DS3 correction (version B)

Exercice 1 (HEC 2013)

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) = -3\,X\,P(X) + X^2\,P'(X), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P$$

1. a) Rappeler la dimension de E.

Démonstration.

$$\boxed{\dim(E) \ = \ \dim\big(\mathbb{R}_3[X]\big) \ = \ 4}$$

□

b) Montrer que f est un endomorphisme de E.

Démonstration.

- Démontrons que f est linéaire.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(P, Q) \in E^2$.

$$\begin{aligned}
& \big(f(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)\big)(X) \\
= \ & -3X(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X) + X^2(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'(X) \\
= \ & -3\lambda \cdot X\,P(X) - 3\mu \cdot X\,Q(X) + \lambda \cdot X^2\,P'(X) + \mu \cdot X^2\,Q'(X) \\
= \ & \lambda \cdot \big(-3\,X\,P(X) + X^2\,P'(X)\big) + \mu \cdot \big(-3\,X\,Q(X) + X^2\,Q'(X)\big) \\
= \ & \lambda \cdot \big(f(P)\big)(X) + \mu \cdot \big(f(Q)\big)(X)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$f(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) \ = \ \lambda \cdot f(P) + \mu \cdot f(Q)$$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est linéaire.}}$$

- Démontrons que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$.
Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$.
  - Comme $\deg(P) \leqslant 3$, alors :
    × $\deg(-3X\,P(X)) \leqslant 4$.
    × $\deg(P') \leqslant 2$, donc $\deg\big(X^2\,P'(X)\big) \leqslant 4$.

  On en déduit : $\deg\big(-3X\,P(X) + X^2\,P'(X)\big) \leqslant 4$.

Commentaire

- Rappelons tout d'abord les propriétés à connaître concernant le degré des polynômes.
Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ alors :

$$\boxed{\deg\big(P \times Q\big) \ = \ \deg(P) + \deg(Q)} \qquad \boxed{\deg\big(P + Q\big) \ = \ \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)}$$

- L'argument de degré déroulé dans la démonstration ci-dessus permet généralement de conclure que $f(P)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. Ce n'est malheureusement pas le cas ici et il faut donc faire une étude plus précise (*cf* ci-dessous).

- On note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de E.
  Comme $P \in \mathbb{R}_3[X]$, il existe $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_2 + a_2 \cdot P_2 + a_3 \cdot P_3$.
  Notons $R = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$. On a alors : $P = R + a_3 \cdot P_3$ et par linéarité de f :

$$f(R + a_3 \cdot P_3) \;=\; f(R) + a_3 \cdot f(P_3)$$

  En utilisant la méthodologie précédente, on démontre : $\deg\big(f(R)\big) \leqslant 3$.
  Il reste alors à déterminer $\deg\big(f(P_3)\big)$. Or :

$$\begin{array}{rcl} \Big(f(P_3)\Big)(X) & = & -3\,X\,P_3(X) + X^2\,P_3'(X) \\ & = & -3\,X \times X^3 + X^2 \times (3\,X^2) \\ & = & -3\,X^4 + 3\,X^4 \;=\; 0_{\mathbb{R}_3[X]} \end{array}$$

  Ainsi, $\deg\big(f(P_3)\big) = -\infty$ et, d'après ce qui précède : $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_3[X].}$$

Commentaire

- Dans les exercices, la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est parfois directement notée $(1, X, X^2, X^3)$. C'est une source fréquente d'erreurs et confusions. Il est donc **fortement recommandée** d'introduire la base canonique sous la forme (P_0, P_1, P_2, P_3) si ce n'est pas fait dans l'énoncé (et si la notation P_i n'est pas utilisée par ailleurs).
- On aurait également pu démontrer que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$ de la manière suivante :
  Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors il existe $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P(X) = \sum\limits_{i=0}^{3} a_i\,X^i$.
  Ainsi : $P'(X) = \sum\limits_{i=1}^{3} i\,a_i\,X^{i-1}$. Donc :

$$\begin{array}{rcl} \big(f(P)\big)(X) & = & -3\,X\,P(X) + X^2\,P'(X) \\ & = & -3\,X\,\sum\limits_{i=0}^{3} a_i\,X^i + X^2\,\sum\limits_{i=1}^{3} i\,a_i\,X^{i-1} \\ & = & -3\,\sum\limits_{i=0}^{3} a_i\,X^{i+1} + \sum\limits_{i=1}^{3} i\,a_i\,X^{i+1} \\ & = & -3\,\sum\limits_{i=1}^{4} a_{i-1}\,X^i + \sum\limits_{i=2}^{4} (i-1)\,a_{i-1}\,X^i \\ & = & \left(-3\,\sum\limits_{i=1}^{3} a_{i-1}\,X^i - \cancel{3\,a_3\,X^4}\right) + \left(\sum\limits_{i=2}^{3} (i-1)\,a_{i-1}\,X^i + \cancel{3\,a_3\,X^4}\right) \\ & = & -3\,\sum\limits_{i=1}^{3} a_{i-1}\,X^i + \sum\limits_{i=2}^{3} (i-1)\,a_{i-1}\,X^i \end{array}$$

  On en déduit : $\deg\big(f(P)\big) \leqslant 3$. Donc : $f(P) \in E$.

$\square$

c) Déterminer la matrice M de f dans 1a base canonique de E.

Démonstration.

- $$\begin{array}{rcl} \Big(f(P_0)\Big)(X) & = & -3\,X\,P_0(X) + X^2\,P_0'(X) \ = \ -3\,X \qquad \textit{(car } P_0'(X) = 0\textit{)} \\ & = & (-3 \cdot P_1)(X) \end{array}$$

  Ainsi : $f(P_0) \ = \ 0 \cdot P_0 - 3 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 + 0 \cdot P_3$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(P_0)\big) \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{array}{rcl} \Big(f(P_1)\Big)(X) & = & -3\,X\,P_1(X) + X^2\,P_1'(X) \ = \ -2\,X^2 \qquad \textit{(car } P_1'(X) = 1\textit{)} \\ & = & (-2 \cdot P_2)(X) \end{array}$$

  Ainsi : $f(P_1) \ = \ 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 - 2 \cdot P_2 + 0 \cdot P_3$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(P_1)\big) \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{array}{rcl} \Big(f(P_2)\Big)(X) & = & -3\,X\,P_2(X) + X^2\,P_2'(X) \ = \ -X^3 \qquad \textit{(car } P_2'(X) = 2\,X\textit{)} \\ & = & (-1 \cdot P_3)(X) \end{array}$$

  Ainsi : $f(P_2) \ = \ 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 - 1 \cdot P_3$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(P_2)\big) \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- $\big(f(P_3)\big)(X) \ = \ 0_E$ *(d'après la question précédente)*

  Ainsi : $f(P_3) \ = \ 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 + 0 \cdot P_3$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(P_3)\big) \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } M \ = \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

d) La matrice M est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n.

Démonstration.

- La matrice M est triangulaire (inférieure) et au moins l'un de ses coefficients diagonaux est nul (ils le sont tous).

  $\boxed{\text{La matrice } M \text{ n'est donc pas inversible.}}$

- La matrice M est triangulaire (inférieure). Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux.

  $\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Sp}(M) = \{0\}.}$

On procède par l'absurde.
Supposons que M est diagonalisable, alors il existe :

× $P \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ inversible,

× $D \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M,

telles que $M = PDP^{-1}$.
Or $\text{Sp}(M) = \{0\}$. Donc : $D = 0 \cdot I_4 = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$. Ainsi :

$$M \ = \ PDP^{-1} \ = \ P \times 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} \times P^{-1} \ = \ 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$$

Ceci est absurde.

$$\boxed{\text{On en déduit que la matrice } M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

- On calcule :

× $M^2 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

× $M^3 \ = \ M^2 \times M \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

× $M^4 \ = \ M^3 \times M \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ = \ 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$

× Par récurrence immédiate : $\forall n \geqslant 4,\ M^n = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \geqslant 4,\ M^n = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}.}$$

Commentaire

- On rappelle qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$A^{k-1} \neq 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad A^k = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

  est appelée *matrice nilpotente d'indice* k (on rappelle aussi que ce terme est hors programme). La matrice M de l'énoncé est donc une matrice nilpotente d'indice 4.

- On note aussi que, comme $M^4 = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$, le polynôme $Q(X) = X^4$ est un polynôme annulateur de M. On a bien : $\text{Sp}(M) = \{0\} \ \subset \ \{0\} = \{\text{racines de } Q\}$.

- Il est en fait simple de démontrer que, pour n'importe quelle matrice nilpotente A, on a toujours : $\text{Sp}(A) \subset \{0\}$.
  En effet, soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'indice k. Alors : $A^k = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.
  Le polynôme $Q(X) = X^k$ est donc un polynôme annulateur de A.
  Ainsi : $\text{Sp}(A) \ \subset \ \{\text{racines de } Q\} = \{0\}$.

□

e) Préciser le noyau $\text{Ker}(f)$ de f ainsi qu'une base de $\text{Ker}(f)$.

Démonstration.

- Soit $P \in E$. Alors il existe $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
P \in \text{Ker}(f) & \Leftrightarrow & f(P) = 0_E \\
& \Leftrightarrow & M\,U = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -3\,a_0 & & & & & = & 0 \\ & - & 2\,a_1 & & & = & 0 \\ & & & - & a_2 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccccl} a_0 & & & = & 0 \\ & a_1 & & = & 0 \\ & & a_2 & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
\text{Ker}(f) & = & \{P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 + a_3 \cdot P_3 \in E \mid a_0 = a_1 = a_2 = 0\} \\
& = & \{a_3 \cdot P_3 \mid a_3 \in \mathbb{R}\} \\
& = & \text{Vect}\,(P_3)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \text{Ker}(f) = \text{Vect}\,(P_3).}$$

- La famille (P_3) :
  - × engendre $\text{Ker}(f)$,
  - × est libre car constituée uniquement d'un polynôme non nul.

$$\boxed{\text{On en conclut que la famille } (P_3) \text{ est une base de } \text{Ker}(f).}$$

Commentaire

Il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $E_0(f) = \text{Ker}(f)$, noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$. Si P et $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(P)$ sont deux représentations différentes du même polynôme P, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 + a_3 \cdot P_3}_{\in \mathbb{R}_3[X]} \;\cancel{=}\; \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \underbrace{\text{Vect}\,(P_3)}_{E_0(f)} \;\cancel{=}\; \underbrace{\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{E_0(A)}$$

□

f) Déterminer l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f.

Démonstration.

- Par caractérisation de l'image d'une application linéaire :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\left(f(P_0), f(P_1), f(P_2), f(P_3)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(-3 \cdot P_1, -2 \cdot P_2, -P_3, 0_E\right) \qquad \textit{(d'après } \textbf{1.c)}\textit{)} \\ &= \mathrm{Vect}\left(P_1, P_2, P_3\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(P_1, P_2, P_3\right)}$$

- La famille (P_1, P_2, P_3) :
  - × engendre $\mathrm{Im}(f)$,
  - × est libre car c'est une sous-famille de la famille libre $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$.

$$\boxed{\text{Une base de } \mathrm{Im}(f) \text{ est } (P_1, P_2, P_3).}$$

□

2. On note id_E et $0_{\mathscr{L}(E)}$ respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.
Soit u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = \mathrm{id}_E + u + u^2 + u^3$.

a) Soit P un polynôme de E tel que $P \notin \mathrm{Ker}\left(u^3\right)$.
Montrer que la famille $\left(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\right)$ est une base de E.

Démonstration.

