DS4 barème (version A)

Exercice 1 (EDHEC 2004)

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à 2.
On note e_0, e_1, e_2 les fonctions définies, pour tout réel x par :

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = x \quad \text{et} \quad e_2(x) = x^2$$

et on rappelle que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.
Soit f l'application qui à toute fonction polynomiale P de E associe la fonction $Q = f(P)$, où Q est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel x associe $(x^2 - x)P(x)$.

1. *a)* Montrer que f est un endomorphisme de E.

- **2 pt** : f est à valeurs dans E
- **2 pt** : f est une application linéaire (**1 pt** pour citer la linéarité de la dérivation)

b) Déterminer $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ en fonction de e_0, e_1 et e_2.

- **1 pt** : $f(e_0) = 2e_0$
- **1 pt** : $f(e_1) = -2e_0 + 6e_1$
- **1 pt** : $f(e_2) = -6e_1 + 12e_2$

c) En déduire que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

- **2 pt** : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_0)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_1)) = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$

(seulement 1 pt à la question si justification existente mais imprécise)

d) Montrer sans calcul que f est un automorphisme de E.

- **1 pt** : A est triangulaire supérieure et tous les coefficients diagonaux de A sont non nuls donc A est inversible
- **1 pt** : f est inversible si et seulement si A est inversible

2. *a)* Donner les valeurs propres de A, puis en déduire que A est diagonalisable.

- **1 pt** : A est triangulaire supérieure donc les coefficients diagonaux de A sont les valeurs propres de A
- **1 pt** : $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 6, 12\}$
- **1 pt** : La matrice A possède 3 valeurs propres distinctes et $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

b) Déterminer les sous-espaces propres de A.

- **1 pt** : Ecriture du système linéaire associé à l'équation $AX = 2X$
- **1 pt** : Résolution de ce système
- **1 pt** : Conclusion $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

- **2 pt** : $E_6(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

- **2 pt** : $E_{12}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$

c) On compile le script **Python** suivant :

```
A = np.array([[2,-2,0],[0,6,-6],[0,0,12]])
print(al.matrix_rank(A-6*np.eye(3)))
```

Donner la valeur affichée dans la console **Python** et justifier à l'aide de la question précédente.

- **1 pt** : La console **Python** affiche la valeur 2
- **1 pt** : d'après le théorème du rang :

$$3 = \dim(E_6(A)) + \text{rg}(A - 6I)$$

3. a) Justifier l'existence d'une matrice P inversible dont la première ligne ne contient que des « 1 » telle que $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

- **1 pt** : La matrice A est diagonalisable. Donc il existe une matrice P inversible obtenue par concaténation des bases des sous-espaces propres de A, et une matrice D diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A telles que $A = PDP^{-1}$.

- **1 pt** : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

- **1 pt** : Initialisation
- **1 pt** : Utilisation hypothèse de récurrence dans l'hérédité
- **1 pt** : Utilisation question 3.a) dans l'hérédité

4. a) Déterminer la matrice P^{-1}.

- **2 pt** : algorithme du pivot de Gauss connu et bien présenté
- **1 pt** : $P^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(-1 pt à la question si introduction de fractions avant la fin + erreur de calcul)

b) En déduire explicitement, en fonction de n, la matrice A^n.

- **2 pt** : première multiplication correcte

$$\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \cdot 2^n & 5 \cdot 2^n & 3 \cdot 2^n \\ 0 & -5 \cdot 6^n & -5 \cdot 6^n \\ 0 & 0 & 2 \cdot 12^n \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 6^n & 12^n \\ 0 & -2 \cdot 6^n & -5 \cdot 12^n \\ 0 & 0 & 5 \cdot 12^n \end{pmatrix}$$

- 1 pt : deuxième multiplication correcte pour obtenir

$$A^n = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10\cdot 2^n & 5(2^n-6^n) & 3\cdot 2^n - 5\cdot 6^n + 2\cdot 12^n \\ 0 & 10\cdot 6^n & 10(6^n-12^n) \\ 0 & 0 & 10\cdot 12^n \end{pmatrix}$$

c) On dit qu'une suite de matrices (M_n) tend vers la matrice M, lorsque n tend vers $+\infty$, si chaque coefficient de M_n tend vers le coefficient situé à la même place dans M.
On pose $B = \dfrac{1}{12}\,A$. Montrer que la suite (B^n) tend vers une matrice J vérifiant $J^2 = J$.

