DS4 barème (version B)

Le but du problème est d'étudier le renouvellement d'un des composants d'un système complexe (une machine, un réseau de distribution d'énergie etc...) formé d'un assemblage de différentes pièces susceptibles de tomber en panne. On s'intéresse donc à une de ces pièces susceptibles de se casser ou de tomber en panne et on se place dans la situation idéale où dès que la pièce est défectueuse, elle est immédiatement remplacée. Dans une première partie, on étudie quelques propriétés fondamentales des variables aléatoires discrètes. Puis, dans une deuxième partie, on étudie la probabilité de devoir changer la pièce un certain jour donné. Enfin, dans une troisième partie on cherche à estimer le temps de fonctionnement du système avec un certain nombre de pièces de rechange à disposition.
Dans tout le problème, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X et $\mathbb{V}(X)$ sa variance.
La deuxième partie peut être traitée en admettant si besoin les résultats de la première partie.

Première partie

Dans cette première partie, on étudie les propriétés asymptotiques d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. a) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) = \mathbb{P}([X > j-1]) - \mathbb{P}([X > j])$$

- **1 pt : $[X > j] \ \cup \ [X = j] \ = \ [X > j-1]$ car X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$**
- **1 pt : incompatibilité citée**

b) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X = j]) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) - p\,\mathbb{P}([X > p])$$

- **1 pt : $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X = j]) = \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X > j-1]) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X > j])$**
- **1 pt : décalage d'indice**
- **1 pt : fin du calcul**

2. a) On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X) = \mu$.

i. Justifier la convergence de la série de terme général $k\,\mathbb{P}([X = k])$.

- **1 pt : La variable aléatoire X est à valeur dans $\mathbb{N}^*$**
- **1 pt : Ainsi, elle admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n\ \mathbb{P}([X = n])$ est absolument convergente**

ii. Montrer que :

$$\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}([X = k]) = 0$$

- **1 pt : La série de terme général $k\,\mathbb{P}([X = k])$ étant convergente, on obtient, par relation de Chasles :**

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^{p} k\ \mathbb{P}([X = k]) + \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k])$$

(0 pt si la relation de Chasles n'est pas citée)

- **1 pt :** $\lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X=k]) - \sum\limits_{k=1}^{p} k\ \mathbb{P}([X=k]) = 0$

iii. En déduire que :

$$\lim_{p\to+\infty} p\ \mathbb{P}([X>p]) = 0$$

- **1 pt :** X **est à valeurs dans** $\mathbb{N}^*$ **donc**

$$[X>p] \ = \ \bigcup_{k=p+1}^{+\infty} [X=k]$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X>p]) = \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k])$ **par incompatibilité**
- **1 pt :** $0 \ \leqslant\ p\ \mathbb{P}([X>p]) \ = \ \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} p\ \mathbb{P}([X=k]) \ \leqslant\ \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X=k])$
- **1 pt : théorème d'encadrement cité**

iv. Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}([X>j])$ converge.

- **1 pt :** $\sum\limits_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) = \sum\limits_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j]) + p\ \mathbb{P}([X>p])$
- **1 pt : somme de suites convergentes**

v. Montrer que : $\mu = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j])$.

- **1 pt : passage à la limite dans l'inégalité de la question précédente**

b) On suppose que $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j])$ converge.

i. Déterminer le sens de variation de la suite $(v_p)_{p\geqslant 1}$ définie par :

$$v_p = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j])$$

- **1 pt :** $v_{p+1} - v_p \ = \ \sum\limits_{j=0}^{p} \mathbb{P}([X>j]) - \sum\limits_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) \ = \ \mathbb{P}([X>p]) \ \geqslant\ 0$

ii. Comparer $\sum\limits_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X=j])$ et $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j])$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j]) \ = \ \sum\limits_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - p\ \mathbb{P}([X>p]) \ \leqslant\ \sum\limits_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j])$
- **1 pt :** $\sum\limits_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j]) - \sum\limits_{j=p}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j]) \ \leqslant\ \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j])$

iii. En déduire que X admet une espérance.

- **1 pt : La v.a.r.** X **admet une espérance si et seulement si la série** $\sum\ j\ \mathbb{P}([X=j])$ **est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente**
- **1 pt : La suite** $\left(\sum\limits_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j])\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ **est croissante et majorée**
- **1 pt : théorème de convergence monotone cité**

c) Conclure des questions précédentes que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge.

