DS4 (version A)

Exercice 1

On note $E = \mathbb{R}_2[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à 2.
On note e_0, e_1, e_2 les fonctions définies, pour tout réel x par :

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = x \quad \text{et} \quad e_2(x) = x^2$$

et on rappelle que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.
Soit f l'application qui à toute fonction polynomiale P de E associe la fonction $Q = f(P)$, où Q est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel x associe $(x^2 - x)P(x)$.

1. a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

b) Déterminer $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ en fonction de e_0, e_1 et e_2.

c) En déduire que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

d) Montrer sans calcul que f est un automorphisme de E.

2. a) Donner les valeurs propres de A, puis en déduire que A est diagonalisable.

b) Déterminer les sous-espaces propres de A.

c) On compile le script **Python** suivant :

```
A = np.array([[2,-2,0],[0,6,-6],[0,0,12]])
print(al.matrix_rank(A-6*np.eye(3)))
```

Donner la valeur affichée dans la console **Python** et justifier à l'aide de la question précédente.

3. a) Justifier l'existence d'une matrice P inversible dont la première ligne ne contient que des « 1 » telle que $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. a) Déterminer la matrice P^{-1}.

b) En déduire explicitement, en fonction de n, la matrice A^n.

c) On dit qu'une suite de matrices (M_n) tend vers la matrice M, lorsque n tend vers $+\infty$, si chaque coefficient de M_n tend vers le coefficient situé à la même place dans M.
On pose $B = \dfrac{1}{12} A$. Montrer que la suite (B^n) tend vers une matrice J vérifiant $J^2 = J$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \mathrm{e} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n existe.

2. Écrire un programme en **Python** qui, pour une valeur N fournie par l'utilisateur, calcule et affiche u_N.

3. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

4. Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

5. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de :

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

puis déterminer un équivalent de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0.

6. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

7. Établir :

$$\forall x \geqslant \mathrm{e} - 1, \quad f(x) \leqslant x \quad \text{et} \quad (x+1)\ \ln(x+1) \geqslant (x+1)$$

En déduire :

$$\forall x \geqslant \mathrm{e} - 1,\ f'(x) \geqslant 0$$

8. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{e} - 1 \leqslant u_n$$

9. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser la valeur de sa limite L.

Exercice 3

Les deux parties sont indépendantes

Partie I

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.
On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée d'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0,1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.
On note A l'événement : « C_3 termine en dernier son opération ».
Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $[\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2)]$.
On se propose de calculer la probabilité de A.

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $\mathbb{E}(X_1)$ et sa variance $\mathbb{V}(X_1)$.
On définit la variable aléatoire $\Delta = |X_1 - X_2|$.

2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}\big([\Delta = 0]\big)$.

3. Soit n un entier naturel non nul.

a) Justifier : $\mathbb{P}\big([X_1 - X_2 = n]\big) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_2 = k]\big)\,\mathbb{P}\big([X_1 = n + k]\big)$.

b) En déduire : $\mathbb{P}\big([\Delta = n]\big) = \dfrac{2pq^n}{1+q}$.

4. ***a)*** Montrer que Δ admet une espérance $\mathbb{E}(\Delta)$ et la calculer.

b) Montrer : $\mathbb{E}((X_1 - X_2)^2) = 2\,\mathbb{V}(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $\mathbb{V}(\Delta)$ et la calculer.

5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $[X_3 > \Delta]$.

6. ***a)*** En déduire : $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([\Delta = k]\big)\,\mathbb{P}\big([X_3 > k]\big)$.

b) Exprimer $\mathbb{P}(A)$ à l'aide de p et q.

Partie II (`CUBES UNIQUEMENT`)

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0,1[$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda \in]0,+\infty[$. On note $q = 1-p$.
On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0,+\infty[, \quad \mathbb{P}\big([X = k] \cap [Y \leqslant t]\big) = \mathbb{P}\big([X = k]\big)\,\mathbb{P}\big([Y \leqslant t]\big)$$

7. Rappeler une densité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

8. On définit la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y}{X}$.

a) Montrer : $\forall t \in [0,+\infty[$, $\mathbb{P}\big([Z \geqslant t]\big) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = k]\big)\,\mathbb{P}\big([Y \geqslant kt]\big)$.

b) En déduire : $\forall t \in [0,+\infty[$, $\mathbb{P}\big([Z \geqslant t]\big) = \dfrac{p\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}{1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}$.

c) Montrer que la variable aléatoire Z admet une densité et déterminer une densité de Z.

Problème

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par les égalités suivantes :

$$f(e_1) = \frac{1}{3}\,(e_2 + e_3) \quad \text{et} \quad f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1$$

Partie 1 : Étude de f.

1. ***a)*** Écrire la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}$.

b) Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ puis celle de $\mathrm{Ker}(f)$.

c) Donner alors une base de $\mathrm{Ker}(f)$, puis en déduire une valeur propre de M ainsi que le sous-espace propre associé.

d) Déterminer les autres valeurs propres de M ainsi que les sous-espaces propres associés.

e) En déduire que M est diagonalisable.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Justifier sans calcul que P est inversible, puis déterminer la matrice D diagonale telle que : $M = PDP^{-1}$.

b) Calculer PQ puis en déduire P^{-1}.

c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel j, on a $M^j = PD^jP^{-1}$.

d) Écrire, pour tout entier naturel j non nul, la première colonne de la matrice M^j. Vérifier que ce résultat reste valable si $j = 0$.

Partie 2 : Étude d'une suite de variables aléatoires.

Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.
On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante.

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k^{\text{ème}}$ tirage.
- On procède au 1^{er} tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le $k^{\text{ème}}$ tirage ($k \in \mathbb{N}^*$) :
  - × soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.
  - × soit X_k a pris la valeur j, différente de 1. Dans ce cas on procède également au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

3. Reconnaître la loi de X_1.

4. Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.
On rappelle que `rd.randint(1,n+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cette partie et pour qu'il affiche la valeur de la variable X_k, l'entier k étant entré au clavier par l'utilisateur.

```
k = int(input('Entrez un nombre k supérieur à 2 : '))
X = rd.randint(1,4)
for i in range(k-1):
    tirage = rd.randint(1,4)
    if X == 1:
        X = __________
    else:
        if tirage != X:
            X = ___________
print(X)
```

5. On note U_k la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $\mathbb{P}\big([X_k = i]\big)$.

a) Déterminer les probabilités $\mathbb{P}_{[X_k=j]}\big([X_{k+1} = i]\big)$, pour tout couple (i, j) de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$.

b) On admet que $([X_k = 1], [X_k = 2], [X_k = 3])$ est un système complet d'évènements.
Déterminer, grâce à la formule des probabilités totales, la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a $U_{k+1} = AU_k$.

c) Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $U_k = AU_0$.

d) Vérifier : $A = M + \dfrac{1}{3}I$, puis établir que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $A^k = \sum\limits_{j=0}^{k} \dbinom{k}{j} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$.

e) En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k, puis vérifier que la loi de X_k est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([X_k = 1]\big) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\big([X_k = 2]\big) = \mathbb{P}\big([X_k = 3]\big) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)$$

f) `(CUBES UNIQUEMENT)` Montrer que la suite (X_k) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on donnera la loi.

g) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X_k)$ de X_k.

h) Écrire une fonction **Python**, notée `esp`, qui renvoie $\mathbb{E}(X_k)$ à l'appel de `esp(k)`.