DS2 (version A)

Exercice 1

On considère un nombre réel a et on pose $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la matrice M_a soit inversible.

> **Commentaire**
>
> CNS = condition nécessaire et suffisante. Il faut donc rédiger une <u>équivalence</u> :
>
> M_a est inversible si et seulement si $a \neq 0$.
>
> La phrase « Pour que M_a soit inversible, il faut que $a \neq 0$ » est l'énonciation d'une condition nécessaire.
>
> La phrase « Si $a \neq 0$, alors M_a est inversible » est l'énonciation d'une condition suffisante.

A partir de maintenant et ce, **jusqu'à la fin de l'exercice**, on suppose que a est un élément de $]0,1[$.

2. ***a)*** Déterminer une base et la dimension de $E_1(M_a) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid M_a U = U\}$.

b) Déterminer une base et la dimension de $E_a(M_a) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid M_a U = aU\}$.

c) `(CUBES UNIQUEMENT)` En déduire que M_a n'est pas diagonalisable.

3. On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on note E l'espace vectoriel engendré par I, M_a et M_a^2.

a) Quelle est la dimension de E ?

> **Commentaire**
>
> Beaucoup de non sens sur cette question (dimension d'une matrice, cardinal d'une matrice,...), qui démontrent un apprentissage insuffisant du cours.
>
> Il faut savoir démontrer qu'une famille de matrices est libre.

b) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $J\,K^2$ puis en déduire $(M_a - I)\,(M_a - aI)^2$.

c) En déduire que M_a^3 appartient à E.

4. ***a)*** Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique triplet de réels (u_n, v_n, w_n) tel que :

$$M_a^n \;=\; u_n\, M_a^2 + v_n\, M_a + w_n\, I$$

On donnera les valeurs de u_0, v_0 et w_0 et on écrira les relations liant u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} à u_n, v_n et w_n.

> **Commentaire**
>
> Preuve par récurrence pour l'existence, hérédité délicate si on n'a jamais vu ce type de question. Voir corrigé pour apprendre la méthode.

b) En utilisant les relations précédentes, expliquer pourquoi le script **Python** qui suit ne permet pas de calculer et d'afficher les valeurs de u_n, v_n et w_n lorsque n et a sont entrés par l'utilisateur. On pourra examiner attentivement la boucle « for ».

```
n = input('entrez une valeur pour n : ')
a = input('entrez une valeur pour a : ')
u = 0
v = 0
w = 1
for k in range(n):
    u = (2 * a + 1) * u + v
    v = -a * (a + 2) * u + w
    w = a * a * u
print(w, v, u)
```

Commentaire

Il était assez malin d'utiliser ce script pour en déduire les relations de récurrence entre u_n, v_n et w_n. Cependant, il y a eu beaucoup d'erreurs de lectures de parenthèses et de priorité des opérations.

c) Modifier la boucle de ce script en conséquence.

5. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = (2a+1)\,u_{n+2} - a\,(a+2)\,u_{n+1} + a^2\,u_n$.

Commentaire

Beaucoup d'élèves essayent de démontrer cette formule en utilisant une conséquence (admise juste en dessous). Il s'agit d'une erreur de raisonnement. On ne peut jamais utiliser un résultat ultérieur pour justifier un calcul. On ne peut utiliser que les question **précédentes**.

On **admet** que l'on peut en déduire u_n, pour tout entier naturel n, sous la forme :

$$u_n \;=\; \frac{(n-1)\,a^n - n\,a^{n+1} + 1}{(a-1)^2}$$

6. On dit qu'une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers la matrice A lorsque n tend vers $+\infty$ si chaque coefficient de A_n tend vers le coefficient situé à la même place dans A. Il en résulte (et on admet ce résultat) :

$$\lim_{n\to+\infty} M_a^n = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) M_a^2 + \left(\lim_{n\to+\infty} v_n\right) M_a + \left(\lim_{n\to+\infty} w_n\right) I$$

a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Commentaire

Où est la difficulté pour u_n ? Pourquoi si peu de réussite, et même d'essais, sur cette question ?

b) En déduire la limite L_a lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite $(M_a^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Vérifier : $L_a^2 = L_a$.

