant n]) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([Z = k]) = \sum_{k=1}^{n} p\,(1-p)^{k-1} \\
&= p \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} = p \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^{k} \\
&= p\, \frac{1-(1-p)^n}{\cancel{1} - (\cancel{1}-p)} = \cancel{p}\, \frac{1-(1-p)^n}{\cancel{p}} \\
&= 1-(1-p)^n
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}([Y \geqslant n]) = \cancel{1} - \Big(\cancel{1} - (1-p)^n\Big) = (1-p)^n$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y \geqslant n]) = (1-p)^n.}$$

Commentaire

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On aurait aussi pu résoudre cette question en exprimant l'événement $[Y \geqslant n]$ en fonction des événements :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ F_i = \text{« obtenir Face au } i^{\text{ème}} \text{ lancer}$$

En effet, comme la v.a.r. Y est le nombre de Face obtenus avant l'obtention du premier Pile, on a :

$$[Y \geqslant n] = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n = \bigcap_{i=1}^{n} F_i$$

Comme les lancers sont indépendants, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y \geqslant n]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(F_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} (1-p) = (1-p)^n
\end{aligned}$$

□

8. a) Montrer : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\, \mathbb{P}([Y \geqslant n])$.

Démonstration.
La famille $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X \leqslant Y]) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [X \leqslant Y]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [n \leqslant Y]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\ \mathbb{P}([n \leqslant Y]) \qquad \textit{(car les v.a.r. } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)}
\end{aligned}$$

Les v.a.r. X et Y sont indépendantes, car les lancers du joueur A et ceux du joueur B sont indépendants.

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\ \mathbb{P}([Y \geqslant n]).}$$

□

b) Déduire des résultats précédents : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \dfrac{4}{(2+p)^2}$.

Démonstration.
D'après les questions ***1.b)*** et ***7.b)*** et la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X \leqslant Y]) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\ \mathbb{P}([Y \geqslant n]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big((n+1)\ \frac{4}{3^{n+2}}\ (1-p)^n \Big) \\
&= \frac{4}{3^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \Big((n+1)\ \frac{1}{3^n}\ (1-p)^n \Big) = \frac{4}{3^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\ \left(\frac{1-p}{3}\right)^n \\
&= \frac{4}{3^2} \sum_{n=1}^{+\infty} n\ \left(\frac{1-p}{3}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

On reconnaît la somme d'une série géométrique dérivée de raison $\dfrac{1-p}{3}$ (avec $\left|\dfrac{1-p}{3}\right| < 1$), donc elle converge bien.
On obtient :

$$\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \frac{4}{3^2}\ \frac{1}{\left(1 - \frac{1-p}{3}\right)^2} = \frac{4}{3^2}\ \frac{1}{\left(\frac{2+p}{3}\right)^2} = \frac{4}{\cancel{3^2}}\ \frac{\cancel{3^2}}{(2+p)^2} = \frac{4}{(2+p)^2}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \frac{4}{(2+p)^2}}$$

□

c) Déterminer la valeur de p pour lequel le jeu est équilibré.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, le jeu est équilibré si les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.
- Or le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui du joueur B, c'est-à-dire si l'événement $[X \leqslant Y]$ est réalisé.
  Sinon le joueur A perd.
- Donc le jeu est équilibré si $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \dfrac{1}{2}$. Or, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow 8 = (2+p)^2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{8} = 2 + p \qquad \textit{(car la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[\textit{ et } 2+p \geqslant 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{2} = 2 + p \\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2 = p \\
&\Leftrightarrow 2(\sqrt{2} - 1) = p
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le jeu est équilibré si } p = 2(\sqrt{2} - 1).}$$

Commentaire

On peut noter que $2(\sqrt{2}-1) \simeq 0,83$ (à 10^{-2} près).
On confirme donc bien la conjecture de la question ***6.c)***. $\square$