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.
Supposons : $\lambda_1 \cdot P + \lambda_2 \cdot u(P) + \lambda_3 \cdot u^2(P) + \lambda_4 \cdot u^3(P) = 0_E$ $(*)$.
  - × Par linéarité de u^3, on obtient, en composant par u^3 de part et d'autre de l'égalité :

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 \cdot u^3(P) + \lambda_2 \cdot \cancel{u^4(P)} + \lambda_3 \cdot \cancel{u^5(P)} + \lambda_4 \cdot \cancel{u^6(P)} & = & u^3\left(0_E\right) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \lambda_1 \cdot u^3(P) & & 0_E \end{array}$$

En effet, comme $u^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ alors $u^5 = u \circ 0_{\mathscr{L}(E)} = 0_{\mathscr{L}(E)}$. De même : $u^6 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Et en particulier : $u^4(P) = u^5(P) = u^6(P) = 0_E$.
  - × On obtient : $\lambda_1 \cdot u^3(P) = 0_E$.
Or, d'après l'énoncé : $P \notin \mathrm{Ker}\left(u^3\right)$. Ainsi : $u^3(P) \neq 0_E$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lambda_1 = 0.}$$

  - × L'égalité $(*)$ se réécrit alors : $\lambda_2 \cdot u(P) + \lambda_3 \cdot u^2(P) + \lambda_4 \cdot u^3(P) = 0_E$.
En composant par u^2 de part et d'autre, on obtient alors :

$$\lambda_2 \cdot u^3(P) = 0_E$$

$$\boxed{\text{On en déduit alors : } \lambda_2 = 0.}$$

× L'égalité $(*)$ se réécrit alors : $\lambda_3 \cdot u^2(P) + \lambda_4 \cdot u^3(P) = 0_E$.
En composant par u de part et d'autre, on obtient alors : $\lambda_3 \cdot u^3(P) = 0_E$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lambda_3 = 0.}$$

× L'égalité $(*)$ se réécrit alors : $\lambda_4 \cdot u^3(P) = 0_E$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lambda_4 = 0.}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \mathscr{B}' = \big(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\big) \text{ est bien libre.}}$$

- Ainsi, la famille $\mathscr{B}'$:
  × est libre,
  × vérifie : $\text{Card}(\mathscr{B}') = 4 = \dim(E)$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathscr{B}' = \big(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\big) \text{ est une base de } E.}$$

□

b) Montrer que g est un automorphisme de E.
Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u.

Démonstration.

- Tout d'abord, g est un endomorphisme de E en tant que somme d'endomorphismes de E.
- Comme les endomorphismes id_E et g commutent :

$$\begin{array}{ccc} (\text{id}_E - u) \circ (\text{id}_E + u + u^2 + u^3) & = & \text{id}_E - u^4 \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ (\text{id}_E - u) \circ g & & \text{id}_E \end{array} \quad \textit{(car } u^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}\textit{)}$$

On en déduit que g est bijectif et $g^{-1} = \text{id}_E - u$.

$$\boxed{\text{Finalement, } g \text{ est un automorphisme et } g^{-1} = \text{id}_E - u.}$$

Commentaire

- L'endomorphisme g a une forme particulière : $g = \text{id}_E + u + u^2 + u^3$.
Cela fait penser, dans le monde des réels, à une somme géométrique : $1 + x + x^2 + x^3$.
Or on sait que si $x \neq 1$, on a : $1+x+x^2+x^3 = \dfrac{1-x^4}{1-x}$. Cette formule provient de l'égalité :

$$(1-x) \times (1 + x + x^2 + x^3) = 1 - x^4$$

C'est cette analogie avec le cas réel qui doit faire penser à former $(\text{id}_E - u) \circ g$ pour obtenir :

$$(\text{id}_E - u) \circ (\text{id}_E + u + u^2 + u^3) \ = \ \text{id}_E - u^4$$

- On peut obtenir d'autres relations sur les endomorphismes par analogie avec le cas réel.
Par exemple, en généralisant le résultat sur les sommes géométriques :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x^n - y^n = (x-y) \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k}\, y^k \right)$$

on peut penser à la relation suivante sur les endomorphismes.
Pour tout $(f,g) \in \big(\mathscr{L}(E)\big)^2$ tel que : $f \circ g = g \circ f$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ f^n - g^n \ = \ (f-g) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^{n-k} \circ g^k \right)$$

□

Commentaire

On pouvait également répondre à cette question en exploitant la matrice représentative de g dans la base $\mathscr{B}'$.

- Commençons par déterminer la matrice représentative de u dans la base $\mathscr{B}'$.
  - × $u(P) \ = \ 0 \cdot P + 1 \cdot u(P) + 0 \cdot u^2(P) + 0 \cdot u^3(P)$.

    Donc : $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(u(P)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
  - × $u\big(u(P)\big) \ = \ u^2(P) \ = \ 0 \cdot P + 0 \cdot u(P) + 1 \cdot u^2(P) + 0 \cdot u^3(P)$.

    Donc : $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}\Big(u\big(u(P)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
  - × $u\big(u^2(P)\big) \ = \ u^3(P) \ = \ 0 \cdot P + 0 \cdot u(P) + 0 \cdot u^2(P) + 1 \cdot u^3(P)$.

    Donc : $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}\Big(u\big(u^2(P)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
  - × $u\big(u^3(P)\big) \ = \ u^4(P) \ = \ 0_E$.

    Donc : $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}\Big(u\big(u^3(P)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Ainsi : $N = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- On en déduit, par isomorphisme de représentation :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(u^2) = N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(u^3) = N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Et finalement, toujours par isomorphisme de représentation :

$$B \ = \ \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(g) \ = \ \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(\text{id}_E + u + u^2 + u^3) \ = \ I_4 + N + N^2 + N^3 \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- La matrice B est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
  Elle est donc inversible. On en déduit que l'endomorphisme g est bijectif.
- Avec l'algorithme du pivot de Gauss, on détermine B^{-1}. On trouve :

$$B^{-1} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \ = \ I_4 - N$$

  Par passerelle matrice-endomorphisme, on obtient bien : $g^{-1} = \text{id}_E - u$.

c) Établir l'égalité : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{id}_E)$.

Démonstration.

- Démontrons d'abord : $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)$.
  Soit $P \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors $u(P) = 0_E$. Ainsi :
  $$(g - \mathrm{id}_E)(P) \;=\; g(P) - P \;=\; \cancel{P} + u(P) + u^2(P) + u^3(P) - \cancel{P} \;=\; u(P) + u^2(P) + u^3(P)$$
  Or : $u(P) = 0$. On obtient donc :
  $$u^2(P) \;=\; u\big(u(P)\big) \;=\; u(0_E) \;=\; 0_E \quad \textit{(par linéarité de u)}$$
  De même :
  $$u^3(P) \;=\; u\big(u^2(P)\big) \;=\; u(0_E) \;=\; 0_E$$
  On en déduit : $(g - \mathrm{id}_E)(P) = 0_E$, *i.e.* $\in \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)$.
  $$\boxed{\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)}$$
- Montrons ensuite : $\dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)\big)$.
  × Déterminons donc d'abord $\dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big)$.
  D'après le théorème du rang :
  $$\underset{\substack{\shortparallel \\ 4}}{\dim(E)} \;=\; \dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(u)\big)$$
  De plus, par caractérisation de l'image d'une application linéaire (en utilisant la base $\mathscr{B}'$) :
  $$\begin{aligned}\mathrm{Im}(u) &= \mathrm{Vect}\,\big(u(P), u\big(u(P)\big), u\big(u^2(P)\big), u\big(u^3(P)\big)\big) \\ &= \mathrm{Vect}\,\big(u(P), u^2(P), u^3(P), u^4(P)\big) \\ &= \mathrm{Vect}\,\big(u(P), u^2(P), u^3(P), \cancel{0_E}\big) \\ &= \mathrm{Vect}\,\big(u(P), u^2(P), u^3(P)\big)\end{aligned}$$
  Ainsi, la famille $\big(u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$:
  - engendre $\mathrm{Im}(u)$,
  - est libre car est une sous-famille de la famille libre $\mathscr{B}' = \big(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$.

  On en déduit que $\big(u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$. Donc :
  $$\dim\big(\mathrm{Im}(u)\big) \;=\; \mathrm{Card}\Big(\big(u(P), u^2(P), u^3(P)\big)\Big) \;=\; 3$$
  $$\boxed{\text{On en conclut : } \dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) = 4 - 3 = 1.}$$
  × Déterminons maintenant $\dim\big(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)\big)$.
  D'après le théorème du rang :
  $$\underset{\substack{\shortparallel \\ 4}}{\dim(E)} \;=\; \dim\big(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(g - \mathrm{id}_E)\big)$$

De plus, par caractérisation de l'image d'une application linéaire en utilisant la base $\mathscr{B}'$ (on rappelle la relation : $u^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}$) :

$$\begin{array}{cll} & \mathrm{Im}(g - \mathrm{id}_E) & \\ = & \mathrm{Vect}\left((g-\mathrm{id}_E)(P), (g-\mathrm{id}_E)\big(u(P)\big), (g-\mathrm{id}_E)\big(u^2(P)\big), (g-\mathrm{id}_E)\big(u^3(P)\big)\right) & \\ = & \mathrm{Vect}\left(u(P)+u^2(P)+u^3(P), u^2(P)+u^3(P), u^3(P), \cancel{0_E}\right) & \\ = & \mathrm{Vect}\left(u(P)+u^2(P), u^2(P), u^3(P)\right) & \textit{(on met à jour le } 1^{er} \textit{ et le } 2^{ème} \textit{ polynôme en leur retirant 1 fois le } 3^{ème}\textit{)} \\ = & \mathrm{Vect}\left(u(P), u^2(P), u^3(P)\right) & \textit{(on met à jour le } 1^{er} \textit{ polynôme en lui retirant 1 fois le } 2^{ème}\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, la famille $\big(u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$:

- engendre $\mathrm{Im}(g - \mathrm{id}_E)$,
- est libre car est une sous-famille de la famille libre $\mathscr{B}' = \big(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$.

On en déduit que $\big(u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(g - \mathrm{id}_E)$. Donc :

$$\dim\big(\mathrm{Im}(g - \mathrm{id}_E)\big) \;=\; 3$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \dim\big(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)\big) = 4 - 3 = 1.}$$

On en déduit bien : $\dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)\big)$.

- Ainsi :
  × $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)$
  × $\dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)\big)$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E).}$$

□

d) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.

Démonstration.

- On commence par remarquer :

$$g\big(u^3(P)\big) \;=\; (\mathrm{id}_E + u + u^2 + u^3)\big(u^3(P)\big) \;=\; u^3(P) + \cancel{u^4(P) + u^5(P) + u^6(P)}$$

Donc le polynôme $u^3(P)$ vérifie :

× $u^3(P) \neq 0_E$

× $g\big(u^3(P)\big) = 1 \cdot u^3(P)$

On en déduit que $u^3(P)$ est un vecteur propre de g associé à la valeur propre 1.

$$\boxed{\text{Le réel 1 est donc valeur propre de } g\text{, d'où } \{1\} \subset \mathrm{Sp}(g).}$$

- Montrons alors que c'est la seule valeur propre de g, *i.e.* $\mathrm{Sp}(g) \subset \{1\}$.
  Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(g)$. Alors il existe $P \in E$ tel que :
  × $P \neq 0_E$,
  × $g(P) = \lambda \cdot P$.

  Or g est bijectif, donc :
  - le réel 0 n'est pas valeur propre de g. Ainsi : $\lambda \neq 0$.
  - en composant par g^{-1} l'égalité $g(P) = \lambda \cdot P$, on obtient :

$$\begin{aligned} P &= g^{-1}(\lambda \cdot P) \ = \ \lambda \cdot g^{-1}(P) && \textit{(par linéarité de } g^{-1}\textit{)} \\ &= \lambda \cdot (\mathrm{id}_E - u)(P) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{2.b)}}\textit{)} \\ &= \lambda \cdot P - \lambda \cdot u(P) \end{aligned}$$

  On en déduit :
  × $P \neq 0_E$,
  × $u(P) = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} \cdot P$.

  Donc P est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\dfrac{\lambda-1}{\lambda}$.
  En particulier : $\dfrac{\lambda-1}{\lambda} \in \mathrm{Sp}(u)$.
  Or, d'après l'énoncé : $u^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  Le polynôme $Q(X) = X^4$ est donc un polynôme annulateur de u. On en déduit :

$$\mathrm{Sp}(u) \ \subset \ \{\text{racines de } Q\} \ = \ \{0\}$$

  Ainsi : $\dfrac{\lambda-1}{\lambda} = 0$. D'où : $\lambda = 1$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{Sp}(g) \subset \{1\}.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Sp}(g) = \{1\}.}$$

Commentaire

Si on a répondu à ***2.b)*** à l'aide de la matrice représentative de g, alors la réponse à cette question est plus directe.
Comme $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire (inférieure), ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. D'où : $\mathrm{Sp}(B) = \{1\}$.
Ainsi : $\mathrm{Sp}(g) = \mathrm{Sp}(B) = \{1\}$.