- **1 pt : En question *2.a)*, on a démontré que si X admet une espérance, alors la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ est convergente (résultat de la question *2.a)iv.*)**
  En question *2.b)*, on a démontré que si la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ est convergente alors X admet une espérance (résultat de la question *2.a)iii.*)

3. On suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel j on ait :

$$\mathbb{P}([X > j]) = \frac{1}{(j+1)^\alpha} \qquad (*)$$

a) Légitimer que $(*)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

- **1 pt : Soit $j \in \mathbb{N}^*$. D'après la question *1.a)* :**

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X = j]) & = & \mathbb{P}([X > j-1]) - \mathbb{P}([X > j]) \\ & = & \dfrac{1}{j^\alpha} - \dfrac{1}{(j+1)^\alpha} \ \geqslant \ 0 \end{array}$$

- **1 pt : $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = j]) = 1$ (somme télescopique)**

b) Montrer que X admet une espérance si et seulement si α est strictement supérieur à 1.

- **1 pt : D'après la question *2.c)*, la v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge**
- **1 pt : $\mathbb{P}([X > j]) = \dfrac{1}{(j+1)^\alpha} \underset{j \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{j^\alpha}$ et les séries sont à termes positifs**
- **1 pt : La série $\sum\limits_{j \geqslant 1} \dfrac{1}{j^\alpha}$ est une série de Riemann d'exposant α.**
  Elle est convergente si et seulement si $\alpha > 1$
- **1 pt : d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge si et seulement si $\alpha > 1$**

c) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right)$$

- **1 pt : $\mathbb{P}([X = j]) = \mathbb{P}([X > j-1]) - \mathbb{P}([X > j]) = \dfrac{1}{j^\alpha} - \dfrac{1}{(j+1)^\alpha} = \dfrac{1}{j^\alpha}\left(1 - \dfrac{j^\alpha}{(j+1)^\alpha}\right)$**
- **1 pt : $\dfrac{j^\alpha}{(j+1)^\alpha} = \left(\dfrac{j}{j+1}\right)^\alpha = \left(\dfrac{\cancel{j}}{\cancel{j}}\ \dfrac{1}{1+\frac{1}{j}}\right)^\alpha = \dfrac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}$**

d) i. Étudier les variations de $f : x \mapsto 1 - (1+x)^{-\alpha} - \alpha x$ sur $[0,1]$.

- **1 pt : f est dérivable sur $[0,1]$**
- **1 pt : $f'(x) \ = \ \alpha\ (1+x)^{-\alpha-1} - \alpha \ = \alpha\ \left(\dfrac{1}{(1+x)^{\alpha+1}} - 1\right) \ = \alpha\ \dfrac{1-(1+x)^{\alpha+1}}{(1+x)^{\alpha+1}}$**
- **1 pt :**

x	$0 \qquad\qquad 1$
Signe de $f'(x)$	$-$
Variations de f	$0 \searrow 1-\alpha-\frac{1}{2^\alpha}$

ii. Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X=j]) \leqslant \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}$$

- **1 pt : la fonction f est décroissante sur $[0,1]$. Ainsi :**

$$\forall x \in [0,1], \ f(x) \ \leqslant \ f(0) = 0$$

- **1 pt : Soit $j \in \mathbb{N}^*$. On applique la formule à $x = \dfrac{1}{j}$**
- **1 pt : justification $\dfrac{1}{j} \in [0,1]$**

e) Montrer, en utilisant le résultat de ***3.c)***, que :

$$\lim_{j \to +\infty} j^{\alpha+1}\,\mathbb{P}([X=j]) = \alpha$$

- **1 pt : $(1+x)^{-\alpha} \ = \ 1-\alpha\ x + x\ \varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$**
- **1 pt : $j^{\alpha+1}\ \mathbb{P}([X=j]) = \alpha - \varepsilon\left(\dfrac{1}{j}\right)$**

f) Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.

