DS3 barème (version B)

Exercice 1 /33

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) = -3\,X\,P(X) + X^2\,P'(X), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P$$

1. a) Rappeler la dimension de E.

- **1 pt :** $\dim(E) = \dim\big(\mathbb{R}_3[X]\big) = 4$

b) Montrer que f est un endomorphisme de E.

- **1 pt : caractère morphisme**
- **2 pts : caractère endo ($f(P)$ est un polynôme + de degré 3 au max)**

c) Déterminer la matrice M de f dans 1a base canonique de E.

- **2 pts :** $f(P_0)$**,** $f(P_1)$**,** $f(P_2)$**,** $f(P_3)$**.**
- **1 pt : conclusion** $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

d) La matrice M est-elle inversible ?

- **1 pt :** M **n'est pas inversible**

e) La matrice M est-elle diagonalisable ?

- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$ **(**M **triangulaire inférieure)**
- **2 pts :** M **n'est pas diagonalisable en procédant par l'absurde (si elle l'était, on aurait** $M = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$**)**

f) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n.

- **1 pt :** $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **et** $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **1pt :** $\forall n \geqslant 4,\ M^n = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$

g) Préciser le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

- **3 pts :** $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(P_3)$
  (1 pt pour l'écriture du système, 1 pt pour la résolution, 1 pt pour ne pas confondre $\mathbb{R}_3[X]$ **et** $\mathbb{R}^4$**)**
- **1 pt :** (P_3) **est une base de** $\mathrm{Ker}(f)$**.**

h) Déterminer l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f.

- **1 pt :** $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(-3P_1, -2P_2, -P_3, 0_E)$ **(calculs déjà faits pour déterminer** M**)**
- **1 pt :** $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(P_1, P_2, P_3)$

2. On note id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.
Soit u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = \mathrm{id}_E + u + u^2 + u^3$.

a) Soit P un polynôme de E tel que $P \notin \mathrm{Ker}\left(u^3\right)$.
Montrer que la famille $\left(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\right)$ est une base de E.

- 1 pt : écriture correcte de la définition de liberté

- 1 pt : appliquer u^3 de part et d'autre et en conclure $\lambda_3 = 0$

- 1 pt : de même, en appliquant u^2 dans la nouvelle égalité . . .

- 1 pt : base car de cardinal maximal

b) Montrer que g est un automorphisme de E.
Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u.

- 3 pts : soit par pivot on inverse M, soit on remarque $(\mathrm{id}-u)\circ(\mathrm{id}+u+u^2+u^3) = \mathrm{id}-u^4$

On met seulement un point pour la détermination de g et 2 points pour la détermination de g^{-1}.

c) Établir l'égalité : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{id}_E)$.

- 1 pt : $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})$

- 1 pt : pour un théorème du rang

- 1 pt : $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 3$ **donc** $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$

- 1 pt : $\dim(\mathrm{Im}(g - \mathrm{id})) = 3$ **donc** $\dim(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})) = 1$

d) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.

- 3 pts : soit on passe par $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g)$ qui est triangulaire inférieure et qui ne contient que 1 dans la diagonale, soit on suppose $\lambda \in \mathrm{Sp}(g)$ puis on démontre $\frac{\lambda-1}{\lambda} \in \mathrm{Sp}(u)$ en appliquant g^{-1} et on conclut $\lambda = 1$ car $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0\}$ (u est nilpotente)

Exercice 2 /60

Préliminaire

1. Montrer, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

- **- 1 pt : initialisation**
- **- 2 pts : hérédité**

Partie I

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
Une urne contient N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires.
On tire au hasard, successivement et *sans remise*, les N boules de cette urne.
Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

2. Préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on peut utiliser pour modéliser cette expérience aléatoire.

- **- 2 pts : Ω est l'ensemble des N-uplets d'éléments distincts de $\{b_1, \ldots, b_N\}$.**
- **- 1 pt : $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$**
- **- 1 pt : $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme**

3. Soit i et j deux entiers de l'intervalle $[\![1, N]\!]$. Montrer :

$$\mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leqslant i < j \leqslant N \end{cases}$$

- **- 1 pt : cas $i \geqslant j$**
- **- 3 pts : cas $i < j$ (dont 1 pt pour introduction N_k et B_k si besoin)**

4. Déterminer les lois de probabilité des variables X_1 et X_2. Ces variables sont-elles indépendantes ?

- **- 1 pt : $X_1(\Omega) = [\![1, N-1]\!]$**
- **- 1 pt : $X_2(\Omega) = [\![2, N]\!]$**
- **- 1 pt : FPT**
- **- 1 pt : $\sum_{j=2}^{N} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \sum_{j=i+1}^{N} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = 2 \, \frac{N-i}{N(N-1)}$**
- **- 2 pts : avec le même raisonnement $\mathbb{P}([X_2 = j]) = 2 \, \frac{j-1}{N\,(N-1)}$**
- **- 2 pts : les v.a.r. X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes (1 pt pour voir que le cas $N = 2$ est à part et que dans ce cas X_1 et X_2 sont indépendantes)**

5. *a)* Démontrer que la variable $N + 1 - X_2$ a même loi que X_1.