□

Exercice 2 (ESCP 2001)

Préliminaire

1. Montrer, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4}$.

- **Initialisation**
  - D'une part : $\sum\limits_{k=1}^{1} k^3 \;=\; 1^3 \;=\; 1$.
  - D'autre part : $\dfrac{1^2\ (1+1)^2}{4} \;=\; \dfrac{4}{4} \;=\; 1$.

  D'où $\mathcal{P}(1)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(\ i.e.\ \sum\limits_{k=1}^{n+1} k^3 = \dfrac{(n+1)^2\ (n+2)^2}{4}\ \right)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2\ (n+1)^2}{4} + (n+1)^2 && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\big(n^2 + 4\,(n+1)\big) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\ (n+2)^2
\end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\ (n+1)^2}{4}.}$$

☐

Partie I

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
Une urne contient N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires.
On tire au hasard, successivement et *sans remise*, les N boules de cette urne.
Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

2. Préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on peut utiliser pour modéliser cette expérience aléatoire.

Démonstration.

- On note b_1, ..., b_{N-2} les $(N-2)$ boules blanches, et b_{N-1}, b_N les deux boules noires de l'urne.
  L'univers Ω est l'ensemble des N-uplets d'éléments distincts de l'ensemble $\{b_1, \dots, b_N\}$.
  (on peut aussi choisir de confondre boule et numéro associé - dans ce cas, Ω est l'ensemble des N-uplets d'éléments distincts de l'ensemble $[\![1, N]\!]$)
- Comme Ω est un ensemble fini, on choisit $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Enfin, on munit $(\Omega, \mathscr{A})$ de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$.

☐

3. Soit i et j deux entiers de l'intervalle $[\![1, N]\!]$. Montrer :

$$\mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leqslant i < j \leqslant N \end{cases}$$

Démonstration.

- Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, on considère les événements suivants :

  N_k : « la $k^{\text{ème}}$ boule tirée est noire » et B_k : « la $k^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche »

- Soit $(i, j) \in [\![1, N]\!]^2$. Deux cas se présentent :
  - × si $i \geqslant j$, alors :

    $$[X_1 = i] \cap [X_2 = j] \;=\; \varnothing$$

    En effet, si l'événement $[X_1 = i] \cap [X_2 = j])$ est réalisé, alors la première boule noire apparait avant la seconde boule noire. Ceci est impossible.
  - × si $i > j$, alors l'événement $[X_1 = i] \cap [X_2 = j]$ est réalisé si et seulement si la première boule noire est obtenue au $i^{\text{ème}}$ tirage et la seconde boule noire au $j^{\text{ème}}$ tirage.

    Un N-tirage réalisant l'événement $[X_1 = i] \cap [X_2 = j]$ est donc entièrement déterminé par :

    - le numéro de la boule noire en $i^{\text{ème}}$ position : $\binom{2}{1} = 2$ possibilités.
    - le numéro de la boule noire en $j^{\text{ème}}$ position parmi les boules noires restantes : $\binom{1}{1} = 1$ possibilité.
    - les positions des $N-2$ boules blanches dans les $N-2$ positions restantes : $(N-2)!$ possibilités.

    Ainsi le nombre de N-tirages réalisant l'événement $[X_1 = i] \cap [X_2 = j]$ est $2\,(N-2)!$.

    On en déduit :

    $$\mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \frac{\text{Card}([X_1 = i] \cap [X_2 = j])}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2\ (N-2)!}{N!} = \frac{2}{N\,(N-1)}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall (i, j) \in [\![1, N]\!]^2,\ \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leqslant i < j \leqslant N \end{cases}}$$

Commentaire

Pour le cas $i < j$, on peut également utiliser la formule des probabilités composées.
On détaille ci-dessous la manière de procéder.

- Tout d'abord :

  $$[X_1 = i] \cap [X_2 = j] = B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1} \cap N_i \cap B_{i+1} \cap \ldots \cap B_{j-1} \cap N_j \cap B_{j+1} \cap \ldots \cap B_N$$

- De plus : $\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1} \cap N_i \cap B_{i+1} \cap \ldots \cap B_{j-1} \cap N_j \cap B_{j+1} \cap \ldots \cap B_{N-1}) \neq 0$.

  Ainsi, par formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) \\ = \; & \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(N_i) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{j-1}}(N_j) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{N-1}}(B_N) \\ = \; & \frac{N-2}{N} \times \frac{N-3}{N-1} \times \ldots \times \frac{2}{N-(i-1)} \times \ldots \times \frac{1}{N-(j-1)} \times \ldots \times \frac{1}{N-(N-1)} \\ = \; & \frac{(N-2)! \times 2 \times 1}{N!} \; = \; \frac{2}{N(N-1)} \end{aligned}$$

□

4. Déterminer les lois de probabilité des variables X_1 et X_2. Ces variables sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

- Déterminons tout d'abord $X_1(\Omega)$ et $X_2(\Omega)$.
  - On remarque : $X_1(\Omega) = [\![1, N-1]\!]$.
    En effet, comme il y a deux boules noires dans l'urne, la première apparaît au pire lors du $(N-1)^{\text{ème}}$ tirage et peut apparaître lors de tout autre tirage.
  - De plus : $X_2(\Omega) = [\![2, N]\!]$.
    En effet, comme il y a deux boules noires dans l'urne, la seconde apparaît au mieux lors du $2^{\text{ème}}$ tirage et peut apparaître lors de tout autre tirage.
- Soit $i \in [\![1, N-1]\!]$.
  La famille $\big([X_2 = j] \big)_{j \in [\![2,N]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_1 = i]) &= \sum_{j=2}^{N} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) \\
&= \cancel{\sum_{\substack{j=2 \\ j \leqslant i}}^{N} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j])} + \sum_{\substack{j=2 \\ j > i}}^{N} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) \\
&= \sum_{j=i+1}^{N} \frac{2}{N(N-1)} \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \frac{2\,(N-(i+1)+1)}{N(N-1)} \;=\; 2\,\frac{N-i}{N(N-1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} X_1(\Omega) = [\![1, N-1]\!] \\ \forall i \in [\![1, N-1]\!],\ \mathbb{P}([X_1 = i]) = 2\,\dfrac{N-i}{N(N-1)}. \end{array}}$$

Commentaire

On note que le découpage de la somme dans la deuxième égalité est aussi valable pour $i = 1$. En effet, dans ce cas, la première somme est nulle car on somme sur un ensemble vide d'indices.

- Soit $j \in [\![2, N]\!]$.
  La famille $\big([X_1 = i] \big)_{i \in [\![1,N-1]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_2 = j]) &= \sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) \\
&= \cancel{\sum_{\substack{i=1 \\ i \geqslant j}}^{N-1} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j])} + \sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^{N-1} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{N(N-1)} \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= 2\,\frac{j-1}{N(N-1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} X_2(\Omega) = [\![2, N]\!] \\ \forall j \in [\![2, N]\!],\ \mathbb{P}([X_2 = j]) = 2\,\dfrac{j-1}{N(N-1)}. \end{array}}$$

Commentaire

On note que le découpage de la somme dans la deuxième égalité est aussi valable pour $j = N$. En effet, dans ce cas, la deuxième somme est nulle car on somme sur un ensemble vide d'indices.

- Démontrons que les v.a.r. X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.
  - × Tout d'abord :
  $$[X_1 = 2] \cap [X_2 = 2] \; = \; \varnothing$$
  En effet, l'événement $[X_1 = 2] \cap [X_2 = 2]$ est réalisé si et seulement la première et la seconde boule noire sont tirées simultanément au $2^{\text{ème}}$ tirage. Ceci est impossible car on tire les boules dans l'urne une par une.
  On en déduit :
  $$\mathbb{P}([X_1 = 2] \cap [X_2 = 2]) \; = \; \mathbb{P}(\varnothing) \; = \; 0$$
  - × De plus :
    - d'une part : $\mathbb{P}([X_1 = 2]) = 2\,\dfrac{N-2}{N(N-1)} \neq 0$,
    - d'autre part : $\mathbb{P}([X_2 = 2]) = 2\,\dfrac{2-1}{N(N-1)} \neq 0$

  On en déduit :
  $$\mathbb{P}([X_1 = 2] \cap [X_2 = 2]) \; \neq \; \mathbb{P}([X_1 = 2]) \times \mathbb{P}([X_2 = 2])$$

  $\boxed{\text{Ainsi, les v.a.r. } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

Commentaire

En toute rigueur, cette démonstration est fausse. Elle repose sur le fait que $2 \in X_1(\Omega)$ et $2 \in X_2(\Omega)$. Or si $N = 2$ (ce qui n'est pas exclu par l'énoncé), $2 \notin X_1(\Omega)$. Dans ce cas, X_1 est la v.a.r. certaine égale à 1 et X_2 est la v.a.r. certaine égale à 2.
Et X_1 et X_2 sont alors indépendantes.

□

5. a) Démontrer que la variable $N + 1 - X_2$ a même loi que X_1.

Démonstration.
Notons $Z = N + 1 - X_2$.

- Commençons par déterminer $Z(\Omega)$.
  Notons $h : x \mapsto N + 1 - x$, de telle sorte que : $Z = h(X)$.
  On rappelle : $X_2(\Omega) = [\![2, N]\!]$. On en déduit :
  $$Z(\Omega) \; = \; \big(h(X_2)\big)(\Omega) \; = \; h\big(X_2(\Omega)\big) \; = \; h([\![2, N]\!]) \; \subset \; [\![1, N-1]\!]$$
  En effet, soit $k \in [\![2, N]\!]$:
  - × $h(k) = N + 1 - k \in \mathbb{Z}$,
  - × de plus :
  $$\begin{array}{ll} \text{comme} & 2 \leqslant k \leqslant N \\ \text{alors} & -2 \geqslant -k \geqslant -N \\ \text{donc} & N-1 \geqslant N+1-k \geqslant 1 \\ \text{d'où} & N-1 \geqslant h(k) \geqslant 1 \end{array}$$

  $\boxed{\text{Et ainsi : } Z(\Omega) \subset [\![1, N-1]\!].}$

- Soit $i \in [\![1, N-1]\!]$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z = i]) & = & \mathbb{P}([N+1-X_2 = i]) & \\ & = & \mathbb{P}([X_2 = N+1-i]) & \\ & = & 2 \, \dfrac{(N+\cancel{1}-i)-\cancel{1}}{N\,(N-1)} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{3.}}\textit{, car } N+1-i \in [\![2,N]\!] \quad (*)) \\ & = & 2 \, \dfrac{N-i}{N\,(N-1)} & \end{array}$$

Détaillons l'assertion $(*)$.

$$\begin{array}{ll} \text{Comme} & 1 \leqslant i \leqslant N-1 \\ \text{alors} & -1 \geqslant -i \geqslant -(N-1) \\ \text{donc} & N \geqslant N+1-i \geqslant 2 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall i \in [\![1, N-1]\!], \, \mathbb{P}([Z = i]) = 2 \, \dfrac{N-i}{N\,(N-1)}}$$

- Finalement, on obtient :
  × $Z(\Omega) \subset X_1(\Omega)$,
  × $\forall i \in [\![1, N-1]\!]$, $\mathbb{P}([Z = i]) = \mathbb{P}([X_1 = i])$

$$\boxed{\text{On en déduit que les v.a.r. } Z = N+1-X_2 \text{ et } X_1 \text{ ont même loi.}}$$

□

b) Déterminer la loi de la variable $X_2 - X_1$ et la comparer à celle de X_1.

Démonstration.