- **1 pt : La v.a.r. X admet une variance si et seulement si la série $\sum j^2\ \mathbb{P}([X=j])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente**
- **1 pt : $\lim\limits_{j\to+\infty} j^{\alpha+1}\ \mathbb{P}([X=j]) = \alpha \neq 0$ donc $j^2\ \mathbb{P}([X=j]) \underset{j\to+\infty}{\sim} \alpha\ j^{1-\alpha} = \alpha\ \dfrac{1}{j^{\alpha-1}}$**
- **1 pt : les séries sont à termes positifs**
- **1 pt : La série $\sum\limits_{j\geqslant 1} \dfrac{1}{j^{\alpha-1}}$ est une série de Riemann d'exposant $\alpha-1$.**
  Elle est donc convergente si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ *i.e.* ssi $\alpha > 2$
- **1 pt : par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum j^2\ \mathbb{P}([X=j])$ est convergente si et seulement si $\alpha > 2$**

Deuxième partie : Étude de la probabilité de panne un jour donné.

Dans cette deuxième partie, on suppose donnée une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geqslant 1}$ mutuellement indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Pour tout entier i non nul, X_i représente la durée de vie en jours du $i^{\text{ème}}$ composant en fonctionnement. Soit k un entier naturel non nul. On note $T_k = X_1 + \ldots + X_k$. T_k représente donc le jour où le $k^{\text{ème}}$ composant tombe en panne. On fixe un entier naturel n non nul représentant un jour donné et on considère l'événement A_n : « le composant en place le jour n tombe en panne » c'est-à-dire A_n : « il existe k entier naturel non nul tel que $T_k = n$ », et on se propose d'étudier $\mathbb{P}(A_n)$.

4. Pour tout entier naturel non nul j, on note $p_j = \mathbb{P}([X_1 = j])$ et $u_j = \mathbb{P}(A_j)$. On suppose que pour tout entier naturel non nul j, on a $p_j \neq 0$. On pose de plus par convention $u_0 = 1$.

a) Montrer que : $u_1 = p_1$.

- **1 pt : L'événement $[X_1 = 1]$ est réalisé si le premier composant en place tombe en panne le jour 1.**

  L'événement A_1 est réalisé si le composant en place le jour 1 tombe en panne lors de ce jour
- **1 pt : Les variables X_i sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Ceci signifie en particulier que chaque composant à une durée de vie d'au moins un jour. Ainsi, le seul composant en place le jour 1 est le premier composant. On en déduit : $[X_1 = 1] \ = \ A_1$**

b) i. Montrer que : $A_2 \ = \ [X_1 = 2] \ \cup \ ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$.

- **1 pt : Supposons que l'événement A_2 est réalisé. Cela signifie que le composant en place le jour 2 tombe en panne lors de ce jour. Il reste alors à déterminer quel composant est en place lors du deuxième jour. Deux cas se présentent :**
  - × **soit le premier composant est tombé en panne après un jour.**
    Dans ce cas, c'est le deuxième composant qui était en place lors du deuxième jour.
    S'il tombe en panne en jour 2 c'est qu'il est resté opérationnel un jour.
    Dans ce cas, l'événement $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$ est réalisé.
  - × **soit le premier composant est resté en vie strictement plus d'un jour.**
    Dans ce cas, c'est ce composant qui est en place lors du deuxième jour.
    S'il tombe en panne en jour 2 c'est qu'il est resté opérationnel deux jours.
    Dans ce cas, l'événement $[X_1 = 2]$ est réalisé.
- **1 pt : Supposons que l'événement $[X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$ est réalisé.**
  Ainsi, soit $[X_1 = 2]$ est réalisé et alors le premier composant a une durée de vie de 2 jours ; soit $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$ est réalisé et alors les deux premiers composants ont duré chacun un jour. Dans les deux cas, le composant en place le jour 2 tombe en panne : A_2 est réalisé.

ii. En déduire u_2 en fonction de p_1 et p_2.

- **1 pt : Les événements $[X_1 = 2]$ et $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$ sont incompatibles**
- **1 pt : indépendance de X_1 et X_2**
- **1 pt : X_1 et X_2 ont même loi**
- **1 pt : $u_2 = p_2 + p_1^2$**

c) Pour tout entier naturel i, on pose $\tilde{X}_i = X_{i+1}$.

i. Montrer que les variables $\tilde{X}_i$ sont mutuellement indépendantes, indépendantes de X_1 et de même loi que X_1.