- **- 1 pt : $(N + 1 - X_2)(\Omega) \subset [\![1, N-1]\!]$**
- **- 2 pts : $\mathbb{P}([N + 1 - X_2 = i]) = 2 \, \frac{N-i}{N\,(N-1)}$ (dont 1 pt pour $N + 1 - i \in [\![2, N]\!]$)**

b) Déterminer la loi de la variable $X_2 - X_1$ et la comparer à celle de X_1.

- **1 pt :** $(X_2 - X_1)(\Omega) \subset [\![1, N-1]\!]$
- **1 pt : FPT**
- **2 pts :** $\displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = k+i]) = \sum_{i=1}^{N-k} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = k+i])$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_2 - X_1 = k]) = \dfrac{2\ (N-k)}{N\ (N-1)}$

6. À l'aide des résultats de la question ***5*** :

a) Calculer les espérances $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$.

- **1 pt : les v.a.r. utilisées admettent une espérance car sont finies**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_1) = N + 1 - \mathbb{E}(X_2)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(X_1)$
- **1 pt : résolution système (**$\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{N+1}{3}$ **et** $\mathbb{E}(X_2) = 2\ \dfrac{N+1}{3}$**)**

b) Montrer l'égalité des variances $\mathbb{V}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_2)$.

- **1 pt : les v.a.r. utilisées admettent une variance car sont finies**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(N + 1 - X_2)$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(N + 1 - X_2) = \mathbb{V}(X_2)$

c) **Seulement pour les cubes** : Établir la relation : $2\,\text{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{V}(X_1)$
(où $\text{Cov}(X_1, X_2)$ désigne la covariance des variables X_1 et X_2).

- **1 pt : existence** $\text{Cov}(X_1, X_2)$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(X_2 - X_1)$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_2 - X_1) = \mathbb{V}(X_2) - 2\,\text{Cov}(X_1, X_2) + \mathbb{V}(X_1)$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_2) - 2\,\text{Cov}(X_1, X_2) + \mathbb{V}(X_1) = 2\,\mathbb{V}(X_1) - 2\,\text{Cov}(X_2, X_2)$

7. Calculer $\mathbb{V}(X_1)$. En déduire $\mathbb{V}(X_2)$ et $\text{Cov}(X_1, X_2)$.

- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_1^2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} i^2\ \mathbb{P}([X = i])$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} i^2 = \frac{(N-1)\ N\ \big(2\ (N-1) + 1\big)}{6}$

  $\displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} i^3 = \frac{(N-1)^2\ N^2}{4}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_1^2) = \dfrac{N\ (N+1)}{6}$
- **1 pt : formule de Koenig-Huygens**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{(N+1)\ (N-2)}{18}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_2) = \dfrac{(N+1)\ (N-2)}{18}$ **et** $\text{Cov}(X_1, X_2) = \dfrac{(N+1)\ (N-2)}{36}$

Partie II

On suppose que A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$ et on désigne par D l'événement : « A ne prend pas la même valeur que B ».

8. Montrer que la probabilité de l'événement D est $\dfrac{N-1}{N}$.

- **1 pt :** $D = [A \neq B]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}([A = B])$
- **1 pt : FPT**
- **3 pts :** $\mathbb{P}(D) = \dfrac{N-1}{N}$ **(dont 1 pt pour indépendance de A et B et 1 pt pour $A \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$ et $B \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$)**

9. Soit Y_1 et Y_2 les variables aléatoires définies par : $\left\{ \begin{array}{l} Y_1 = \min(A, B) \\ Y_2 = \max(A, B) \end{array} \right.$