- Comme la v.a.r. X_1 correspond au rang de la première boule noire et la v.a.r. X_2 correspond à celui de la seconde, l'écart entre les deux est au minimum de 1 et au maximum de $(N-1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } (X_2 - X_1)(\Omega) \subset [\![1, N-1]\!].}$$

- Soit $k \in [\![1, N-1]\!]$.
La famille $([X_1 = i])_{i \in [\![1,N-1]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_2 - X_1 = k]) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 - X_1 = k]) & \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = k+i]) & \\ & = & \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ k+i \in X_2(\Omega)}}^{N-1} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = k+i]) & \\ & & + \cancel{\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ k+i \notin X_2(\Omega)}}^{N-1} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = k+i])} & \textit{(car } [X_2 = k+i] = \varnothing \textit{ si } k+i \notin X_2(\Omega)\textit{)} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{N-k} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = k+i]) & \end{array}$$

La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} k+i \in X_2(\Omega) = [\![2, N]\!] \\ i \in [\![1, N-1]\!] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2 \leqslant k+i \leqslant N \\ 1 \leqslant i \leqslant N-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2-k \leqslant i \leqslant N-k \\ 1 \leqslant i \leqslant N-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ 1 \leqslant i \leqslant N-k\right.$$

Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_2 - X_1 = k]) & = & \sum\limits_{i=1}^{N-k} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = k+i]) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{N-k} \dfrac{2}{N\ (N-1)} & \textit{(d'après \textbf{2.}, car } k+i > i\textit{)} \\ & = & \dfrac{2\ (N-k)}{N\ (N-1)} & \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1, N-1]\!],\ \mathbb{P}([X_2 - X_1 = k]) = \frac{2\ (N-k)}{N\ (N-1)}}$$

- Finalement, on obtient :
  × $(X_2 - X_1)(\Omega) \subset X_1(\Omega)$,
  × $\forall k \in [\![1, N-1]\!],\ \mathbb{P}([X_2 - X_1 = k]) = \mathbb{P}([X_1 = k])$

$$\boxed{\text{On en déduit que les v.a.r. } X_2 - X_1 \text{ et } X_1 \text{ ont même loi.}}$$

□

6. À l'aide des résultats de la question ***5*** :

a) Calculer les espérances $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, les v.a.r. X_1 et X_2 admettent une espérance en tant que v.a.r. finies.
- De plus, d'après les questions ***4.a)*** et ***4.b)*** :

$$\left\{\begin{array}{l} N+1-X_2 \text{ et } X_1 \text{ ont même loi} \\ X_2 - X_1 \text{ et } X_1 \text{ ont même loi} \end{array}\right.$$

On en déduit que les v.a.r. $N+1-X_2$ et $X_2 - X_1$ admettent aussi une espérance et :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(N+1-X_2) \\ \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2 - X_1) \end{array}\right.$$

De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(N+1-X_2) = \mathbb{E}(N+1) - \mathbb{E}(X_2) = N+1-\mathbb{E}(X_2) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X_2 - X_1) = \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(X_1)$$

Ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{E}(X_1) = N+1-\mathbb{E}(X_2) \\ \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(X_1) \end{array}\right.$$

- On obtient alors un système linéaire de deux équations à deux inconnues ($\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \mathbb{E}(X_1) & + & \mathbb{E}(X_2) & = & N+1 \\ 2\,\mathbb{E}(X_1) & - & \mathbb{E}(X_2) & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} \mathbb{E}(X_1) & + & \mathbb{E}(X_2) & = & N+1 \\ & - & 3\,\mathbb{E}(X_2) & = & -2\,(N+1) \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} 3\,\mathbb{E}(X_1) & & & = & N+1 \\ & - & 3\,\mathbb{E}(X_2) & = & -2\,(N+1) \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{E}(X_1) = \frac{N+1}{3} \text{ et } \mathbb{E}(X_2) = 2\,\frac{N+1}{3}.}$$

☐

b) Montrer l'égalité des variances $\mathbb{V}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_2)$.

Démonstration.

- Les v.a.r. X_1 et X_2 admettent une variance en tant que v.a.r. finies.
- D'après la question ***4.a)***, les v.a.r. $N+1-X_2$ et X_1 ont même loi. On en déduit que $N+1-X_2$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(X_1) \ = \ \mathbb{V}(N+1-X_2) \ = \ (-1)^2\,\mathbb{V}(X_2) \ = \ \mathbb{V}(X_2)$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1) \ = \ \mathbb{V}(X_2)}$$

☐

c) **Seulement pour les cubes** : Établir la relation : $2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{V}(X_1)$ (où $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ désigne la covariance des variables X_1 et X_2).

Démonstration.

- Tout d'abord, comme les v.a.r. X_1 et X_2 admettent une variance, alors $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ est bien définie.
- D'après la question ***4.b)***, les v.a.r. $X_2 - X_1$ et X_1 ont même loi. On en déduit que $X_2 - X_1$ admet une variance et :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(X_1) & = & \mathbb{V}(X_2 - X_1) & \\ & = & \mathbb{V}(X_2) + 2\ \mathrm{Cov}(X_2, -X_1) + \mathbb{V}(-X_1) & \\ & = & \mathbb{V}(X_2) - 2\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) + \mathbb{V}(X_1) & \textit{(par linéarité à droite de la covariance)} \\ & = & 2\ \mathbb{V}(X_1) - 2\ \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

On obtient : $\mathbb{V}(X_1) \ = \ 2\ \mathbb{V}(X_1) - 2\ \mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{V}(X_1) \ = \ 2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2).}$$

☐

7. **<u>Seulement pour les cubes</u>** : Calculer $\mathbb{V}(X_1)$. En déduire $\mathbb{V}(X_2)$ et $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

Démonstration.

- Déterminons d'abord $\mathbb{E}(X_1^2)$. Par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1^2) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \, \mathbb{P}([X = x]) \;=\; \sum_{i=1}^{N-1} i^2 \, \mathbb{P}([X = i]) \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} i^2 \, \frac{2\,(N-i)}{N(N-1)} \;=\; \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} i^2 \, (N-i) \\
&= \frac{2}{N(N-1)} \left(N \sum_{i=1}^{N-1} i^2 - \sum_{i=1}^{N-1} i^3 \right) \\
&= \frac{2}{N(N-1)} \left(N \, \frac{(N-1)\; N\, \big(2(N-1)+1\big)}{6} - \frac{(N-1)^2 \; N^2}{4} \right) \\
&= \frac{2}{N(N-1)} \left(\frac{N^2\,(N-1)\,(2N-1)}{6} - \frac{(N-1)^2 \; N^2}{4} \right) \\
&= \frac{2}{\cancel{N}\cancel{(N-1)}} \, \frac{N^{\cancel{2}}\,\cancel{(N-1)}}{12} \, (2\,(2N-1) - 3\,(N-1)) \\
&= \frac{N}{6} \, (4N - 2 - 3N + 3) \;=\; \frac{N(N+1)}{6}
\end{aligned}$$

- Par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_1) &= \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2 \;=\; \frac{N(N+1)}{6} - \left(\frac{N+1}{3}\right)^2 \\
&= \frac{N(N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{9} \\
&= \frac{N+1}{18} \, (3N - 2\,(N+1)) \\
&= \frac{(N+1)(N-1)}{18}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1) = \frac{(N+1)(N-1)}{18}}$$

- Or, d'après la question ***6.b)*** : $\mathbb{V}(X_2) = \mathbb{V}(X_1)$.
  D'après la question précédente : $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \dfrac{1}{2} \, \mathbb{V}(X_1)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{V}(X_2) = \frac{(N+1)(N-1)}{18} \text{ et } \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{(N+1)(N-1)}{36}}$$

□

Partie II

On suppose que A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, N\}$ et on désigne par D l'événement : « A ne prend pas la même valeur que B ».

8. Montrer que la probabilité de l'événement D est $\dfrac{N-1}{N}$.

Démonstration.

- Remarquons d'abord : $D = [A \neq B]$. On en déduit :

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}([A \neq B]) = 1 - \mathbb{P}(\overline{[A \neq B]}) = 1 - \mathbb{P}([A = B])$$

Commentaire

Il est pertinent ici de penser à utiliser l'événement contraire, puisque l'événement D est défini par une propriété exprimée négativement.

- La famille $([B = j])_{j \in [\![1,N]\!]}$ forme un système complet d'événements, car $B \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])$.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([A = B]) &= \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}([A = B] \cap [B = j]) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}([A = j] \cap [B = j]) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}([A = j]) \times \mathbb{P}([B = j]) && \textit{(car A et B sont indépendantes)} \\
&= \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N}\,\frac{1}{N} && \textit{(car } A \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!]) \textit{ et } B \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])\textit{)} \\
&= \frac{N}{N^2} = \frac{1}{N}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}([A = B]) = 1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}}$$

□

9. Soit Y_1 et Y_2 les variables aléatoires définies par : $\left\{\begin{array}{l} Y_1 = \min(A, B) \\ Y_2 = \max(A, B) \end{array}\right.$

Calculer, pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, 2, \dots, N\}$, la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j])$$

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question précédente : $\mathbb{P}(D) = \dfrac{N-1}{N} \neq 0$. Ainsi la probabilité $\mathbb{P}_D$ est bien définie.

- Soit $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$.
Si l'événement D est réalisé, alors les v.a.r. A et B prennent des valeurs distinctes.
Dans ce cas, l'événement $[Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]$ est réalisé si et seulement si le minimum de la valeur prise par la v.a.r. A et la valeur prise par la v.a.r. B est i, et le maximum de la valeur prise par A et la valeur prise par B est j.
Trois cas se présentent alors.
  × Si $i > j$, alors :
$$[Y_1 = i] \cap [Y_2 = j] \; = \; \varnothing$$
En effet, le minimum des valeurs prises par A et B ne peut être strictement plus grand que le maximum des valeurs prises par A et B.
$$\boxed{\text{Ainsi, si } i > j \text{, alors : } \mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) = 0.}$$
  × Si $i = j$, alors :
$$[Y_1 = i] \cap [Y_2 = j] \; = \; [\min(A,B) = i] \cap [\max(A,B) = i] \; = \; [A = i] \cap [B = i]$$
Ainsi :
$$D \cap \big(\, [Y_1 = i] \cap [Y_2 = j] \,\big) \; = \; [A \neq B] \cap \big(\, [A = i] \cap [B = i] \,\big) \; = \; \varnothing$$
On en déduit :
$$\mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) \; = \; \frac{\mathbb{P}\Big(D \cap \big(\, [Y_1 = i] \cap [Y_2 = j] \,\big)\Big)}{\mathbb{P}(D)} \; = \; \frac{\mathbb{P}(\varnothing)}{\mathbb{P}(D)} \; = \; 0$$
$$\boxed{\text{Finalement, si } i = j : \mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = i]) = 0}$$
  × Si $i < j$, alors, comme $i \neq j$:
$$D \cap \big(\, [Y_1 = i] \cap [Y_2 = j] \,\big) \; = \; [Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]$$
De plus :
$$[Y_1 = i] \cap [Y_2 = j] \; = \; \big(\, [A = i] \cap [B = j] \,\big) \cup \big(\, [A = j] \cap [B = i] \,\big)$$
Les deux événements de cette union sont incompatibles. On en déduit :
$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) \\
= \; & \mathbb{P}_D([A = i] \cap [B = j]) + \mathbb{P}_D([A = j] \cap [B = i]) \\
= \; & \frac{\mathbb{P}(D \cap [A = i] \cap [B = j])}{\mathbb{P}(D)} + \frac{\mathbb{P}(D \cap [A = j] \cap [B = i])}{\mathbb{P}(D)} \\
= \; & \frac{\mathbb{P}([A = i] \cap [B = j])}{\mathbb{P}(D)} + \frac{\mathbb{P}([A = j] \cap [B = i])}{\mathbb{P}(D)} \\
= \; & \frac{1}{\mathbb{P}(D)} \left(\mathbb{P}([A = i]) \times \mathbb{P}([B = j]) + \mathbb{P}([A = j]) \times \mathbb{P}([B = i])\right) && \textit{(car A et B sont indépendantes)} \\
= \; & \frac{N}{N-1} \left(\frac{1}{N} \times \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \times \frac{1}{N} \right) && \textit{(car } A \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,N]\!]) \textit{ et } B \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,N]\!])\textit{)} \\
= \; & \frac{\cancel{N}}{N-1} \, \frac{2}{N^{\cancel{2}}} \; = \; \frac{2}{N\,(N-1)}
\end{aligned}$$
$$\boxed{\text{Ainsi, si } i < j : \mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) = \frac{2}{N\,(N-1)}}$$
□

Problème (HEC 2000)

Ce problème se compose de deux parties. Si le candidat ne parvient pas à établir un résultat demandé, il l'indiquera clairement, et il pourra pour la suite admettre ce résultat.
Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n.
On tire une boule au hasard dans U_n. On note k le numéro de cette boule.