- **1 pt : la suite $(X_i)_{i \geqslant 2}$ est une suite de variables mutuellement indépendantes et $(X_i)_{i \geqslant 2} = (\tilde{X}_i)_{i \geqslant 1}$ donc $(\tilde{X}_i)_{i \geqslant 1}$ est une suite de variables mutuellement indépendantes**
- **1 pt : pour $i \geqslant 1$, $\tilde{X}_i = X_{i+1}$ est indépendant de X_1 car $(X_i)_{i \geqslant 1}$ est une suite de variables mutuellement indépendantes**
- **1 pt : pour $i \geqslant 0$, $\tilde{X}_i = X_{i+1}$ a même loi que X_1 par propriété de la suite de variables $(X_i)_{i \geqslant 1}$**

ii. Soit k un entier naturel non nul strictement inférieur à n. Montrer que :

$$A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup_{j \geqslant 1} \left[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n - k\right]$$

- **1 pt :** $A_n = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} [T_j = n]$
- **1 pt :** $A_n = [X_1 = n] \ \cup \ \bigcup\limits_{j \geqslant 2} [X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n]$
- **2 pts :** $[X_1 = k] \ \cap \ A_n = \bigcup\limits_{j \geqslant 2} \Big([X_1 = k] \ \cap \ [k + X_2 + \ldots + X_j = n] \Big)$
  (1 pt pour l'argument $k < n$)
- **1 pt :** $A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup\limits_{j \geqslant 1} \Big(\Big[\tilde{X}_1 + \ldots + \tilde{X}_j = n - k \Big] \Big)$

iii. En déduire que pour tout entier naturel k non nul strictement inférieur à n :

$$\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-k})$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) = \dfrac{\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{j \geqslant 1} [X_1 = k] \ \cap \ \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n - k \Big] \Big)}{\mathbb{P}([X_1 = k])}$
- **1 pt :**

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j \geqslant 1} [X_1 = k] \ \cap \ \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n - k \Big] \Big) \\
&\qquad = \sum_{j \geqslant 1} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}\Big(\Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n - k \Big] \Big) \\
&\qquad\qquad = \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \sum_{j \geqslant 1} \mathbb{P}\Big([X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n - k] \Big)
\end{aligned}$$

- **1 pt : lemme des coalitions**
- **1 pt :** $X_1 + X_2 + \ldots + X_j$ **et** $\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j$ **ont même loi**
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_{n-k}) = \sum\limits_{j \geqslant 1} \mathbb{P}\Big([X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n - k] \Big)$

d) Montrer que :

$$u_n = u_{n-1} \ p_1 + \ldots + u_0 \ p_n$$

- **1 pt : La famille** $\big([X_1 = k] \big)_{k \in \mathbb{N}^*}$ **forme un système complet d'événements**
- **1 pt : par la formule des probabilités totales :**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) + \mathbb{P}([X_1 = n] \cap A_n) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n)
\end{aligned}$$

- **1 pt : pour tout $k \geqslant n + 1$, on a :** $[X_1 = k] \cap A_n = \varnothing$
- **1 pt :** $[X_1 = n] \subset A_n$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_n) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) + \mathbb{P}([X_1 = n])$
  (valide car pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_1 = k]) \neq 0$)
- **1 pt : on obtient la formule voulue puisque $u_0 = 1$ par convention**

e) En **Python**, soit $P = [p_1, p_2, ..., p_n]$ le vecteur ligne tel que $P[j] = p_{j+1}$ pour j dans $[\![0, n-1]\!]$. Écrire un programme en **Python** qui calcule u_n à partir de P.

```python
import numpy as np
def calcSuiteU(P):
    n = len(P) # Récupère la taille de la liste P
    U = np.zeros(n+1) # Vecteur de taille n+1 rempli de zéros
    U[0] = 1 # Initialisation
    # Boucle qui remplit le vecteur U avec les termes de la suite
    for k in range(n):
        S = 0
        for i in range(k+1): # Boucle qui calcule une somme
            S = S + U[k-i] * P[i]
        U[k+1] = S
    return U[n]
```

- **1 pt :** `n = len(P)` **# Récupère la taille de la liste P**
- **1 pt : création et initialisation du vecteur** `U`
- **1 pt : boucle qui remplit** `U`
- **2 pts : boucle qui calcule la somme**
- **1 pt : renvoie de** `U[n]`

5. Soit λ un réel appartenant à $]0, 1[$.

Dans cette question, on suppose que X_1 suit la loi géométrique de paramètre λ.
Pour tout entier naturel j non nul, on a donc $\mathbb{P}([X_1 = j]) = \lambda(1-\lambda)^{j-1}$.

a) Calculer $\mathbb{P}([X_1 > k])$ pour tout entier naturel k non nul.