- 2 pt : $\lim_{n\to+\infty} B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J$

- 1 pt : Vérification $J^2 = J$

Exercice 2 (ECRICOME 2014)

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in \,]0,+\infty[\end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \mathrm{e} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n existe.

- **1 pt : pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) > 0$**
- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité (existence + positivité)**

2. Écrire un programme en **Python** qui, pour une valeur N fournie par l'utilisateur, calcule et affiche u_N.

```
import numpy as np
N = int(input('Entrez un nombre entier N : '))
u = np.e
for i in range(N):
    u = u / np.log(1+u)
print(u)
```

- **1 pt : initialisation** `u`
- **1 pt : taille boucle for**
- **1 pt : mise à jour** `u`
- **1 pt : structure programme correcte (pas une fonction)**

3. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

- **1 pt : continuité sur $]0,+\infty[$**

- **1 pt : continuité en** 0

4. Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

- **1 pt : même raisonnement**

5. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de :

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

puis déterminer un équivalent de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0.

- **1 pt :** $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$
- **1 pt :** $\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x} = \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$
- **1 pt :** $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$

6. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

- **1 pt :** $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{2}$**. Ceci prouve que** f **est dérivable en** 0 **et** $f'(0) = \frac{1}{2}$
- **1 pt : D'après la question précédente :** $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0)$**. Donc** f' **est continue en** 0

7. Établir :

$$\forall x \geqslant \mathrm{e}-1, \quad f(x) \leqslant x \quad \text{ et } \quad (x+1)\,\ln(x+1) \geqslant (x+1)$$

En déduire :

$$\forall x \geqslant \mathrm{e}-1,\ f'(x) \geqslant 0$$

- **1 pt :** $\frac{1}{\ln(1+x)} \leqslant 1$ **donc** $f(x) \leqslant x$
- **1 pt :** $\ln(1+x) \geqslant 1$ **donc** $(x+1)\ln(1+x) \geqslant x+1$
- **1 pt :** $f'(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}}{(\ln(1+x))^2} = \frac{(x+1)\ln(1+x)-x}{(1+x)(\ln(1+x))^2}$
- **1 pt :** $(x+1)\ln(1+x) - x \geqslant 1$ **d'après ce qui précède et** $(1+x)(\ln(1+x))^2 > 0$

8. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{e}-1 \leqslant u_n$$

- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : hérédité**

9. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser la valeur de sa limite L.

- **1 pt : la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est décroissante et minorée par e** $-\,1$
- **1 pt : par théorème de convergence monotone, la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers un réel** $L \geqslant$ **e** $-\,1$**.**
- **1 pt : De plus,**
  - $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$ **par argument de suite extraite**
  - $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(L)$ **par continuité de** f **en** L **(on a bien** $L \geqslant 0$**.)**
- **1 pt :** $x = f(x) \iff x =$ **e** $-\,1$

Exercice 3 (EML 2010)

Les deux parties sont indépendantes

Partie I

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.
On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée d'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0,1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.
On note A l'événement : « C_3 termine en dernier son opération ».
Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $[\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2)]$.
On se propose de calculer la probabilité de A.

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $\mathbb{E}(X_1)$ et sa variance $\mathbb{V}(X_1)$.

- **1 pt : D'après l'énoncé,** $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$**. Autrement dit :**
  - × $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
  - × $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_1 = k]) = p\ q^{k-1}$.
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{1}{p}$ **et** $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{q}{p^2}$

On définit la variable aléatoire $\Delta = |X_1 - X_2|$.

2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([\Delta = 0])$.

- **1 pt :** $[\Delta = 0] = [|X_1 - X_2| = 0] = [X_1 - X_2 = 0]$
- **1 pt : La famille** $([X_2 = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ **est un système complet d'événements**
- **1 pt : d'après la formule des probabilités totales,**

$$\mathbb{P}([X_1 - X_2 = 0]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 - X_2 = 0])$$

- **1 pt : par indépendance,**

$$\mathbb{P}([X_1 - X_2 = 0]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\ \mathbb{P}([X_1 = k])$$

- **1 pt : en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison** $q^2 \in]-1,1[$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([\Delta = 0]) = \dfrac{p}{1+q}$

3. Soit n un entier naturel non nul.

a) Justifier : $\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\,\mathbb{P}([X_1 = n + k])$.