Calculer, pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, 2, \ldots, N\}$, la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j])$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}(D) \neq 0$
- **1 pt : si** $i > j$**,** $\mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) = 0$ **(car** $[Y_1 = i] \cap [Y_2 = j] = \varnothing$**)**
- **2 pts : si** $i = j$**,** $\mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) = 0$ **(car** $D \cap \big([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j] \big) = \varnothing$**)**
- **5 pts : cas** $i < j$ **:**
  - × **1 pt :** $D \cap \big([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j] \big) = [Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]$
  - × **1 pt :** $[Y_1 = i] \cap [Y_2 = j] \ = \ \big([A = i] \cap [B = j] \big) \cup \big([A = j] \cap [B = i] \big)$
  - × **1 pt : incompatibilité**
  - × **1 pt :** A **et** B **indépendantes**
  - × **1 pt : fin du calcul** $\mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) = \dfrac{2}{N\ (N-1)}$

Problème /98

Ce problème se compose de deux parties. Si le candidat ne parvient pas à établir un résultat demandé, il l'indiquera clairement, et il pourra pour la suite admettre ce résultat.
Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n.
On tire une boule au hasard dans U_n. On note k le numéro de cette boule.

- Si k est égal à 1, on arrête les tirages.
- Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.

On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1. On note Y_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules tirées.
On note $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$ (respectivement $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$) l'espérance et la variance de X_n (respectivement Y_n).

Dans tout le problème, $\mathbb{P}_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B, où B est un événement non négligeable.

Partie I

1. On pose : $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

a) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, les inégalités :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

- **1 pt : décroissance de la fonction inverse**
- **1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant**

b) En déduire les inégalités : $\ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$
- **1 pt : sommation télescopique**
- **1 pt :** $h_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant h_n$
- **1 pt :** $h_n \leqslant 1 + \ln(n)$

c) Déterminer un équivalent simple de h_n quand n tend vers l'infini.

- **1 pt : division par** $\ln(n) > 0$ **(0 si** $n \geqslant 2$ **non précisé)**
- **1 pt :** $h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ **par théorème d'encadrement**

2. On pose : $k_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$.

a) Montrer, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, l'inégalité :

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

- **1 pt :** $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k(k-1)}$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ **par décroissance de la fonction inverse sur** $]0, +\infty[$

b) En déduire la majoration : $k_n \leqslant 2$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2} \leqslant \sum\limits_{k=2}^{n} \left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}\right)$
- **1 pt : télescopage**
- **1 pt :** $2 - \dfrac{1}{n} \leqslant 2$

c) Déterminer un équivalent simple de $h_n - k_n$ quand n tend vers l'infini.

- **1 pt :** $h_n - 2 \leqslant h_n - k_n \leqslant h_n$
- **1 pt :** $\dfrac{h_n}{\ln(n)} - \dfrac{2}{\ln(n)} \leqslant \dfrac{h_n - k_n}{\ln(n)} \leqslant \dfrac{h_n}{\ln(n)}$
- **1 pt :** $h_n - k_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$ **par théorème d'encadrement**

Partie II. Étude de la variable aléatoire X_n

On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1. a) Quelle est la loi de I_n ?

- **2 pts :** $I_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$
  - × **1 pt : description expérience**
  - × **1 pt : description v.a.r.**

b) Quelle est la loi conditionnelle de X_n sachant $[I_n = 1]$?

- **1 pt : loi conditionnelle de** X_n **sachant** $[I_n = 1]$ **est la loi certaine égale à** 1 **(**0 **au moindre non sens)**

c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{2, \ldots, n\}\,,\ \mathbb{P}_{[I_n = k]}([X_n = j]) = \mathbb{P}([X_{k-1} = j-1])$$

- **2 pts**

2. a) Quelle est la loi de X_1 ?

- **1 pt :** X_1 **suit la loi certaine égale à** 1 **(**0 **si seulement « X_1 suit une loi certaine »)** *b)* Quel est l'événement $[X_2 = 1]$? Donner la loi de X_2, son espérance et sa variance.

- **1 pt :** $[X_2 = 1] = [I_2 = 1]$
- **1 pt :** $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \dfrac{1}{2}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_2 = 2]) = \dfrac{1}{2}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_2) = \dfrac{3}{2}$ **et** $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{4}$

c) Calculer $\mathbb{P}_{[I_3=1]}([X_3 = 2])$, $\mathbb{P}_{[I_3=2]}([X_3 = 2])$, $\mathbb{P}_{[I_3=3]}([X_3 = 2])$.
Déterminer la loi de X_3, son espérance et sa variance.

- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[I_3=1]}([X_3 = 2]) = 0$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[I_3=2]}([X_3 = 2]) = 1$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[I_3=3]}([X_3 = 2]) = \dfrac{1}{2}$
- **2 pts :** $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \dfrac{1}{2}$
  - × **1 pt : FPT sur le SCE** $\big([I_3 = 1], [I_3 = 2], [I_3 = 3]\big)$
  - × **1 pt :** $\forall i \in [\![1, 3]\!]$, $\mathbb{P}([I_3 = 1]) \neq 0$
    fin du calcul
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_3 = 1]) = \dfrac{1}{3}$
  - × **1 pt :** $[X_3 = 1] = [I_3 = 1]$
    $\mathbb{P}([I_3 = 1]) = \dfrac{1}{3}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_3 = 3]) = \dfrac{1}{6}$
- **1 pt :** X_3 **admet une espérance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_3) = \dfrac{11}{6}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_3^2) = \dfrac{23}{6}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_3) = \dfrac{17}{36}$

d) Déterminer la loi du couple (I_3, X_3).

- **1 pt :** $I_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$, $X_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$
- **1 pt : cas** $j = 1$ **(**$[I_3 = 1] \cap [X_3 = 1] = [X_3 = 1]$, $[I_3 = 2] \cap [X_3 = 1] = \varnothing$, $[I_3 = 3] \cap [X_3 = 1] = \varnothing$**)**
- **1 pt : cas** $j = 3$ **(**$[I_3 = 1] \cap [X_3 = 3] = \varnothing$, $[I_3 = 2] \cap [X_3 = 3] = \varnothing$, $[I_3 = 3] \cap [X_3 = 3] = [X_3 = 3]$**)**
- **1 pt : cas** $j = 2$ **(**$\mathbb{P}([I_3 = k] \cap [X_3 = j]) = \mathbb{P}([I_3 = k])\, \mathbb{P}_{[I_3=k]}([X_3 = j]) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } k = 1 \\ \dfrac{1}{3} & \textbf{si } k = 2 \\ \dfrac{1}{6} & \textbf{si } k = 3 \end{cases}$

e) `(CUBES UNIQUEMENT)` En déduire la covariance du couple (I_3, X_3). Les variables aléatoires I_3 et X_3 sont-elles indépendantes ?

- **1 pt :** $I_3\ X_3$ **admet une espérance**
- **2 pts :** $\mathbb{E}(I_3\ X_3) = \dfrac{25}{6}$
- **1 pt :** $\text{Cov}(I_3, X_3) = \dfrac{1}{2}$
- **1 pt :** I_3 **et** X_3 **non indépendantes car** $\text{Cov}(I_3, X_3) \neq 0$

3. a) Montrer que X_n prend ses valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$.

- **1 pt**

b) Déterminer $\mathbb{P}([X_n = 1])$ et $\mathbb{P}([X_n = n])$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_n = 1]) = \dfrac{1}{n}$
- **4 pts :** $\mathbb{P}([X_n = n]) = \dfrac{1}{n!}$
  × **1 pt :** $[X_n = n] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$
  × **1 pt : FPC**
  × **1 pt :** $\forall i \in [\![2, n]\!]$**,** $\mathbb{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1}}\big(A_i\big) = \dfrac{1}{i}$
  × **1 pt : fin calcul**

c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer la relation :

$$\forall j \geqslant 2,\ \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_k = j-1])$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\,[X_n = j]\,\big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\,[I_n = k] \cap [X_n = j]\,\big)$ **(FPT)**
- **1 pt :** $= \sum\limits_{k=2}^{n} \mathbb{P}\big(\,[I_n = k]\,\big) \times \mathbb{P}_{[I_n = k]}\big(\,[X_n = j]\,\big)$ **(d'après *1.b)*)**
- **1 pt :** $= \sum\limits_{k=2}^{n} \mathbb{P}\big(\,[I_n = k]\,\big) \times \mathbb{P}\big(\,[X_{k-1} = j-1]\,\big)$ **(d'après *1.c)*)**
- **1 pt : fin calcul**

d) Si n est supérieur ou égal à 3 et j supérieur ou égal à 2, calculer :

$$n\,\mathbb{P}([X_n = j]) - (n-1)\,\mathbb{P}([X_{n-1} = j])$$

En déduire, si n est un entier supérieur ou égal à 2 :

$$\forall j \geqslant 1,\ \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{n-1}{n}\ \mathbb{P}([X_{n-1} = j]) + \frac{1}{n}\ \mathbb{P}([X_{n-1} = j-1])$$

- **1 pt :** $\forall n \geqslant 3$**,** $\forall j \geqslant 2$**,** $n\ \mathbb{P}\big(\,[X_n = j]\,\big) - (n-1)\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j-1]\,\big)$
- **1 pt :** $\forall n \geqslant 3$**,** $\forall j \geqslant 2$**,** $\mathbb{P}\big(\,[X_n = j]\,\big) = \dfrac{n-1}{n}\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j]\,\big) + \dfrac{1}{n}\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j-1]\,\big)$
- **3 pts : cas** $n = 2$
  × **1 pt : cas** $j \geqslant 3$
  × **1 pt : cas** $j = 2$
  × **1 pt : cas** $j = 1$