- Si k est égal à 1, on arrête les tirages.
- Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.

On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1. On note Y_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules tirées.
On note $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$ (respectivement $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$) l'espérance et la variance de X_n (respectivement Y_n).

Dans tout le problème, $\mathbb{P}_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B, où B est un événement non négligeable.

Partie I

1. On pose : $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Commentaire

Rigoureusement, il aurait été préférable d'écrire « pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit h_n par $h_n = \ldots$ ». Tel qu'écrit ici, il semble que h_n ne soit défini que pour la valeur entière $n \in \mathbb{N}^*$ fixée initialement dans l'énoncé. Il aurait sûrement été préférable d'introduire le contexte aléatoire (description de l'expérience et des v.a.r.) seulement après la **Partie I**.

a) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, les inégalités :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [k, k+1]$. Alors :

$$k \leqslant x \leqslant k+1$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{k+1} \quad \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx}_{=\frac{1}{k}} \geqslant \underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx}_{=[\ \ln(x)\ ]_k^{k+1}} \geqslant \underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx}_{=\frac{1}{k+1}}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.}$$

□

b) En déduire les inégalités : $\ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

Commentaire

La remarque précédente s'applique ici. On comprend à la lecture du terme « les inégalités » qu'il y a ici une quantification cachée. Il aurait été préférable d'écrire « Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n)$ ». S'il est étonnant de laisser une telle ambiguïté dans un énoncé de concours, il n'y a d'autre choix que d'en faire son parti et de se résigner à accepter cette présentation. C'est pourquoi on ne fera plus la remarque dans les questions suivantes même si on s'efforcera de faire apparaître les quantifications en conclusion de chaque question.

Démonstration.

- D'après ce qui précède :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme les encadrements précédents pour k variant de 1 à n ($n \geqslant 1$).

$$\begin{array}{lcccccl}
 & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} & \\
\text{donc} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} & \leqslant & \ln(n+1) - \cancel{\ln(1)} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} & \textit{(par sommation télescopique)} \\
\text{d'où} & \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} & \leqslant & \ln(n+1) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
\text{enfin} & h_{n+1} - 1 & \leqslant & \ln(n+1) & \leqslant & h_n & \textit{(par définition de } h_n\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On a donc démontré : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ h_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant h_n.}$$

  En particulier, l'inégalité de gauche de l'énoncé est démontrée.
  Il reste à déterminer l'inégalité de droite.

- D'après ce qui précède : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $h_{m+1} \leqslant 1 + \ln(m+1)$.
  Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, en considérant ces inégalités en $m = n-1 \geqslant 1$, on obtient :

$$h_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \ h_n \leqslant 1 + \ln(n)}$$

- Remarquons enfin :
  × $h_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} = 1$,
  × $1 + \ln(1) = 1$.

  On a donc bien : $h_1 \leqslant 1 + \ln(1)$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n).}$$

□

Commentaire

- Les questions ***1.a)*** et ***1.b)*** sont une illustration d'une méthodologie classique connue sous le nom de comparaison série-intégrale.
- L'énoncé demande de démontrer l'inégalité à partir du rang 1, ce qui n'est pas très commode (le cas $n = 1$ doit être traité à part). Ce cas n'est pas d'un grand intérêt pour la suite de l'énoncé et notamment pour la question suivante qui vise à établir un équivalent de la suite (h_n) (on peut alors choisir n dans n'importe quel voisinage de $+\infty$).

c) Déterminer un équivalent simple de h_n quand n tend vers l'infini.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- En multipliant membre à membre par $\dfrac{1}{\ln(n)} > 0$ l'inégalité obtenue en question précédente, on obtient :
$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{h_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)} + 1$$
- Or :
  × $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$
  × $\dfrac{1}{\ln(n)} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

  Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{h_n}{\ln(n)} = 1.$

$$\boxed{\text{Autrement dit : } h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

Commentaire

- On prend garde de choisir initialement un entier $n \geqslant 2$ afin que la quantité $\dfrac{1}{\ln(n)}$ soit bien définie (c'est-à-dire tel que $\ln(n) \neq 0$).
- La propriété : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ est classique. Ce premier résultat est parfois complété par une étude permettant d'obtenir le début du développement asymptotique de la série harmonique. Plus précisément, on obtient :
$$h_n = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$
où γ ($\simeq 0,577$), appelée constante d'Euler est la limite de la suite $\big(h_n - \ln(n)\big)$.
La démonstration la plus usuelle fait intervenir des suites adjacentes et est donc tout à fait adaptée au programme ECE.

$\square$

2. On pose : $k_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

a) Montrer, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, l'inégalité :

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Démonstration.
Soit $k \geqslant 2$.

- Tout d'abord :
$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k\,(k-1)} = \frac{1}{k\,(k-1)}$$
- D'autre part, comme : $k \geqslant (k-1)$, alors : $k^2 \geqslant k\,(k-1)$.
Ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, on obtient :
$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k\,(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 2,\ \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}$$

□

b) En déduire la majoration : $k_n \leqslant 2$.

Démonstration.

- D'après ce qui précède :
$$\forall k \geqslant 2,\ \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme les inégalités précédentes pour k variant de 2 à n.

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

donc $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{1} - \frac{1}{n}$$ *(par sommation télescopique)*

puis $$1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$ *(en ajoutant 1 de part et d'autre)*

enfin $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ k_n \leqslant 2.}$$

□

c) Déterminer un équivalent simple de $h_n - k_n$ quand n tend vers l'infini.

Démonstration.

- D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $-2 \leqslant -k_n \leqslant 0$. On en déduit :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n - 2 \ \leqslant\ h_n - k_n \ \leqslant\ h_n$$
On obtient alors, pour tout $n \geqslant 2$, par multiplication par $\dfrac{1}{\ln(n)} > 0$:
$$\frac{h_n}{\ln(n)} - \frac{2}{\ln(n)} \ \leqslant\ \frac{h_n - k_n}{\ln(n)} \ \leqslant\ \frac{h_n}{\ln(n)}$$
- Or :
  × $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{h_n}{\ln(n)} = 1$ car $h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
  × $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{h_n}{\ln(n)} - \frac{2}{\ln(n)} = 1 - 0 = 1$.

  Ainsi, par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{h_n - k_n}{\ln(n)} = 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } h_n - k_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

Commentaire

- En question ***2.***, on démontre que la suite (k_n) est négligeable devant (h_n). En effet :
$$\frac{k_n}{h_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k_n}{\ln(n)} = \frac{h_n}{\ln(n)} - \frac{h_n - k_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - 1 = 0$$
- Pour aboutir à ce résultat, la question ***2.*** passe par trois étapes. Ce résultat peut se démontrer de manière plus directe. Notons tout d'abord que la suite (k_n) est la suite des sommes partielles associée à la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$. Cette série est convergente en tant que série de Riemann d'exposant $2 > 1$. On en déduit que la suite (k_n) est convergent. Ainsi :
$$\frac{k_n}{h_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
en tant que quotient du terme général d'une suite de limite finie par celui d'une suite de limite infinie.

□

Partie II. Étude de la variable aléatoire X_n

On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

3. a) Quelle est la loi de I_n ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en un choix effectué de manière équiprobable parmi n issues (en l'occurrence les boules de l'urne) numérotées de 1 à n.
- La v.a.r. I_n prend la valeur du numéro obtenu lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } I_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket).}$$

□

b) Quelle est la loi conditionnelle de X_n sachant $[I_n = 1]$?

Démonstration.
Si $[I_n = 1]$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu la boule numérotée 1 lors du premier tirage (ce qui met fin à l'expérience). La v.a.r. X_n prend alors la valeur 1. On a ainsi :

$$\mathbb{P}_{[I_n=1]}\big([X_n = 1]\big) \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{La loi conditionnelle de } X_n \text{ sachant } [I_n = 1] \text{ est la loi certaine égale à 1.}}$$

□

c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{2, \dots, n\}\,,\ \mathbb{P}_{[I_n=k]}([X_n = j]) = \mathbb{P}([X_{k-1} = j - 1])$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$, soit $j \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![2, n]\!]$.
Si $[I_n = k]$ est réalisé, c'est que le premier tirage a fourni la boule numéroté k. On retire alors de l'urne les boules numérotées de k à n.
L'urne contient alors seulement les boules portant les numéros 1 à k.
Dans ce cas, l'événement $[X_n = j]$ est réalisé si et seulement si la boule numéro 1 est obtenue lors du $(j - 1)^{\text{ème}}$ tirage suivant. L'urne contenant les boules numérotées de 1 à $k - 1$, on en déduit que l'événement $[X_n = j]$ est réalisé si et seulement si $[X_{k-1} = j - 1]$ l'est.

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \forall n \geqslant 2,\ \forall j \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![2, n]\!],\ \mathbb{P}_{[I_n=k]}([X_n = j]) = \mathbb{P}([X_{k-1} = j - 1]).}$$

□

4. a) Quelle est la loi de X_1 ?

Démonstration.

- La v.a.r. X_1 prend la valeur du nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numérotée 1 dans une urne qui contient une seule boule (numérotée 1).
- Ainsi, X_1 est la v.a.r. certaine égale à 1.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X_1 \text{ suit la loi certaine égale à 1.}}$$

Commentaire

- Il est vivement conseillé de lire très précisément l'énoncé et de bien comprendre les relations de dépendance entre les différents objets introduits. Ici, l'urne U_n est les v.a.r. X_n et I_n sont toutes dépendantes de l'entier n. Cette dépendance est marquée par la présence de n en indice. La v.a.r. X_n est donc égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1, **partant d'une urne contenant de boules numérotées de** $\mathbf{1}$ **à** n.
- En ce début de partie, on étudie X_n pour les faibles valeurs de n. C'est souvent le cas : les débuts de partie commencent par des questions simples. Il est donc conseillé de ne jamais sauter une partie sans avoir attentivement lu les questions qui la débutent. C'est souvent l'occasion de prendre des points facilement et cela permet généralement de se lancer pour le reste de l'exercice.

□

b) Quel est l'événement $[X_2 = 1]$? Donner la loi de X_2, son espérance et sa variance.

Démonstration.

- L'événement $[X_2 = 1]$ est réalisé si et seulement si la boule numéro 1 est apparue dès le premier tirage, l'expérience s'effectuant dans une urne contenant initialement 2 boules.

$$\boxed{\text{Ainsi : } [X_2 = 1] = [I_2 = 1].}$$

- On a alors :

$$\mathbb{P}\big([X_2 = 1]\big) = \mathbb{P}\big([I_2 = 1]\big) = \frac{1}{2} \qquad \textit{(car } I_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 2 \rrbracket)\textit{)}$$

- D'autre part : $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
  En effet, dans une urne qui ne contient que les boules 1 et 2, la boule numéro 1 est tirée soit lors du 1^{er} tirage, soit lors du $2^{\text{ème}}$.
  On en déduit que la famille $\big([X_2 = 1], [X_2 = 2]\big)$ est un système complet d'événements et :

$$\mathbb{P}\big([X_2 = 2]\big) = 1 - \mathbb{P}\big([X_2 = 1]\big) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 2 \rrbracket).}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que } X_2 \text{ admet une espérance et une variance.}\\ \text{De plus : } \mathbb{E}(X_2) = \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_2) = \dfrac{2^2 - 1}{12} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}.\end{array}}$$

□

c) Calculer $\mathbb{P}_{[I_3=1]}([X_3 = 2])$, $\mathbb{P}_{[I_3=2]}([X_3 = 2])$, $\mathbb{P}_{[I_3=3]}([X_3 = 2])$.
Déterminer la loi de X_3, son espérance et sa variance.