- **1 pt : La famille** $([X_2 = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ **est un système complet d'événements**
- **1 pt : d'après la formule des probabilités totales,**

$$\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 - X_2 = n])$$

- **1 pt : par indépendance de** X_1 **et** X_2

b) En déduire : $\mathbb{P}([\Delta = n]) = \dfrac{2pq^n}{1+q}$.

- **1 pt :** $[\Delta = n] \ = \ [\ |X_1 - X_2| = n] \ = \ [X_1 - X_2 = n] \ \cup \ [X_1 - X_2 = -n]$
- **1 pt :** $n \neq 0$**, donc les événements** $[X_1 - X_2 = n]$ **et** $[X_1 - X_2 = -n]$ **sont incompatibles**
- **2 pts :** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big(\,[X_1 - X_2 = n]\,\big) = \dfrac{p\,q^n}{1+q}$
- **1 pt : de même,** $\mathbb{P}([X_2 - X_1 = n]) = \dfrac{p\,q^n}{1+q}$

4. a) Montrer que Δ admet une espérance $\mathbb{E}(\Delta)$ et la calculer.

- **1 pt : Les v.a.r.** X_1 **et** X_2 **étant à valeurs entières,** $\Delta(\Omega) \subset \mathbb{N}$
- **1 pt : La v.a.r.** Δ **admet une espérance si et seulement si la série** $\sum\ n\ \mathbb{P}\big(\,[\Delta = n]\,\big)$ **est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.**
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{N}\ k\,\mathbb{P}\big(\,[\Delta = k]\,\big) = 2\ \dfrac{p\,q}{1+q}\ \sum\limits_{k=1}^{N}\ k\,q^{k-1}$
- **1 pt : en reconnaissant la somme partielle d'ordre** N **d'une série géométrique dérivée première de raison** $q \in\ ]-1, 1[$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(\Delta) = \dfrac{2\,q}{(1+q)(1-q)} = \dfrac{2\,q}{p(1+q)}$

b) Montrer : $\mathbb{E}((X_1 - X_2)^2) = 2\,\mathbb{V}(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $\mathbb{V}(\Delta)$ et la calculer.

- **1 pt :** $(X_1 - X_2)^2 \ = \ {X_1}^2 - 2\,X_1X_2 + {X_2}^2$
- **1 pt : La v.a.r.** $(X_1 - X_2)^2$ **admet une espérance car elle est la combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une**
- **1 pt : linéarité de l'espérance**
- **1 pt : les v.a.r.** X_1 **et** X_2 **sont indépendantes**
- **1 pt : les v.a.r.** X_1 **et** X_2 **ont même loi donc** $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2)$ **et** $\mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{E}(X_2^2)$
- **1 pt : par la formule de Kœnig-Huygens**
- **1 pt :** $\Delta^2 = |X_2 - X_1|^2 = (X_2 - X_1)^2$
- **2 pts :** $\mathbb{V}(\Delta) \ = \ 2\ \dfrac{q\,(1+q^2)}{p^2\,(1+q)^2}$

5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $[X_3 > \Delta]$.

- **1 pt :** $A \ = \ [\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2)] \ = \ [X_3 > \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)]$
- **1 pt :** $\Delta = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)$
- **1 pt : utilisation d'une issue**

6. a) En déduire : $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k])\,\mathbb{P}([X_3 > k])$.

