Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} k = n(2n+1)$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} k^2 = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(4n+3)}{3}$

Exercice 2 : Soit $q \in]-1,1[$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$
3. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{4}{3}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k x^k}{k!} = \mathrm{e}^{2x}$

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. D'après le théorème du rang :
$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$

Exercice 4 :

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\alpha)$, alors :
   (a) $X(\Omega) = \{0,1\}$
   (b) $\mathbb{P}([X=1]) = \alpha$
   (c) $\mathbb{P}([X=0]) = 1-\alpha$
   (d) $\mathbb{E}(X) = \alpha$
   (e) $\mathbb{V}(X) = \alpha(1-\alpha)$
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors :
   (a) $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$
   (b) $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X=k]) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
   (c) $\mathbb{E}(X) = np$
   (d) $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$
3. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,N]\!])$, alors :
   (a) $X(\Omega) = [\![1,N]\!]$
   (b) $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X=k]) = \frac{1}{N}$
   (c) $\mathbb{E}(X) = \frac{N+1}{2}$
   (d) $\mathbb{V}(X) = \frac{N^2-1}{12}$
4. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$, alors :
   (a) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
   (b) $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X=k]) = q(1-q)^{k-1}$
   (c) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{q}$
   (d) $\mathbb{V}(X) = \frac{1-q}{q^2}$
5. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors :
   (a) $X(\Omega) = \mathbb{N}$
   (b) $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X=k]) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
   (c) $\mathbb{E}(X) = \lambda$
   (d) $\mathbb{V}(X) = \lambda$

Exercice 5 : On considère la suite définie par $u_0 = 1$; $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -3u_{n+1} + 3u_n$. Pour trouver une expression explicite de u_n, de quel polynôme doit-on chercher les racines ? Entourer la bonne réponse.

1. $P(x) = x^2 + 3x + 3$
2. $\boxed{P(x) = x^2 + 3x - 3}$
3. $P(x) = x^2 - 3x - 3$
4. $P(x) = x^2 - 3x + 3$

Exercice 6 :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{(\ln(n))^2} = +\infty$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{3n + n^3} = 0$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{\ln(n)} = +\infty$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{\mathrm{e}^n} = 0$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^n}{n^n} = 0$

Exercice 7 :

1. $n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$
2. $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$
3. $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$
4. $n^2 + (\ln(n))^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$
5. $n^2 + 2^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$
6. $\ln(n) + 3n + n^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$

Exercice 8 :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x+2}\right) = -\infty$
5. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$
6. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

Exercice 9 : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

1. $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right)$
2. $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k\right)$

Exercice 10 : Soient A_1, A_2, …, A_n des événements. On suppose que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. D'après la formule des probabilités composées :

$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\ldots\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$

Exercice 11 : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements. Soit B un événement.

D'après la formule des probabilités totales :

$\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B)$

et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n) \neq 0$, alors

$\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)$

Exercice 12 : Soient A et B deux événements. D'après la formule de Bayes, si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors

$\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)}{\mathbb{P}(A)}$

Exercice 13 : Soient A et B deux événements indépendants. Alors,
$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
Soit $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille d'événements mutuellement indépendants. Alors,
$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

Exercice 14 : Soit X une v.a.r. discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Alors,
$\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = 1$

Exercice 15 : Soit X une v.a.r. discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit g une fonction. D'après le théorème de transfert :
$\mathbb{E}(g(X)) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} g(k)\mathbb{P}([X = k])$ (sous réserve d'existence)

Exercice 16 : Soient X et Y deux v.a.r. qui admettent une espérance. Soit $(\lambda, \mu)^2 \in \mathbb{R}^2$. Alors,

1. $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\mathbb{E}(X) + \mu\mathbb{E}(Y)$
2. $\mathbb{E}(\lambda) = \lambda$

Soient X_1, X_2, …, X_n des v.a.r. qui admettent une même espérance m. Alors,
$\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}\right) = m$

Exercice 17 : Soient X et Y deux v.a.r. qui admettent une variance. Soit $(\lambda, \mu)^2 \in \mathbb{R}^2$. Alors,

1. $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)+2(\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y))$
2. $\mathbb{V}(\lambda X + \mu) = \lambda^2\mathbb{V}(X)$

Exercice 18 : Soit X une v.a.r. discrète qui admet un moment d'ordre 2. D'après la formule de Kœnig-Huygens :
$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

Exercice 19 : Soit X une v.a.r. discrète telle que $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Soit $r \in \mathbb{N}$. Le moment d'ordre r de X est :
$m_r(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k^r \mathbb{P}([X = x_k])$