1 Théorème de la bijection

Théoreme 1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :*

- *f est continue sur I*
- *f est strictement monotone sur I*

Alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$. Autrement dit :

$$\forall y \in f(I),\ \exists! x \in I,\ f(x) = y$$

De plus, $f(I)$ est un intervalle de même nature que I.

2 Utilisation du théorème de la bijection aux concours : version directe

Exercice 1 : Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I, notée α.

Méthode. La rédaction suit une trame très précise.

La fonction f est :

- continue sur I
- strictement croissante (resp. décroissante) sur I

Ainsi, f réalise une bijection de I sur $f(I) = J$.

De plus, $0 \in J$.

On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I, que l'on note α.

3 Utilisation du théorème de la bijection aux concours : version indirecte

Exercice 2 : Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans I, notée α.

Méthode. La rédaction suit ici aussi une trame très précise.

On commence par « changer » de fonction à étudier.

Soit $x \in I$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \dots \\ &\iff g(x) = 0 \end{aligned}$$

Deux cas sont possibles :

1. Si une fonction g a été étudiée/introduite précédemment dans le sujet, il faut se demander si elle a un lien avec f et si c'est elle qu'il faut utiliser pour le théorème de la bijection.
2. Sinon, on introduira la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. En effet,

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff f(x) - x = 0 \\ &\iff g(x) = 0 \end{aligned}$$

La fonction g est :

- continue sur I
- strictement croissante (resp. décroissante) sur I

Ainsi, g réalise une bijection de I sur $g(I) = J$.

De plus, $0 \in J$.

On en déduit que l'équation $g(x) = 0$ (*i.e.* l'équation $f(x) = x$) admet une unique solution dans I, que l'on note α.