- **1 pt : La famille** $([\Delta = k])_{k\in\mathbb{N}}$ **est un système complet d'événements**
- **1 pt : par la formule des probabilités totales,**

$$\mathbb{P}([X_3 > \Delta]) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k] \ \cap \ [X_3 > \Delta])$$

- **1 pt :** Δ **et** X_3 **sont indépendantes par le lemme des coalitions** *b)* Exprimer $\mathbb{P}(A)$ à l'aide de p et q.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_3 > \Delta]) = \mathbb{P}([\Delta = 0]) \ \times\ \mathbb{P}([X_3 > 0]) + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k]) \ \times\ \mathbb{P}([X_3 > k])$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([\Delta = 0]) \ \times\ \mathbb{P}([X_3 > 0]) = \dfrac{p}{1+q}$ **(d'après la question *2.*)**
- **1 pt : pour tout** $k \in \mathbb{N}$ **:** $\mathbb{P}([X_3 > k]) = q^k$
- **1 pt : en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison** $q^2 \in\ ]-1,1[$
- **2 pts :** $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1+q^2}{(1+q)^2}$

Partie II

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, $p \in\ ]0,1[$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda \in\ ]0,+\infty[$. On note $q = 1-p$. On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0,+\infty[, \quad \mathbb{P}([X=k] \cap [Y \leqslant t]) = \mathbb{P}([X=k])\, \mathbb{P}([Y \leqslant t])$$

7. Rappeler une densité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

- **1 pt : Comme** $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$**, alors une densité de** Y **est :** $f_Y : x \mapsto \begin{cases} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \textbf{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \textbf{si } x < 0 \end{cases}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{\lambda}$ **et** $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

8. On définit la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y}{X}$.

a) Montrer : $\forall t \in [0,+\infty[$, $\mathbb{P}([Z \geqslant t]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k])\, \mathbb{P}([Y \geqslant kt])$.

- **1 pt : la famille** $([X=k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ **forme un système complet d'événements**
- **1 pt : par formule des probabilités totales,**

$$\mathbb{P}([Z \geqslant t]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k] \cap [Z \geqslant t])$$

- **1 pt :** X **et** Y **sont indépendantes**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z \geqslant t]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k])\, \mathbb{P}([Y \geqslant kt])$

b) En déduire : $\forall t \in [0,+\infty[$, $\mathbb{P}([Z \geqslant t]) = \dfrac{p\, \mathrm{e}^{-\lambda t}}{1 - q\, \mathrm{e}^{-\lambda t}}$.

- **1 pt : en identifiant la somme de la série géométrique de raison** $q\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$ **où** $\left|q\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\right| < 1$ **(car** $|q| < 1$ **et** $t \geqslant 0$**)**
- **1 pt : car** $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ **et** $kt \geqslant 0$
- **2 pts :** $\mathbb{P}([Z \geqslant t]) = \dfrac{p\, \mathrm{e}^{-\lambda t}}{1 - q\, \mathrm{e}^{-\lambda t}}$

c) Montrer que la variable aléatoire Z admet une densité et déterminer une densité de Z.

- **1 pt :** $Z(\Omega) \subset [0,+\infty[$

- **3 pts :** $F_Z : x \mapsto \begin{cases} 1 - \dfrac{p\,\mathbf{e}^{-\lambda x}}{1 - q\,\mathbf{e}^{-\lambda x}} & \textbf{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \textbf{si } x < 0 \end{cases}$
- **2 pts : La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0**
- **2 pts : Une densité f_Z de Z est donc :** $f_Z : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda\,p\,\mathbf{e}^{-\lambda x}}{\left(1 - q\,\mathbf{e}^{-\lambda x}\right)^2} & \textbf{si } x > 0 \\ 0 & \textbf{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

Problème (EDHEC 2010)

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par les égalités suivantes :

$$f(e_1) = \frac{1}{3}\,(e_2 + e_3) \quad \text{et} \quad f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1$$

Partie 1 : Étude de f.

1. a) Écrire la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}$.

- **1 pt :** $f(e_1) = 0\ e_1 + \frac{1}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_3$ **donc** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1 + 0\ e_2 + 0\ e_3$ **donc** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_2)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_3)) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt : par concaténation** $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ puis celle de $\mathrm{Ker}(f)$.

- **1 pt :** $\mathrm{rg}(f) = 2$
- **1 pt : D'après le théorème du rang :** $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$**. Donc** $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 2 = 1$

c) Donner alors une base de $\mathrm{Ker}(f)$, puis en déduire une valeur propre de M ainsi que le sous-espace propre associé.

