DS3 (version A)

Exercice 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathscr{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I.

1. ***a)*** Déterminer $(A - I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et de A.

> **Commentaire**
>
> Beaucoup d'erreurs de signes quand vous faites passez un terme de l'autre côté du symbole d'égalité.

2. On pose $A = N + I$.

a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et de N puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.

> **Commentaire**
>
> On a montré à la question précédente que $N^2 = 0$. C'est donc la question habituelle sur le binôme de Newton. Cf DS1.
> Beaucoup d'élèves oublient la fin de la question « Ecrire la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et A. »
> $A^n = I + n(A - I)$ n'est pas correct, car $I + n(A - I)$ n'est pas une combinaison linéaire de I et A

b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

> **Commentaire**
>
> D'une part ...
> D'autre part ...

3. ***a)*** `(CUBES UNIQUEMENT)` Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A.

b) `(CUBES UNIQUEMENT)` En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.

4. On pose $u_1 = (f - \mathrm{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.

a) Montrer que le rang de $f - \mathrm{id}$ est égal à 1.

> **Commentaire**
>
> Il faut penser à passer par les matrices représentatives.

b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

Commentaire

C'est bien de penser à l'argument de dimension, mais il faut aussi vérifier que u_1 et u_2 sont dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

5. a) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

Commentaire

C'est une méthode du cours à connaître par coeur.

6. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}.

Commentaire

- « Justifier l'inversibilité de P » $\neq$ « Calculer P^{-1} »
- « Montrer que X admet une espérance » $\neq$ « Calculer $\mathbb{E}(X)$ »
- « Montrer que f est dérivable » $\neq$ « Calculer $f'(x)$ »
- « Montrer que la série $\sum u_n$ converge » $\neq$ « Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ »
- « Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)$ converge » $\neq$ « Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)$ »

7. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que pour tout $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

b) Soit N une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \quad \Leftrightarrow \quad \left(P^{-1}NP\right)T \ = \ T\left(P^{-1}NP\right)$$

Commentaire

Beaucoup ont pris les points ici même sans avoir trouvé la matrice T. C'est bien.

c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\left(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\right)$.

Commentaire

Plus difficile, cette question a rencontré moins de succès. Elle était pourtant faisable en admettant la question ***7.a)***.

Exercice 2

Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < \mathrm{e} < 3$.

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \varphi(x) = x^2\,\mathrm{e}^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de φ, en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.

> **Commentaire**
>
> Il est assez fou de ne pas remarquer que $x^2 + 2x = x(x+2)$. Cette question montre l'existence de réelles lacunes de calcul, qu'il faut s'efforcer de combler en faisant au minimum un petit calcul par jour.

2. Établir que l'équation $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in \left]0, +\infty\right[$, admet une solution et une seule, notée α, et que α appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

> **Commentaire**
>
> Il fallait réutiliser la fonction étudiée à la question précédente et lui appliquer le théorème de la bijection.

Partie II : Étude d'une suite

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3\,\mathrm{e}^x$, et la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Ecrire une fonction en **Python** (nommée `suiteU`) qui prend en paramètre un entier n et qui renvoie la valeur de u_n.

> **Commentaire**
>
> Encore tant d'erreurs sur une question si classique (TP1), c'est désolant.

4. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

5. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

6. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

> **Commentaire**
>
> Ecrire :
> « la suite (u_n) est
> - croissante
> - minorée par 1
>
> donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge. »
> démontre un grand manque de sérieux et/ou de recul sur l'apprentissage du cours.

Partie III : Étude d'une série

7. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$.

> **Commentaire**
>
> Il faut arrêter d'affirmer des équivalents magiques et vérifier le calcul de limite quand on propose un équivalent.

8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \leqslant \frac{1}{(\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^n}$.

9. En déduire une fonction en **Python** qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2, 4, 1, 5 et 9, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

> **Commentaire**
>
> L'énoncé n'était pas évident à comprendre. L'entier n semble fixé, mais on considère dans la suite T_n, T_2 et T_3. Il fallait bien comprendre que pour T_2 l'urne ne contient que deux boules numérotées 1 et 2 mais pour T_3 l'urne contient trois boules numérotées de 1 à 3.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.

> **Commentaire**
>
> Il faut arrêter de recopier l'énoncé en écrivant la définition de la v.a.r. étudiée, et encore pire d'écrire cette définition avec des guillemets comme si X_k était un événement.
>
> ~~X_k : « le numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ème}}$ lancer »~~

2. ***a)*** Déterminer $T_n(\Omega)$.

b) Calculer $\mathbb{P}([T_n = 1])$.

c) Montrer que :

$$\mathbb{P}([T_n = n]) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.

Commentaire

Il faut réutiliser au maximum les résultats de la question *2* qui sont valables pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $\mathbb{E}(T_3) = \dfrac{16}{9}$.