Démonstration.

- Si l'événement $[I_3 = 1]$ est réalisé, c'est que l'on a obtenu la boule numérotée 1 lors du 1^{er} tirage. Dans ce cas, X_3 prend la valeur 1.

$$\boxed{\mathbb{P}_{[I_3=1]}([X_3 = 2]) = 0}$$

- Si l'événement $[I_3 = 2]$ est réalisé, c'est que l'on a obtenu la boule numérotée 2 lors du 1^{er} tirage. Dans ce cas, les boules 2 et 3 sont retirées de l'urne qui ne contient plus que la boule numéro 1. Cette boule est donc nécessairement lors du tirage qui suit. L'événement $[X_3 = 2]$ est donc réalisé.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}_{[I_3=2]}([X_3 = 2]) = 1.}$$

- Si l'événement $[I_3 = 3]$ est réalisé, c'est que l'on a obtenu la boule numérotée 3 lors du 1^{er} tirage. Dans ce cas, la boule 3 est retirée de l'urne qui ne contient plus que les boules numéro 1 et 2. L'événement $[X_3 = 2]$ est alors réalisé si et seulement si la boule numéro 1 est obtenue par tirage dans cette urne.

$$\boxed{\text{Par équiprobabilité, on en déduit : } \mathbb{P}_{[I_3=3]}([X_3 = 2]) = \frac{1}{2}.}$$

- D'après la question ***3.a)***, $I_3(\Omega) = [\![1,3]\!]$.
  La famille $\big([I_3=1]\,,[I_3=2]\,,[I_3=3]\big)$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_3=2]\big) &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}\big([I_3=i]\cap[X_3=2]\big) \\
&= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}\big([I_3=i]\big)\times \mathbb{P}_{[I_3=i]}\big([X_3=2]\big) && \textit{(car pour tout } i\in[\![1,3]\!], \ \mathbb{P}\big([I_3=i]\big)\neq 0\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3}\times \mathbb{P}_{[I_3=i]}\big([X_3=2]\big) && \textit{(car } I_3 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,3]\!])\textit{)} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}_{[I_3=i]}\big([X_3=2]\big) \\
&= \frac{1}{3}\left(0+1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\cancel{3}}\,\frac{\cancel{3}}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}\big([X_3=2]\big)=\frac{1}{2}.}$$

- Par ailleurs, on démontre comme en question ***4.b)*** :

$$[X_3=1] \ = \ [I_3=1]$$

  Et ainsi :

$$\mathbb{P}\big([X_3=1]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([I_3=1]\big) \ = \ \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_3=1]\big) \ = \ \frac{1}{3}}$$

- Remarquons alors : $X_3(\Omega) = [\![1,3]\!]$.
  En effet, dans une urne contenant initialement les boules numéro 1, 2 et 3, la boule numéro 1 peut être tirée lors du 1^{er}, $2^{\text{ème}}$ ou $3^{\text{ème}}$ tirage (c'est le cas si on obtient d'abord la boule 3, puis la 2, puis la 1).
  On en déduit que la famille $\big([I_3=1]\,,[I_3=2]\,,[I_3=3]\big)$ est un système complet d'événements.
  Ainsi :

$$\mathbb{P}\big([X_3=3]\big) \ = \ 1-\mathbb{P}\big([X_3=1]\big)-\mathbb{P}\big([X_3=2]\big) \ = \ 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3} \ = \ \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_3=3]\big) \ = \ \frac{1}{6}}$$

- La v.a.r. X_3 est finie. Elle admet donc une espérance et une variance. De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_3) &= \sum_{i=1}^{3} i\,\mathbb{P}\big([X_3=i]\big) \\
&= 1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{3}+1+\frac{1}{2} \ = \ \frac{11}{6}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_3)=\frac{11}{6}}$$

- Et, par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_3^2\right) &= \sum_{i=1}^{3} i^2\ \mathbb{P}\big(\,[X_3 = i]\,\big) \\
&= 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{3} + 2 + \frac{3}{2} \ = \ \frac{23}{6}
\end{aligned}$$

Enfin, par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X_3) \ = \ \mathbb{E}\left(X_3^2\right) - \left(\mathbb{E}(X_3)\right)^2 \ = \ \frac{23}{6} - \left(\frac{11}{6}\right)^2 \ = \ \frac{23 \times 6 - 11^2}{36} \ = \ \frac{138 - 121}{36} \ = \ \frac{17}{36}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_3) = \frac{17}{36}}$$

□

d) Déterminer la loi du couple (I_3, X_3).
Seulement pour les cubes : En déduire la covariance du couple (I_3, X_3).
Les variables aléatoires I_3 et X_3 sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

- D'après les questions précédentes : $I_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$ et $X_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.
- Soit $k \in [\![1, 3]\!]$ et soit $j \in [\![1, 3]\!]$.
  Plusieurs cas se présentent alors :
  × si $j = 1$,

	L'événément $[I_3 = k] \cap [X_3 = 1]$ est réalisé		
$\Leftrightarrow$	L'événément $[I_3 = k]$ est réalisé	et	l'événement $[X_3 = 1]$ est réalisé
$\Leftrightarrow$	La boule numéro k est obtenue au 1er tirage	et	la boule numéro 1 est obtenue au 1er tirage

Ainsi, si $k \neq 1$ alors : $[I_3 = k] \cap [X_3 = 1] = \varnothing$ et $\mathbb{P}\big(\,[I_3 = k] \cap [X_3 = 1]\,\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
Si $k = 1$ alors : $[I_3 = k] \cap [X_3 = 1] = [I_3 = 1] \cap [X_3 = 1] = [X_3 = 1]$ et :

$$\mathbb{P}\big(\,[I_3 = 1] \cap [X_3 = 1]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[X_3 = 1]\,\big) = \frac{1}{3}$$

× si $j = 3$, on a de même :

	L'événément $[I_3 = k] \cap [X_3 = 3]$ est réalisé		
$\Leftrightarrow$	La boule numéro k est obtenue au 1er tirage	et	la boule numéro 1 est obtenue au 3ème tirage

Or, étant donnée l'expérience, la boule numéro 1 n'est obtenue au 3ème tirage que si la boule 3 est obtenue au 1er tirage (et la boule 2 est obtenue au 2ème tirage).
Ainsi, si $k \neq 3$ alors : $[I_3 = k] \cap [X_3 = 3] = \varnothing$ et $\mathbb{P}\big(\,[I_3 = k] \cap [X_3 = 3]\,\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
Si $k = 3$ alors : $[I_3 = k] \cap [X_3 = 3] = [I_3 = 3] \cap [X_3 = 3] = [X_3 = 3]$ et :

$$\mathbb{P}\big(\,[I_3 = 3] \cap [X_3 = 3]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[X_3 = 3]\,\big) = \frac{1}{6}$$

× si $j = 2$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([I_3 = k] \cap [X_3 = j]\big) &= \mathbb{P}\big([I_3 = k]\big)\, \mathbb{P}_{[I_3=k]}\big([X_3 = j]\big) \\ &= \frac{1}{3}\, \mathbb{P}_{[I_3=k]}\big([X_3 = j]\big) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k = 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } k = 2 \\ \frac{1}{6} & \text{si } k = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

(d'après la question précédente)

- On peut résumer la loi du couple (I_3, X_3) par le tableau à double entrée suivant :

$k \in I_3(\Omega)$ \ $j \in X_3(\Omega)$	1	2	3
1	$\frac{1}{3}$	0	0
2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$

- Comme I_3 et X_3 sont des v.a.r. finies, la v.a.r. $I_3\, X_3$ admet une espérance.
De plus, d'après le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(I_3\, X_3\big) &= \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} k\, j\ \mathbb{P}\big([I_3 = k]\ \cap\ [X_3 = j]\big) \right) \\ &= (1 \times 1)\ \mathbb{P}\big([I_3 = 1] \cap [X_3 = 1]\big) \\ &\quad + (2 \times 2)\ \mathbb{P}\big([I_3 = 2] \cap [X_3 = 2]\big) \\ &\quad + (2 \times 3)\ \mathbb{P}\big([I_3 = 2] \cap [X_3 = 3]\big) \\ &\quad + (3 \times 3)\ \mathbb{P}\big([I_3 = 3] \cap [X_3 = 3]\big) \\ &= 1 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{3} + 6 \times \frac{1}{6} + 9 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{3} + 1 + \frac{9}{6} = \frac{10 + 6 + 9}{6} = \frac{25}{6}\end{aligned}$$

(car toutes les autres probabilités sont nulles)

On obtient alors, par définition :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(I_3, X_3) &= \mathbb{E}\big(I_3\, X_3\big) - \mathbb{E}(I_3) \times \mathbb{E}(X_3) \\ &= \frac{25}{6} - \frac{3+1}{2} \times \frac{11}{6} \\ &= \frac{25}{6} - \frac{22}{6} = \frac{3}{5} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

*(car $I_3 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 3 \rrbracket)$ et d'après la question **4.c)**)*

> Comme $\mathrm{Cov}(I_3, X_3) \neq 0$, on en conclut que les v.a.r. I_3 et X_3 ne sont pas indépendantes.

Commentaire

- Rappelons tout d'abord que si les v.a.r. X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2 alors on a :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad \text{Cov}(X, Y) = 0}$$

En particulier, on obtient, par contraposée, un résultat permettant de démontrer que deux v.a.r. X et Y ne sont pas indépendantes.

$$\boxed{\text{Cov}(X, Y) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

- Rappelons au passage que ce résultat `N'EST PAS` une équivalence.
Autrement dit, il existe des variables aléatoires X et Y :
  - × qui ne sont pas indépendantes,
  - × qui vérifient $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
- L'énoncé propose d'utiliser la propriété précédente pour conclure. Cependant, on aurait aussi pu démontrer la non indépendance en remarquant par exemple :

$$\underbrace{\mathbb{P}\big([I_3 = 1] \cap [X_3 = 3]\big)}_{=\,0} \;\neq\; \underbrace{\mathbb{P}\big([I_3 = 1]\big)}_{=\,\frac{1}{3}} \;\times\; \underbrace{\mathbb{P}\big([X_3 = 3]\big)}_{=\,\frac{1}{6}}$$

□

5. a) Montrer que X_n prend ses valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Démonstration.

- La v.a.r. prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la boule numéro 1 à l'issue de l'expérience effectuée dans l'urne U_n.
- L'urne contenant initialement n boules, on effectue au plus n tirages. La v.a.r. X_n prend pour valeur le rang d'apparition d'une boule, c'est-à-dire le numéro d'un tirage.

$$\boxed{\text{On en déduit que } X_n \text{ prend ses valeurs dans } [\![1, n]\!].}$$

□

Commentaire

- On demande de démontrer que X_n prend ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$.
Il s'agit donc de démontrer : $X_n(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$ et non pas : $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
Cette deuxième propriété peut se démontrer par récurrence.
On détaille ci-dessous la rédaction attendue.
- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
  - ▸ **Initialisation** :
  D'après la question ***4.a)*** : $X_1(\Omega) = \{1\}$.
  D'où $\mathcal{P}(1)$.
  - ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ ($X_{n+1}(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$).
  On condière l'urne U_{n+1}. Deux cas se présentent.
    - × si le premier tirage fournit la boule numéro 1 alors X_{n+1} prend la valeur 1.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \{1\} \subset X_{n+1}(\Omega).}$$

Commentaire

(suite de la remarque précédente)

× sinon, l'expérience se poursuit. En particulier, si le premier tirage a fourni la boule $n+1$, les tirages suivants sont effectués dans l'urne U_n qui contient les boules numérotées de 1 à n. Dans ce cas, X_{n+1} prend la valeur prise par X_n incrémentée de 1 (puisqu'un premier tirage a déjà eu lieu).
Or, par hypothèse de récurrence : $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } [\![2, n+1]\!] \subset X_{n+1}(\Omega).}$$

Finalement, on a démontré : $[\![1, n+1]\!] \subset X_{n+1}(\Omega)$.
Enfin : $X_{n+1}(\Omega) \subset [\![1, n+1]\!]$ car la v.a.r. X_{n+1} prend pour valeur le numéro d'un tirage (celui où la boule 1 apparaît) dans une expérience qui en compte au plus $n+1$.