- **1 pt :** $e_2 - e_3 \in \mathrm{Ker}(f)$
- **1 pt : la famille** $\mathcal{F}_0 = (e_2 - e_3)$ **:**
  - **est libre car constituée d'un unique vecteur non nul**
  - **vérifie** $\mathrm{Card}(\mathcal{F}_0) = 1 = \dim(\mathrm{Ker}(f))$
- **1 pt :** 0 **est valeur propre de** M
- **1 pt :** $E_0(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

d) Déterminer les autres valeurs propres de M ainsi que les sous-espaces propres associés.

- **1 pt :** $\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ **donc** $\frac{2}{3}$ **est une valeur propre de** M
- **1 pt :** $\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **donc** $-\frac{2}{3}$ **est une valeur propre de** M
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(M) = \{-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\}$
- **1 pt :** $\dim(E_{-\frac{2}{3}}(M)) + \dim(E_0(M)) + \dim(E_{\frac{2}{3}}(M)) \leqslant 3$
- **1 pt : ces trois nombres sont des entiers non nuls, donc ils sont nécessairement tous égaux à** 1

- **1 pt :** $E_{-\frac{2}{3}}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ **et** $E_{\frac{2}{3}}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

e) En déduire que M est diagonalisable.

- **1 pt :** M **possède** 3 **valeurs propres distinctes et** $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$**, donc** M **est diagonalisable**

2. On pose $P = \begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\\0 & 2 & -2\end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Justifier sans calcul que P est inversible, puis déterminer la matrice D diagonale telle que : $M = PDP^{-1}$.

- **1 pt : La matrice** P **est obtenue par concaténation des trois vecteurs propres trouvés précédemment, associés à trois valeurs propres distinctes de** M**. Ces trois vecteurs propres forment donc une famille libre de** $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$**, de cardinal** $3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$**, c'est-à-dire une base de** $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
- **1 pt : Notons** $\mathscr{B}' = \left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ **cette base. On a alors** $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ **donc** P **est inversible.**
- **1 pt : D'après la formule de changement de base :** $D = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 0 & 0\\0 & -\frac{2}{3} & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

b) Calculer PQ puis en déduire P^{-1}.

- **1 pt :** $PQ = 4I$
- **1 pt :** $P^{-1} = \dfrac{1}{4}Q$

c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel j, on a $M^j = PD^jP^{-1}$.

- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : hérédité (utilisation de l'hypothèse de récurrence)**
- **1 pt : hérédité (utilisation de la question *2.a)*)**

d) Écrire, pour tout entier naturel j non nul, la première colonne de la matrice M^j. Vérifier que ce résultat reste valable si $j = 0$.

- **2 pts : la première colonne de** M^j **est** $\begin{pmatrix}\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^j + \left(-\frac{2}{3}\right)^j}{2}\\[2mm]\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j}{4}\\[2mm]\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j}{4}\end{pmatrix}$
- **1 pt : vérification pour** $j = 0$

Partie 2 : Étude d'une suite de variables aléatoires.

Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.
On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k^{\text{ème}}$ tirage.
- On procède au 1[er] tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.

- Après le $k^{\text{ème}}$ tirage ($k \in \mathbb{N}^*$) :
  - × soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.
  - × soit X_k a pris la valeur j, différente de 1, dans ce cas on procède également au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

3. Reconnaître la loi de X_1.

- 1 pt : description expérience

- 1 pt : description v.a.r.

- 1 pt : $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 3 \rrbracket)$

4. Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.
On rappelle que `rd.randint(1,n+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cette partie et pour qu'il affiche la valeur de la variable X_k, l'entier k étant entré au clavier par l'utilisateur.

```
1  k = int(input('Entrez un nombre k supérieur à 2 : '))
2  X = rd.randint(1,4)
3  for i in range(k-1):
4      tirage = rd.randint(1,4)
5      if X == 1:
6          X = tirage
7      else:
8          if tirage != X:
9              X = 1
10 print(X)
```