- **1 pt :** $[X_1 > k] = \bigcup\limits_{i=k+1}^{+\infty} [X_1 = i]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_1 > k]) = \sum\limits_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i]) = \sum\limits_{i=k+1}^{+\infty} \lambda(1-\lambda)^{i-1}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_1 > k]) = (1-\lambda)^k$
- **1 pt : arguments incompatibilité et** $|1-\lambda| < 1$

b) Calculer $\mathbb{P}_{[X_1>k]}([X_1 = k+1])$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[X_1>k]}([X_1 = k+1]) = \dfrac{\mathbb{P}([X_1 = k+1])}{\mathbb{P}([X_1 > k])}$ **(car** $[X_1 = k+1] \subseteq [X_1 > k]$**)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[X_1>k]}([X_1 = k+1]) = \lambda$

c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $\mathbb{P}(A_n) = \lambda$.

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité**
  - × **1 pt : récurrence forte**
  - × **1 pt : cas** $u_0 = 1$ **à part**
  - × **1 pt : calculs corrects**

6. On suppose dans cette question que p_1 vérifie $0 < p_1 < 1$ et que $p_2 = 1 - p_1$.
Pour simplifier, on posera $p = p_1 = 1 - p_2$.

a) Que vaut p_i pour i supérieur ou égal à 3 ?

- **1 pt : La famille** $\big([X_1 = k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ **forme un système complet d'événements**

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=3}^{+\infty} p_k = 0$**. Or, pour tout** $k \geqslant 3$**,** $p_k \geqslant 0$**, donc, pour tout** $k \geqslant 3$**,** $p_k = 0$

b) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$.

- **1 pt :** $u_n = u_{n-1}\ p_1 + u_{n-2}\ p_2 + \sum\limits_{k=3}^{n} u_{n-k} p_k$ **(découpage valide car** $n \geqslant 2$**)**
- **1 pt :** $u_n = u_{n-1}\ p + u_{n-2}\ (1-p)$
- **1 pt :** $M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\ u_{n-1} + (1-p)\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$

c) i. Diagonaliser la matrice M.

- **1 pt :** λ **est valeur propre de** M **ssi** $\det(M - \lambda I_2) = 0$
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(M) = \{p-1, 1\}$
- **1 pt : La matrice** M **est carrée d'ordre** 2 **et admet deux valeurs propres distinctes** 1 **et** $p-1$ **(**$p-1 \neq 1$ **car** $p \neq 2$**). Elle est donc diagonalisable.**
- **1 pt :** $E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt :** $E_{-(1-p)}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt :** $M = PDP^{-1}$ **où** $P = \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **et** $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix}$

ii. Montrer que :

$$M^{n-1} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- **1 pt :** $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt : par récurrence immédiate, pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$ **:** $M^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$
- **1 pt :** $M^{n-1} = \frac{1}{2-p} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(p-1)^n & (p-1)^n \\ -(p-1)^{n-1} & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \right)$

d) i. Exprimer u_n en fonction de p et de n.

- **1 pt : par récurrence immédiate** $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$
- **2 pts :** $u_n = \frac{1}{2-p} \left(1 - (p-1)^{n+1}\right)$

ii. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

- **1 pt :** $|p-1| < 1$ **donc** $\lim\limits_{n \to +\infty} (p-1)^{n+1} = 0$
- **1 pt :** $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2-p}$

Troisième partie : Étude de la durée de fonctionnement.

Comme dans la partie précédente, on suppose donnée une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geqslant 1}$ indépendantes et de même loi, telle que pour tout entier i non nul, X_i représente la durée de vie en jours du i-ème composant en fonctionnement.
Soit k un entier naturel non nul. On étudie dans cette partie la durée de fonctionnement prévisible du système si on a k composants à disposition (y compris celui installé au départ).
On notera toujours $T_k = X_1 + ... + X_k$.
On suppose dans cette partie qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que pour tout entier naturel j on ait :

$$\mathbb{P}\left([X_1 > j]\right) = \frac{1}{(j+1)^\alpha}$$

En particulier, dans toute cette partie, X_1 admet une espérance, on l'on notera $\mu = \mathbb{E}(X_1)$.