4. a) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, en utilisant ***3.d)*** :

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$$

- **1 pt : X_{n-1} et X_n admettent une espérance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{n-1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} j \ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j] \big) + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} j \ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1] \big)$
- **1 pt :** $= \dfrac{n-1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n-1} j \ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j] \big) + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=2}^{n} j \ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1] \big)$
- **1 pt :** $= \dfrac{n-1}{n} \ \mathbb{E}(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n-1} j \ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j] \big) + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j] \big)$
- **1 pt :** $\big([X_{n-1} = j] \big)_{j \in [\![1, n-1]\!]}$ **est un système complet d'événements**

b) En déduire $\mathbb{E}(X_n)$ et donner un équivalent simple de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=2}^{n} \big(\mathbb{E}(X_k) - \mathbb{E}(X_{k-1}) \big) = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_n) = h_n$
- $\mathbb{E}(X_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$

5. a) Si n est supérieur ou égal à 2, calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_{n-1}^2)$ et de $\mathbb{E}(X_{n-1})$.

- **1 pt : X_{n-1} et X_n admettent une variance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_n^2) = \dfrac{n-1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} j^2 \ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j] \big) + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} j^2 \ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1] \big)$
- **1 pt :** $= \dfrac{n-1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n-1} j^2 \ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j] \big) + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=2}^{n} j^2 \ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1] \big)$
- $= \dfrac{n-1}{n} \ \mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n-1} j^2 \ \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j] \big)$
- **1 pt :** $\big([X_{n-1} = j] \big)_{j \in [\![1, n-1]\!]}$ **est un système complet d'événements**
- **1 pt :** $= \mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \dfrac{2}{n} \ \mathbb{E}(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}$

b) En déduire : $\mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n$ (en reprenant les notations de la **Partie I**).

- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_n) = \left(\mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \dfrac{2}{n} \ \mathbb{E}(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n} \right) - \left(\mathbb{E}(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n} \right)^2$ **(d'après *6.a)* et *7.a)*)**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=2}^{n} \big(\mathbb{V}(X_k) - \mathbb{V}(X_{k-1}) \big) = \sum\limits_{k=2}^{n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k^2} \right)$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n$

c) Donner un équivalent de $\mathbb{V}(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$

6. Soit $(T_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout i entier naturel non nul, T_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{i}$. On pose :

$$S_n \ = \ \sum_{i=1}^{n} T_i \ = \ T_1 + \cdots + T_n$$

a) Vérifier que X_1 et T_1 ont même loi.

- **1 pt**

b) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([S_n = j]) \ = \ \frac{1}{n}\ \mathbb{P}([S_{n-1} = j-1]) + \frac{n-1}{n}\ \mathbb{P}([S_{n-1} = j])$$

En déduire que X_n et S_n ont même loi.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([S_n = j]\big) = \mathbb{P}\big([T_n = 0] \cap [S_n = j]\big) \ + \ \mathbb{P}\big([T_n = 1] \cap [S_n = j]\big)$ **(FPT)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([S_n = j]\big) = \mathbb{P}\big([T_n = 0] \cap [S_{n-1} = j]\big) \ + \ \mathbb{P}\big([T_n = 1] \cap [S_{n-1} = j-1]\big)$
- **1 pt :** T_n **et** S_{n-1} **indépendantes par lemme des coalitions**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([S_n = j]\big) = \dfrac{n-1}{n} \times \mathbb{P}\big([S_{n-1} = j]\big) \ + \ \dfrac{1}{n} \times \mathbb{P}\big([S_{n-1} = j-1]\big)$
- **1 pt : initialisation**
- **4 pts : hérédité**
  - × **2 pts :** $j \in [\![1, n+1]\!]$
  - × **2 pts :** $j = 0$ **(1 pt pour** $[S_{n+1} = 0] = \bigcap\limits_{i=1}^{n+1} [T_i = 0]$**, 1 pt pour indépendance de** T_1**,** $\ldots$**,** T_{n+1}**)**

c) Retrouver ainsi $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

- **1 pt :** S_n **admet une variance (et donc une espérance)**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(S_n) = h_n$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(S_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(T_i)$ **(par indépendance de** T_1**,** $\ldots$**,** T_n**)**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(S_n) = h_n - k_n$
- **1 pt : même loi** $\Rightarrow$ **mêmes moments**