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n).}$$

b) Déterminer $\mathbb{P}([X_n = 1])$ et $\mathbb{P}([X_n = n])$.

Démonstration.

- L'événement $[X_n = 1]$ est réalisé si et seulement si la boule numéro 1 est apparue lors du premier tirage lors de l'expérience réalisée dans l'urne U_n. Ainsi :

$$[X_n = 1] = [I_n = 1]$$

$$\boxed{\text{En particulier : } \mathbb{P}\big([X_n = 1]\big) = \mathbb{P}\big([I_n = 1]\big) = \frac{1}{n}.}$$

- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'événement « obtenir la boule numéro $n+1-i$ lors du $i^{\text{ème}}$ tirage (lors de l'expérience débutant dans l'urne U_n) ».
  L'événement $[X_n = n]$ est réalisé si et seulement si n tirages sont nécessaires pour obtenir la boule numéro 1. Cela se produit si et seulement si :
  × le 1^{er} tirage fournit la boule n. Ainsi, l'événement A_1 est réalisé.
  × le $2^{\text{ème}}$ tirage fournit la boule $n-1$. Ainsi, l'événement A_2 est réalisé.
  × ...
  × le $n^{\text{ème}}$ tirage fournit la boule 1 (ce qui met fin à l'expérience).
  Ainsi, l'événement A_n.
  On en déduit :

$$[X_n = n] = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

En particulier :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_n = n]\big) &= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) \\
&= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n) && \textit{(d'après la formule des probabilités composées et car : } \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0\textit{)} \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \ldots \times \frac{1}{1} = \frac{1}{n!} && (*)
\end{aligned}$$

- Il reste à démontrer : $\forall i \in [\![2,n]\!]$, $\mathbb{P}_{A_1\cap\ldots\cap A_{i-1}}\big(A_i\big) = \dfrac{1}{i}$.

  Soit $i \in [\![2,n]\!]$.

  Si l'événément $A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1}$ est réalisé, c'est que les boules n, $n-1$, $\ldots$, $n-(i-1)$ sont sorties successivement dans cet ordre. À l'issue de chacun de ces tirages, seul la boule tirée a été retirée de l'urne (car on a tiré à chacune de ces étapes le plus grand numéro de l'urne). Ainsi, avant de procéder au $i^{\text{ème}}$ tirage, l'urne est constituée des boules numérotées de 1 à i.

  Les boules étant tirée de manière équiprobable, on en conclut :

$$\mathbb{P}_{A_1\cap\ldots\cap A_{i-1}}\big(A_i\big) = \frac{1}{i}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien démontré : } \mathbb{P}\big(\,[X_n = n]\,\big) = \frac{1}{n!}.}$$

□

c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer la relation :

$$\forall j \geqslant 2,\ \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_k = j-1])$$

Démonstration.

Soit $n \geqslant 2$ et soit $j \geqslant 2$.

La famille $\big(\,[I_n = k]\,\big)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.

Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big(\,[X_n = j]\,\big) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\,[I_n = k] \cap [X_n = j]\,\big) & \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\,[I_n = k]\,\big) \times \mathbb{P}_{[I_n=k]}\big(\,[X_n = j]\,\big) & \\
 & = & \mathbb{P}\big(\,[I_n = 1]\,\big) \times \mathbb{P}_{[I_n=1]}\big(\,[X_n = j]\,\big) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}\big(\,[I_n = k]\,\big) \times \mathbb{P}_{[I_n=k]}\big(\,[X_n = j]\,\big) & \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}\big(\,[I_n = k]\,\big) \times \mathbb{P}_{[I_n=k]}\big(\,[X_n = j]\,\big) & \textit{(car d'après la } \textbf{\textit{3.b)}}\textit{, si } j \neq 1 \textit{ alors } \mathbb{P}_{[I_n=1]}\big(\,[X_n = j]\,\big) = 0\textit{)} \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}\big(\,[I_n = k]\,\big) \times \mathbb{P}\big(\,[X_{k-1} = j-1]\,\big) & \textit{(en utilisant la } \textbf{\textit{3.c)}} \textit{ avec } n \geqslant 2,\ j \geqslant 2 \textit{ et } k \geqslant 2\textit{)} \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\,[I_n = k+1]\,\big) \times \mathbb{P}\big(\,[X_k = j-1]\,\big) & \textit{(par décalage d'indice)} \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \times \mathbb{P}\big(\,[X_k = j-1]\,\big) & \textit{(car } I_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } \forall n \geqslant 2,\ \forall j \geqslant 2,\ \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_k = j-1]).}$$

□

d) Si n est supérieur ou égal à 3 et j supérieur ou égal à 2, calculer :

$$n\,\mathbb{P}([X_n = j]) - (n-1)\,\mathbb{P}([X_{n-1} = j])$$

En déduire, si n est un entier supérieur ou égal à 2 :

$$\forall j \geqslant 1,\ \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}([X_{n-1} = j]) + \frac{1}{n}\,\mathbb{P}([X_{n-1} = j-1])$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$ et soit $j \geqslant 2$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
& n\ \mathbb{P}\big(\,[X_n = j]\,\big) - (n-1)\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j]\,\big) \\
= \ & \cancel{n}\ \left(\frac{1}{\cancel{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\,[X_k = j-1]\,\big)\right) - \cancel{(n-1)}\ \left(\frac{1}{\cancel{n-1}} \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}\big(\,[X_k = j-1]\,\big)\right) \\
= \ & \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j-1]\,\big)
\end{aligned}$$

(d'après la question précédente avec $n-1 \geqslant 2$ et $j \geqslant 2$)

$$\boxed{\forall n \geqslant 3,\ \forall j \geqslant 2,\ \ n\ \mathbb{P}\big(\,[X_n = j]\,\big) - (n-1)\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j-1]\,\big)}$$

- On en déduit alors, pour les mêmes valeurs de n et j :

$$\begin{aligned}
n\ \mathbb{P}\big(\,[X_n = j]\,\big) &= (n-1)\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j]\,\big) + \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j-1]\,\big) \\
\text{et ainsi} \quad \mathbb{P}\big(\,[X_n = j]\,\big) &= \frac{n-1}{n}\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j]\,\big) + \frac{1}{n}\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j-1]\,\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 3,\ \forall j \geqslant 2,\ \ \mathbb{P}\big(\,[X_n = j]\,\big) = \frac{n-1}{n}\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j]\,\big) + \frac{1}{n}\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j-1]\,\big)}$$

Il reste alors à vérifier cette propriété lorsque $n = 2$ et pour j variant dans $\mathbb{N}^*$.

- Notons $n = 2$. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Remarquons tout d'abord :

$$\frac{n-1}{n}\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j]\,\big) + \frac{1}{n}\ \mathbb{P}\big(\,[X_{n-1} = j-1]\,\big) \ = \ \frac{1}{2}\ \mathbb{P}\big(\,[X_1 = j]\,\big) + \frac{1}{2}\ \mathbb{P}\big(\,[X_1 = j-1]\,\big)$$

Deux cas se présentent alors.

× Si $j \geqslant 3$, comme $X_1(\Omega) = \{1\}$ alors $[X_1 = j] = \varnothing$ et $[X_1 = j-1] = \varnothing$. Ainsi :

$$\frac{1}{2}\ \mathbb{P}\big(\,[X_1 = j]\,\big) + \frac{1}{2}\ \mathbb{P}\big(\,[X_1 = j-1]\,\big) \ = \ 0$$

De même, comme $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$, alors $[X_2 = j] = \varnothing$ et :

$$\mathbb{P}\big(\,[X_2 = j]\,\big) = 0$$

$$\boxed{\text{La propriété est vraie pour } n = 2 \text{ et } j \geqslant 3.}$$

× Si $j = 2$, comme $X_1(\Omega) = \{1\}$ alors $[X_1 = j] = \varnothing$ et $[X_1 = j-1] = [X_1 = 1] = \Omega$. Ainsi :

$$\frac{1}{2}\ \mathbb{P}\big(\,[X_1 = j]\,\big) + \frac{1}{2}\ \mathbb{P}\big(\,[X_1 = j-1]\,\big) \ = \ \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 \ = \ \frac{1}{2}$$

D'autre part, d'après la question ***4.b)*** :

$$\mathbb{P}\big(\,[X_2 = 2]\,\big) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{La propriété est vraie pour } n = 2 \text{ et } j = 2.}$$

× Si $j = 1$, comme $X_1(\Omega) = \{1\}$ alors $[X_1 = j] = [X_1 = 1] = \Omega$
et $[X_1 = j-1] = [X_1 = 0] = \varnothing$. Ainsi :

$$\frac{1}{2}\,\mathbb{P}\big([X_1 = j]\big) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}\big([X_1 = j-1]\big) \;=\; \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 0 \;=\; \frac{1}{2}$$

D'autre part, d'après la question ***4.b)*** :

$$\mathbb{P}\big([X_2 = 1]\big) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{La propriété est vraie pour } n = 2 \text{ et } j = 1.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \geqslant 2,\ \forall j \geqslant 1,\ \ \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big).}$$

□

6. a) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, en utilisant ***5.d)*** :

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.
Les v.a.r. X_{n-1} et X_n sont finies. Elles admettent donc une espérance. De plus :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(X_n) \\
= \ & \sum_{j=1}^{n} j\,\mathbb{P}\big([X_n = j]\big) \\
= \ & \sum_{j=1}^{n} j\,\left(\frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big)\right) && \textit{(d'après la question précédente avec } n \geqslant 2 \textit{ et } j \geqslant 1\textit{)} \\
= \ & \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n} j\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} j\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big) && \textit{(par linéarité de la somme)} \\
= \ & \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n} j\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big) && \textit{(car } [X_{n-1} = n] = \varnothing \textit{ et } [X_{n-1} = 0] = \varnothing\textit{)} \\
= \ & \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \frac{n-1}{n}\,\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j\,\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) && \textit{(par définition de } \mathbb{E}(X_{n-1}) \textit{ et linéarité de la somme)} \\
= \ & \frac{n-1}{n}\,\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}\,\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \times 1 && \textit{(car } \big([X_{n-1} = j]\big)_{j \in [\![1,n-1]\!]} \textit{ est un système complet d'événements)} \\
= \ & \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}}$$

□

b) En déduire $\mathbb{E}(X_n)$ et donner un équivalent simple de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question précédente :

$$\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{E}(X_k) - \mathbb{E}(X_{k-1}) \ = \ \frac{1}{k}$$

- En sommant les inégalités précédentes pour k variant de 2 à n :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \big(\mathbb{E}(X_k) - \mathbb{E}(X_{k-1})\big) & = & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_1) & & h_n - 1 \quad \textit{(par télescopage)} \end{array}$$

Enfin, comme $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(1) = 1$, on obtient : $\mathbb{E}(X_n) = h_n - 1 + 1 = h_n$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \geqslant 2,\ \mathbb{E}(X_n) = h_n \text{ et, d'après la question } \textbf{1.c)}, \text{ on a : } \mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$
□

7. a) Si n est supérieur ou égal à 2, calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de $\mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big)$ et de $\mathbb{E}\big(X_{n-1}\big)$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.
Les v.a.r. X_{n-1} et X_n sont finies. Elles admettent donc une variance. De plus :

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{E}\big(X_n^2\big) & \\ = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2\ \mathbb{P}\big(\left[X_n = j\right]\big) & \textit{(par théorème de transfert)} \\ = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2\ \left(\frac{n-1}{n}\ \mathbb{P}\big(\left[X_{n-1} = j\right]\big) + \frac{1}{n}\ \mathbb{P}\big(\left[X_{n-1} = j-1\right]\big)\right) & \textit{(d'après la question } \textbf{5.d)} \textit{ avec } n \geqslant 2 \textit{ et } j \geqslant 1) \\ = & \displaystyle\frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n} j^2\ \mathbb{P}\big(\left[X_{n-1} = j\right]\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} j^2\ \mathbb{P}\big(\left[X_{n-1} = j-1\right]\big) & \textit{(par linéarité de la somme)} \\ = & \displaystyle\frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j^2\ \mathbb{P}\big(\left[X_{n-1} = j\right]\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n} j^2\ \mathbb{P}\big(\left[X_{n-1} = j-1\right]\big) & \textit{(car } [X_{n-1} = n] = \varnothing \textit{ et } [X_{n-1} = 0] = \varnothing) \\ = & \displaystyle\frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j^2\ \mathbb{P}\big(\left[X_{n-1} = j\right]\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)^2\ \mathbb{P}\big(\left[X_{n-1} = j\right]\big) & \textit{(par décalage d'indice)} \\ = & \displaystyle\frac{n-1}{n}\ \mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j^2\ \mathbb{P}\big(\left[X_{n-1} = j\right]\big) & \textit{(par définition de } \mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) \textit{ et linéarité de la somme)} \\ & \displaystyle+\frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j\ \mathbb{P}\big(\left[X_{n-1} = j\right]\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\left[X_{n-1} = j\right]\big) & \\ = & \displaystyle\frac{n-1}{n}\ \mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \frac{1}{n}\ \mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \frac{2}{n}\ \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} & \textit{(car } \big(\left[X_{n-1} = j\right]\big)_{j\in[\![1,n-1]\!]} \textit{ est un système complet d'événements)} \\ = & \displaystyle\mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \frac{2}{n}\ \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} & \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \frac{2}{n}\ \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}}$$
□

b) En déduire : $\mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n$ (en reprenant les notations de la **Partie I**).