7. Que vaut $\mathbb{E}(T_k)$?

- **1 pt : La v.a.r. T_k admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(T_k) = k\mu$
- **1 pt : linéarité de l'espérance citée**

8. On suppose, **dans cette question**, que α est strictement supérieur à 2. La variable aléatoire X_1 admet donc une variance σ^2.

a) Calculer $\mathbb{V}(T_k)$.

- **1 pt : La v.a.r. T_k admet une variance comme somme de v.a.r. qui admettent une variance**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(T_k) = k\sigma^2$
- **1 pt : indépendance des v.a.r. citée**

b) Montrer que pour tout réel ε strictement positif,

$$\mathbb{P}\left([|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon]\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}$$

- **1 pt : On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la v.a.r. T_k qui admet une variance, et avec $a = k\varepsilon$**

c) Déduire que, pour tout réel strictement positif ε, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{T_k}{k} \in \left]\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon\right[\right]\right) = 1$$

- **1 pt :** $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}\big([|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon]\big) = 0$ **par théorème d'encadrement**
- **1 pt :** $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}\big([|T_k - k\mu| < k\varepsilon]\big) = 1 - 0 = 1$
- **1 pt :** $|T_k - k\mu| < k\varepsilon \iff \dfrac{T_k}{k} \in \left]\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon\right[$

9. On suppose maintenant uniquement que $\alpha > 1$ et donc que X_1 n'a pas nécessairement de variance d'où l'impossibilité d'appliquer la méthode précédente. On va mettre en œuvre ce qu'on appelle une méthode de troncation.
On fixe un entier naturel m strictement positif. Pour tout entier naturel non nul i, on définit deux variables aléatoires $Y_i^{(m)}$ et $Z_i^{(m)}$ de la façon suivante

$$Y_i^{(m)} = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i \leqslant m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad Z_i^{(m)} = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i > m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que $X_i = Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)}$.

- **1 pt : utilisation d'une issue pour avoir un raisonnement bien rédigé**
- **1 pt : disjonction de cas**

b) i. En utilisant la question ***3.d)ii.***, montrer que :

$$\mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \leqslant \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha}$$

- **1 pt :** $Z_1^{(m)}(\Omega) = \{0\} \cup [\![m+1, +\infty [\![$
- **1 pt : la v.a.r.** $Z_1^{(m)}$ **admet une espérance**
- **1 pt : La v.a.r.** X_1 **vérifie les propriétés de la question *3*.**
On peut donc utiliser le résultat de la question *3.d).ii.* :

$$\mathbb{P}([X_1 = i]) \leqslant \frac{\alpha}{i^{1+\alpha}} \quad \textbf{et ainsi} \quad i\ \mathbb{P}([X_1 = i]) \leqslant \frac{\alpha}{i^\alpha}$$

ii. Montrer que :

$$\mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \leqslant \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx$$

- **1 pt :** $\dfrac{\alpha}{i^\alpha} \geqslant \dfrac{\alpha}{x^\alpha} \geqslant \dfrac{\alpha}{(i+1)^\alpha}$
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant** ($i \leqslant i+1$)
- **1 pt : sommation + relation de Chasles**
- **1 pt : L'intégrale impropre** $\displaystyle\int_m^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ **est convergente en tant qu'intégrale de Riemann, impropre en** $+\infty$**, d'exposant** $\alpha > 1$**. De même, la série** $\sum \dfrac{1}{i^\alpha}$ **est convergente en tant que série de Riemann, d'exposant** $\alpha > 1$**. On peut donc passer à la limite dans l'inégalité précédente**

iii. Calculer :

$$\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx$$

- **1 pt :** $\displaystyle\int_m^N \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - \frac{1}{m^{\alpha-1}}\right)$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx = \frac{\alpha}{\alpha-1}\ \frac{1}{m^{\alpha-1}}$

iv. En déduire que :

$$\lim_{m\to+\infty} \mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) = 0$$

- **1 pt :** $Z_1^{(m)} \geqslant 0$**. Ainsi, par croissance de l'espérance :** $\mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \geqslant 0$
- **1 pt : théorème d'encadrement (0 pt si** $\alpha - 1 > 0$ **n'est pas écrit)**

v. Montrer que

$$\lim_{m\to+\infty} \mathbb{E}\big(Y_1^{(m)}\big) = \mu$$

- **1 pt : La v.a.r.** $Y_1^{(m)}$ **admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance**
- **1 pt : linéarité de l'espérance**