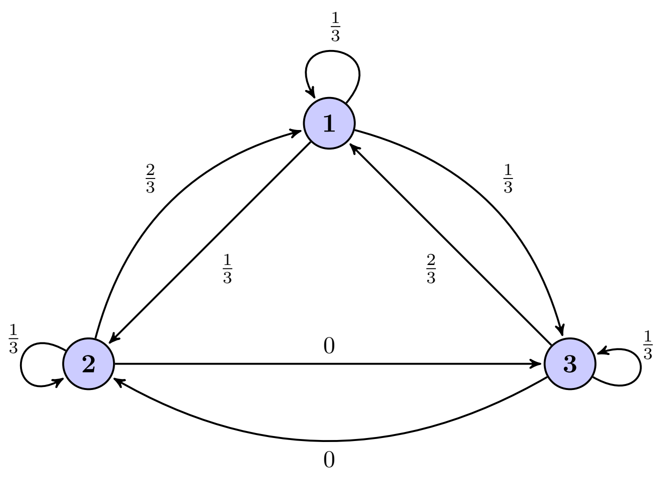
- 1 pt : ligne 6 `X = tirage`

- 1 pt : ligne 9 `X = 1`

5. On note U_k la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $\mathbb{P}([X_k = i])$.

a) Déterminer les probabilités $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i])$, pour tout couple (i, j) de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$.

- 3 pts : 1/2 pt par proba conditionnelle



b) On admet que $\big([X_k = 1], [X_k = 2], [X_k = 3] \big)$ est un système complet d'événements.
Déterminer, grâce à la formule des probabilités totales, la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a $U_{k+1} = A\, U_k$.

- 2 pts : $\mathbb{P}([X_{k+1}=1]) = \dfrac{1}{3}\ \mathbb{P}([X_k=1]) + \dfrac{2}{3}\ \mathbb{P}([X_k=2]) + \dfrac{2}{3}\ \mathbb{P}([X_k=3])$ **(dont 1 pt pour :** $\forall i \in [\![1,3]\!]$**,** $\mathbb{P}([X_k=i]) \neq 0$**)**

- 1 pt : $\mathbb{P}([X_{k+1}=2]) = \dfrac{1}{3}\ \mathbb{P}([X_k=1]) + \dfrac{1}{3}\ \mathbb{P}([X_k=2]) + 0\ \mathbb{P}([X_k=3])$

- 1 pt : $\mathbb{P}([X_{k+1}=3]) = \dfrac{1}{3}\ \mathbb{P}([X_k=1]) + 0\ \mathbb{P}([X_k=2]) + \dfrac{1}{3}\ \mathbb{P}([X_k=3])$

- 1 pt : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

c) Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $U_k = A^k\ U_0$.

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

- 1 pt : cas $k=0$

d) Vérifier : $A = M + \dfrac{1}{3}I$, puis établir que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $A^k = \sum\limits_{j=0}^{k} \dbinom{k}{j} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$.

- 1 pt : $A = M + \dfrac{1}{3}I$

- 1 pt : les matrices $\dfrac{1}{3}\ I$ **et** M **commutent**

- 1 pt : $I^n = I$

e) En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k, puis vérifier que la loi de X_k est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([X_k=1]\big) = \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\big([X_k=2]\big) = \mathbb{P}\big([X_k=3]\big) = \frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)$$

- 1 pt : $A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **est la première colonne de** A^k**.**

- 2 pts : $(A^k_{1,1}) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^k$

- 1 pt : $(A^k)_{2,1} = (A^k)_{3,1} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^k$

- 1 pt : conclure avec qst ***3.c)***

f) `(CUBES UNIQUEMENT)` Montrer que la suite (X_k) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on donnera la loi.

- 1 pt : On note X **une variable aléatoire telle que**

- $X(\Omega) = \{1,2,3\}$
- $\mathbb{P}([X=1]) = \dfrac{1}{2}$ **et** $\mathbb{P}([X=2]) = \mathbb{P}([X=3]) = \dfrac{1}{4}$

- 1 pt : On a $\left|-\dfrac{1}{3}\right| < 1$ **donc, d'après la question précédente :**

- $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}([X_k=1]) = \dfrac{1}{2}$

× $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}([X_k = 2]) = \lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}([X_k = 3]) = \dfrac{1}{4}$

g) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X_k)$ de X_k.

- 1 pt : X_k admet une espérance

- 2 pts : $\mathbb{E}(X_k) = \dfrac{7}{4} - \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^k$

h) Écrire une fonction **Python**, notée `esp`, qui renvoie $\mathbb{E}(X_k)$ à l'appel de `esp(k)`.

- 2 pts : 1 pt par ligne

Démonstration.

```
def esp(k):
    return 7/4 - (3/4)*(-1/3)**k
```

□