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} & & \mathbb{V}(X_n) \\ & = & \mathbb{E}(X_n^2) - \big(\mathbb{E}(X_n)\big)^2 \qquad \textit{(d'après la formule de Kœnig-Huygens)} \\ & = & \left(\mathbb{E}(X_{n-1}^2) + \dfrac{2}{n}\,\mathbb{E}(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}\right) - \left(\mathbb{E}(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}\right)^2 \qquad \textit{(d'après les questions 6.a) et 7.a))} \\ & = & \left(\mathbb{E}(X_{n-1}^2) + \cancel{\dfrac{2}{n}\,\mathbb{E}(X_{n-1})} + \dfrac{1}{n}\right) - \left(\big(\mathbb{E}(X_{n-1})\big)^2 + \cancel{\dfrac{2}{n}\,\mathbb{E}(X_{n-1})} + \dfrac{1}{n^2}\right) \\ & = & \mathbb{E}(X_{n-1}^2) - \big(\mathbb{E}(X_{n-1})\big)^2 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} \\ & = & \mathbb{V}(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} \qquad \textit{(d'après la formule de Kœnig-Huygens)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

- On a ainsi :

$$\forall k \geqslant 2,\ \ \mathbb{V}(X_k) - \mathbb{V}(X_{k-1}) \ = \ \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$$

- En sommant les inégalités précédentes pour k variant de 2 à n :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \big(\mathbb{V}(X_k) - \mathbb{V}(X_{k-1})\big) & = & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{V}(X_n) - \mathbb{V}(X_1) & & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \textit{(par linéarité de la somme)} \end{array}$$

Enfin, comme $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(1) = 0$, on obtient :

$$\mathbb{V}(X_n) \ = \ (h_n - 1) - (k_n - 1) \ = \ h_n - k_n$$

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } \forall n \geqslant 2,\ \mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n.}$$

□

c) Donner un équivalent de $\mathbb{V}(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

Démonstration.
D'après la question ***2.c)*** : $h_n - k_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après la question précédente : } \mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

Commentaire

Il est à noter que, dans la question précédente, le résultat est donné par l'énoncé. Il ne s'agit pas de déterminer l'expression de $\mathbb{V}(X_n)$ mais de démontrer l'égalité $\mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n$. La question ***7.c)*** peut donc être traitée sans avoir fait la ***7.b)***. Finalement, Cette question est à concevoir comme une question bonus pour les candidats qui ont réussi à traiter la question ***2.c)*** car c'est l'unique résultat exigé pour répondre à la question.

□

8. Soit $(T_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout i entier naturel non nul, T_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{i}$. On pose :

$$S_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} T_i \;=\; T_1 + \cdots + T_n$$

a) Vérifier que X_1 et T_1 ont même loi.

Démonstration.

- Par définition la v.a.r. T_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre 1.
Autrement dit, la loi de T_1 est définie par :

$$\mathbb{P}\big(\,[T_1 = 0]\,\big) = 0 \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}\big(\,[T_1 = 1]\,\big) = 1$$

- Or, on a démontré que la v.a.r. X_1 suit la loi certaine égale à 1. On a donc aussi :

$$\mathbb{P}\big(\,[X_1 = 0]\,\big) = 0 \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}\big(\,[X_1 = 1]\,\big) = 1$$

$$\boxed{\text{Les v.a.r. } X_1 \text{ et } T_1 \text{ ont même loi.}}$$

Commentaire

- La loi $\mathcal{B}\,(p)$ est souvent seuelement définie avec $p \in \,]0, 1[$, excluant ainsi les cas $p = 0$ et $p = 1$. La raison est la suivante :
  - × on préfére dire qu'une v.a.r. X est presque certainement égale à 1 plutôt que de dire qu'elle suit une loi de Bernoulli de paramètre 1.
  - × on préfére dire qu'une v.a.r. X est presque certainement égale à 0 plutôt que de dire qu'elle suit une loi de Bernoulli de paramètre 0.
- Dans l'énoncé, on fait le choix de considérer la loi $\mathcal{B}\,(1)$ ce qui permet d'assurer l'homogénéité des définitions des v.a.r. $T_1, \ldots, T_n$.

□

b) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([S_n = j]) \;=\; \frac{1}{n}\,\mathbb{P}([S_{n-1} = j-1]) + \frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}([S_{n-1} = j])$$

En déduire que X_n et S_n ont même loi.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$ et soit $j \in \mathbb{N}^*$.

- Comme $T_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$, on a : $T_n(\Omega) = \{0, 1\}$.
Ainsi, la famille $\big([T_n = 0]\,, [T_n = 1]\big)$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\,[S_n = j]\,\big) \;&=\; \mathbb{P}\big(\,[T_n = 0] \cap [S_n = j]\,\big) \;+\; \mathbb{P}\big(\,[T_n = 1] \cap [S_n = j]\,\big) \\
&=\; \mathbb{P}\left([T_n = 0] \cap \left[\sum_{i=1}^{n} T_i = j\right]\right) \;+\; \mathbb{P}\left([T_n = 1] \cap \left[\sum_{i=1}^{n} T_i = j\right]\right) \\
&=\; \mathbb{P}\left([T_n = 0] \cap \left[\sum_{i=1}^{n-1} T_i = j\right]\right) \;+\; \mathbb{P}\left([T_n = 1] \cap \left[\sum_{i=1}^{n-1} T_i = j-1\right]\right) \\
&=\; \mathbb{P}\big(\,[T_n = 0] \cap [S_{n-1} = j]\,\big) \;+\; \mathbb{P}\big(\,[T_n = 1] \cap [S_{n-1} = j-1]\,\big)
\end{aligned}$$

- Les v.a.r. $T_1, \ldots, T_n$ sont mutuellement indépendantes. On en déduit, par le lemme des coalitions, que les v.a.r. T_n et $S_{n-1} = T_1 + \ldots + T_{n-1}$ sont indépendantes.

  Ainsi, en reprenant le calcul précédent :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([S_n = j]\big) & = & \mathbb{P}\big([T_n = 0]\big) \times \mathbb{P}\big([S_{n-1} = j]\big) + \mathbb{P}\big([T_n = 1]\big) \times \mathbb{P}\big([S_{n-1} = j-1]\big) & \\ & = & \dfrac{n-1}{n} \times \mathbb{P}\big([S_{n-1} = j]\big) + \dfrac{1}{n} \times \mathbb{P}\big([S_{n-1} = j-1]\big) & \textit{(car } T_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([S_n = j]\big) = \dfrac{n-1}{n} \times \mathbb{P}\big([S_{n-1} = j]\big) + \dfrac{1}{n} \times \mathbb{P}\big([S_{n-1} = j-1]\big)}$$

- Démontrons alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: X_n et S_n ont même loi.

  ▸ **Initialisation** :
  D'après la question ***8.a)***, X_1 et $T_1 = S_1$ ont même loi.
  D'où $\mathcal{P}(1)$.

  ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (X_{n+1} et S_{n+1} ont même loi).

  – D'après la question ***5.a)***, $X_{n+1}(\Omega) \subset [\![1, n+1]\!]$.
  D'autre part, comme $T_1(\Omega) = \ldots = T_n(\Omega) = \{0, 1\}$, on a : $S_{n+1}(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$.

  – Soit $j \in [\![1, n+1]\!]$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([S_{n+1} = j]\big) & = & \dfrac{n}{n+1}\, \mathbb{P}\big([S_n = j]\big) + \dfrac{1}{n+1}\, \mathbb{P}\big([S_n = j-1]\big) & \textit{(d'après ce qui précéde avec } n+1 \geqslant 2 \textit{ et } j \geqslant 1\textit{)} \\ & = & \dfrac{n}{n+1}\, \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) + \dfrac{1}{n+1}\, \mathbb{P}\big([X_n = j-1]\big) & \textit{(car, par hypothèse de récurrence, } X_n \textit{ et } S_n \textit{ ont même loi)} \\ & = & \mathbb{P}\big([X_{n+1} = j]\big) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.d)}} \textit{ avec } n+1 \geqslant 2 \textit{ et } j \geqslant 1\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall i \in [\![1, n+1]\!],\ \mathbb{P}\big([S_{n+1} = j]\big) = \mathbb{P}\big([X_{n+1} = j]\big).}$$

  – Remarquons enfin que l'événement S_{n+1} prend la valeur 0 si et seulement si les v.a.r. $T_1, \ldots, T_{n+1}$ prennent toutes la valeur 0. On en déduit :

$$[S_{n+1} = 0] = \bigcap_{i=1}^{n+1} [T_i = 0]$$

$$\begin{array}{rcll} \text{et ainsi} \quad \mathbb{P}\big([S_{n+1} = 0]\big) & = & \mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n+1} [T_i = 0]\right) & \\ & = & \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([T_i = 0]\big) & \textit{(car les v.a.r. } T_1, \ldots, T_{n+1} \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & 0 \times \dfrac{1}{2} \times \ldots \times \dfrac{n}{n+1} & \textit{(car : } \forall i \in [\![1, n+1]\!],\ T_i \hookrightarrow \mathcal{B}(i)\textit{)} \\ & = & 0 & \end{array}$$

Enfin, comme $X_{n+1}(\Omega) \subset [\![1, n+1]\!]$ alors : $\mathbb{P}\big([X_{n+1} = 0] \big) = 0$.

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_{n+1} = 0] \big) = \mathbb{P}\big([S_{n+1} = 0] \big)}$$

Ainsi S_{n+1} et X_{n+1} ont même loi. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on a : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n).}$$

□

c) Retrouver ainsi $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La v.a.r. S_n admet une espérance (respectivement une variance) comme somme des v.a.r. T_1, $\dots$, T_n qui admettent toutes une espérance (respectivement une variance).
- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(S_n) & = & \mathbb{E}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} T_i\right) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(T_i) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i} & \textit{(car : } \forall i \in [\![1, n]\!],\ T_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{i}\right)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(S_n) = h_n}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(S_n) & = & \mathbb{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} T_i\right) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(T_i) & \textit{(car les v.a.r. } T_1, \dots, T_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i} \times \left(1 - \dfrac{1}{i}\right) & \textit{(car : } \forall i \in [\![1, n]\!],\ T_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{i}\right)\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i^2} & \textit{(par linéarité de la somme)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{V}(S_n) = h_n - k_n}$$

- Enfin, comme les v.a.r. S_n et X_n ont même loi, elles ont même espérance et même variance.

$$\boxed{\text{On retrouve bien, pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \mathbb{E}(X_n) = h_n \text{ et } \mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n.}$$

□