7. `(CUBES UNIQUEMENT)` On note φ_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est L_a et f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est M_a.

a) Démontrer : $\forall x \in \operatorname{Ker}(f_a - \mathrm{id}),\ \varphi_a(x) = x$.

b) Démontrer : $\forall x \in \operatorname{Im}(f_a - \mathrm{id}),\ \varphi_a(x) = 0$.

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ et la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction f (on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f)

1. Déterminer le domaine de définition de f puis les limites de f aux bords de ce domaine.

Commentaire

Confusion constante entre f et $f(x)$.

2. `(CUBES UNIQUEMENT)` Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.

3. Montrer que la fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$, calculer sa dérivée puis expliciter l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.

Commentaire

Puisque il est écrit « Montrer que la fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ », il faut le faire correctement. Il fallait expliciter la composition.
Que dire des erreurs de calculs dans la dérivée d'une composée ?

4. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

5. Résoudre l'équation $f(x) = x$ puis l'inéquation $f(x) > x$.

Commentaire

- Puisque il faut « résoudre », il ne s'agit pas ici d'utiliser le théorème de la bijection, mais bien de faire un calcul.
- Un massacre dans l'utilisation de la fonction carré. On rappelle que l'équivalence

  $$\cancel{a = b \iff a^2 = b^2}$$

  est fausse en général. Elle devient vraie si l'on sait que a et b sont du même signe.
  De même, si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, alors on peut dire que

  $$a \geqslant b \iff a^2 \geqslant b^2$$

  par croissance stricte de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0,+\infty[$.
  J'ai parfois lu que la fonction $x \mapsto x^2$ était croissante sur $\mathbb{R}$ ...

6. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

Commentaire

Il faut penser à faire apparaître les éléments remarquables (ici le point de coordonnées $(0, f(0))$, la tangente en 0, la droite d'équation $y = x$).

Partie B : Étude de la suite (u_n) dans le cas où $u_0 = 0$

7. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

8. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

> **Commentaire**
>
> Le cours contient une méthode (par récurrence) pour cette question de première année. La quasi totalité de la classe semble l'avoir oubliée…

9. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

10. Écrire une fonction **Python**, nommée `SuiteU`, qui prend en paramètre un entier `n` et renvoie $u_{\mathtt{n}}$.

11. Écrire une fonction **Python**, nommée `PremierEntier`, qui prend en paramètre un réel `epsilon` strictement positif et renvoie le premier entier n vérifiant $1 - \texttt{epsilon} < u_n \leqslant 1$.

Partie C : Étude de la suite (u_n) dans le cas où $u_0 > 1$

> **Commentaire**
>
> On change d'hypothèse sur u_0 donc les résultats de la partie B ne peuvent pas être utilisés dans la partie C.

12. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

> **Commentaire**
>
> Il fallait reprendre le modèle de preuve de la question 7, mais c'était moins guidé ici (il faut parfois faire preuve d'initiative !).

13. Montrer que la suite (u_n) est monotone.

14. Étudier la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Dans **toute la suite de l'exercice** on suppose que $u_0 > 1$.

Partie D : Étude de fonctions auxiliaires

On définit les fonctions ch et sh sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

15. Exprimer les dérivées des fonctions ch et sh en fonction de ch et sh.
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) > 0$.
Calculer $\mathrm{sh}(0)$ et déterminer le signe de $\mathrm{sh}(x)$ en fonction de x.

16. En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \geq 0$ tel que $\mathrm{ch}(\alpha) = u_0$.

> **Commentaire**
>
> Il existe une unique manière de rédiger cette question, à l'aide du théorème de la bijection. Il suffit de l'apprendre par cœur. Voir feuille méthode.

17. On considère le programme **Python** suivant

```python
import numpy as np

def ch(x):
        return (np.exp(x)+np.exp(-x))/2

u0=3/2
a=0
b=2
c=(a+b)/2
while b-a > 10**(-3):
        if (ch(a)-u0)*(ch(c)-u0) < 0:
                b=c
        else:
                a=c
        c=(a+b)/2
print(c)
```

a. Que fait ce programme ? Comment s'appelle ce type de programme ?

b. Pourquoi a-t-on pris $b = 2$?

18. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 1 = \operatorname{ch}(x)$$

19. En déduire que, pour tout entier n,

$$u_n = \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

Commentaire

Cette question à fait très peur. Il s'agissait pourtant d'une récurrence somme toute assez classique dans son fonctionnement.

20. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(x) - 1 = 2\left(\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

21. Calculer $\operatorname{sh}'(0)$.

22. En déduire les équivalences suivantes

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

23. En déduire un équivalent de $(u_n - 1)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession infinie de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste après le k^{e} tirage. En particulier, on a $X_0 = 1$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note :

B_i : « on obtient une boule blanche au i^{e} tirage »

N_i : « on obtient une boule noire au i^{e} tirage »

1. Compléter la fonction **Python** ci-dessous afin qu'elle simule la variable aléatoire X_n.

```
import numpy.random as rd
def Simu_X(n):
    nB,nN = 1,1
    for k in range(n) :
        if ________________________________:
            nN = nN + 1
        else :
            ________________
    return ______
```

Commentaire

Presque personne n'a été capable de trouver la condition `if rd.random() < nB/(nN+nB)`. On avait pourtant fait 3 semaines de TP quasiment uniquement sur cette commande. Il est temps de se mettre au travail sérieusement sur les TP **Python**.

2. Déterminer la loi de X_1. Donner son espérance et sa variance. (*On pourra utiliser les évènements B_1 et N_1 pour rédiger la réponse.*)

3. ***a.*** Justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par :

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 2]) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 3]) = \frac{1}{6}$$

b. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_2)$.

c. On rappelle qu'après avoir chargé la bibliothèque `matplotlib.pyplot` sous l'alias `plt`, on a accès à la fonction `plt.hist` qui trace l'histogramme d'une liste ou d'un tableau donné en argument. Représenter précisément, en justifiant la réponse, la figure que l'on peut s'attendre à ce que **Python** affiche à l'exécution des instructions suivantes

```
import matplotlib.pyplot as plt
L = []
for k in range(10000):
        L.append(Simu_X(2))
plt.hist(L, range(1,5), density = True)
plt.show()
```

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Préciser l'ensemble $X_k(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X_k.

5. Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$. En distinguant trois cas, déterminer

$$\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i]) .$$

Commentaire

Une erreur classique consiste à rédiger comme si i et j étaient des v.a.r. discrètes et avaient un sens intrinsèque. Il n'en est rien, ce sont juste des paramètres et le choix de leurs valeurs ne *signifie* rien (il faut abolir l'utilisation de ce mot en proba, que vous utilisez à tort et à travers). Seul le fait qu'une proposition mathématique soit vraie ou fausse signifie quelque chose.
La méthode de rédaction du cours n'a pas été assez utilisée pour répondre à cette question. La grosse difficulté ici est dans la gestion des paramètres et la bonne manière de rédiger le calcul. Il faut s'entraîner sur ce genre de questions classiques aux concours.

6. Déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left([X_{k+1} = i]\right) = \frac{i}{k+2}\ \mathbb{P}\left([X_k = i]\right) + \frac{3+k-i}{k+2}\ \mathbb{P}\left([X_k = i-1]\right) \qquad (*)$$

7. À l'aide de la formule (*) déterminer la loi de X_3.

8. ***a.*** Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left([X_k = 1]\right) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

b. Montrer de même que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left([X_k = k+1]\right) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

c. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $a_k = (k+1)! \times \mathbb{P}\left([X_k = 2]\right)$.
Exprimer a_{k+1} en fonction de a_k et de k.

d. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $b_k = a_k + k + 2$. Montrer que la suite (b_k) est géométrique. En déduire alors que :

$$\forall k \in\ \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left([X_k = 2]\right) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}$$

9. ***a.*** À l'aide de la formule (*), montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left(X_{k+1}\right) = \frac{k+1}{k+2}\mathbb{E}\left(X_k\right) + 1$$

b. Déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left(X_k\right) = \frac{k+2}{2}$$