Commentaire

Il faut réutiliser au maximum les résultats de la question *2* qui sont valables pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1}.

b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que :

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ \mathbb{P}([S_{k+1} = i]) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j]).$$

7. ***a)*** Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\dbinom{j-1}{k-1}$, $\dbinom{j-1}{k}$ et $\dbinom{j}{k}$.

b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$\text{« } \forall i \in [\![k, n]\!], \quad \mathbb{P}([S_k = i]) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \text{ ».}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

8. ***a)*** Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements $[T_n > k]$ et $[S_k \leqslant n-1]$.

b) En déduire que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{P}([T_n > k]) = \dfrac{1}{n^k} \dbinom{n-1}{k}$.

9. Démontrer que $\mathbb{E}(T_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k])$, puis que $\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.

10. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

Commentaire

Quand on calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$, les deux n tendent **en même temps** vers $+\infty$.
Le raisonnement :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1^{n-1} = 1$
- donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n-1} = 1$

est donc erroné.
Il faut penser à la **forme exponentielle**.

11. On rappelle que la commande `rd.randint(a,b)` simule une v.a.r. qui suit la loi uniforme sur $[\![a, b-1]\!]$.Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la v.a.r. T_n :

```
def SimulT(n):
    S=0
    k=0
    while _________ :
        S = ______________________________
        k = _______
    return _____
```

Exercice 4

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. a) Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X = n]) = (n+1)\,\dfrac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule de cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose : $V = X - U$.

2. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable U.

Commentaire

Un rapide coup d'oeil à la question ***2.c)*** permet de voir que $U(\Omega) = \mathbb{N}$.

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.

Commentaire

L'expérience étant concrète, il n'y a pas d'autre méthode que celle du cours consistant à écrire : « si l'événement $[X = n]$ est réalisé, alors... » afin de calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X=n]}([U = k])$.

c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\, \mathbb{P}([X = n]) \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}$$

Commentaire

Il s'agit ici d'utiliser la question précédente (lois conditionnelles) pour déterminer la loi de U (c'est à dire une loi marginale dans ce contexte). On doit donc appliquer la formule des probabilités totales avec le sce associé à X.

d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

Commentaire

Il n'y a plus de raisonnement probabiliste ici et la loi de U est donnée à la question précédente, on peut donc traiter cette question sans avoir rien compris à cet exo. Soit on a travaillé le cours sur les séries, soit on rate ces 10 points généreusement offerts sur un plateau.

3. *a)* Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.

c) En déduire la loi de V.

4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

5. `(CUBES UNIQUEMENT)` Que vaut $\text{Cov}(U, V)$? En déduire $\text{Cov}(X, U)$.

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0, 1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose de la pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

6. **Simulation informatique**

a) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def simule_X():` qui simule la v.a.r. X.

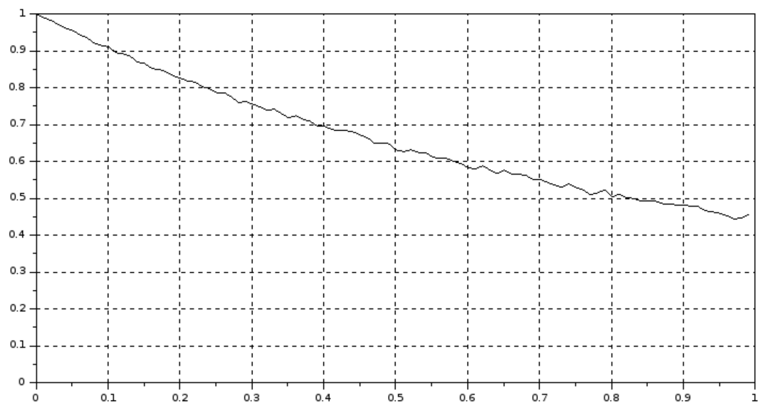
b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0, 1[$, simule la variable aléatoire Y. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
def mystere(p):
    r = 0
    N = 10^4
    for k in range(N):
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y:
            r = r + 1/N
    return r
```

Commentaire

Question difficile tant que nous n'aurons pas vu la Loi faible des grands nombres.

c) On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour laquelle le jeu serait équilibré.

Commentaire

Il faut s'obliger à prendre ce point donné par simple lecture graphique. On souhaite que A ait une chance sur deux de gagner pour que le jeu soit équilibré.

7. Étude de la variable aléatoire Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

a) Reconnaître la loi de Z et préciser son (ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.

Commentaire

Les réflexes de bonne rédaction ne sont pas encore acquis pour justifier que Z suit la loi $\mathcal{G}(p)$.

b) Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.

Commentaire

$Y = Z - 1$. On est sur du très très classique (déjà fait en classe).

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y \geqslant n]) = (1-p)^n$.

8. a) Montrer : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\, \mathbb{P}([Y \geqslant n])$.

b) Déduire des résultats précédents : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \dfrac{4}{(2+p)^2}$.

c) Déterminer la valeur de p pour lequel le jeu est équilibré.