- **1 pt :** $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathbb{E}\big(Y_1^{(m)}\big) = \mu - 0 = \mu$

c) i. Montrer que

$$\big(Y_1^{(m)}\big)^2 \leqslant mX_1$$

- **1 pt : utilisation d'une issue pour raisonner**
- **1 pt : disjonction de cas**
- **1 pt : propreté des arguments**

ii. En déduire que

$$\mathbb{V}\big(Y_1^{(m)}\big) \leqslant m\mu$$

- **1 pt :** $Y_1^{(m)}(\Omega) = [\![0, m]\!]$ **donc** $Y_1^{(m)}$ **est finie. Elle admet donc une variance**
- **1 pt : formule de Kœnig-Huygens :** $\mathbb{V}\big(Y_1^{(m)}\big) = \mathbb{E}\Big(\big(Y_1^{(m)}\big)^2\Big) - \Big(\mathbb{E}\big(Y_1^{(m)}\big)\Big)^2 \leqslant \mathbb{E}\Big(\big(Y_1^{(m)}\big)^2\Big)$
- **1 pt : par croissance de l'espérance :** $\mathbb{E}\Big(\big(Y_1^{(m)}\big)^2\Big) \leqslant \mathbb{E}\big(mX_1\big) = m\,\mathbb{E}\big(X_1\big) = m\mu$

d) Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un entier naturel m_0 non nul tel que pour tout entier naturel m supérieur ou égal à m_0,

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} \leqslant \varepsilon$$

- **1 pt :** $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\,\dfrac{1}{m^{\alpha-1}} = 0$
- **1 pt : Par définition de la notion de limite, il existe un rang** $m_0 \in \mathbb{N}$ **tel que :**

$$\forall m \geqslant m_0, \ \left| \frac{\alpha}{\alpha-1}\,\frac{1}{m^{\alpha-1}} \right| \leqslant \varepsilon$$

- **1 pt :** $\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\,\dfrac{1}{m^{\alpha-1}} = \left| \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\,\dfrac{1}{m^{\alpha-1}} \right|$

Jusqu'à la fin du problème, m **désignera un entier supérieur ou égal à** m_0**.**

e) On note, pour tout entier naturel k non nul

$$U_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} Y_i^{(m)} \quad \text{et} \quad V_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} Z_i^{(m)}$$

Vérifier que :

$$T_k = U_k^{(m)} + V_k^{(m)}$$

- **1 pt : question *9.a)* citée**

f) i. Montrer que :

$$\mathbb{E}\big(V_k^{(m)}\big) \leqslant k\,\frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}$$

- **1 pt : La v.a.r.** $V_k^{(m)}$ **admet une espérance comme somme de v.a.r. admettant une espérance**
- **1 pt : linéarité de l'espérance**
- **1 pt : les v.a.r.** X_i **et donc les v.a.r.** $Z_i^{(m)}$ **ont même loi**

ii. En déduire que :

$$\mathbb{P}\Big(\Big[V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon\Big]\Big) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}$$

- **1 pt : inégalité de Markov appliquée à la v.a.r.** $Y = V_k^{(m)}$ **à valeurs positives (comme somme de v.a.r. à valeurs positives) et qui admet une espérance et à** $a = k\varepsilon$
- **1 pt :** $V_k^{(m)}$ **est à valeurs positives (comme somme de v.a.r. à valeurs positives) et admet une espérance**

g) (i) Montrer que :

$$\mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big) \ \geqslant \ k\mu - k\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha}$$

- **1 pt : La v.a.r.** $U_k^{(m)}$ **admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance**
- **1 pt : linéarité de l'espérance**
- **1 pt : calcul correct**

(ii) En déduire que :

$$\Big| \ \mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu \ \Big| \ \leqslant \ k\varepsilon$$

- **1 pt :** $\mathbb{E}\big(V_k^{(m)}\big) \geqslant 0$ **par croissance de l'espérance et car** $V_k^{(m)}$ **est à valeurs positives (comme somme de v.a.r. à valeurs positives) donc** $\Big| \ \mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu \ \Big| = k\mu - \mathbb{E}(U_k^{(m)})$
- **1 pt :** $k\mu - \mathbb{E}(U_k^{(m)}) \leqslant k \ \dfrac{\alpha}{\alpha-1} \ m^{1-\alpha} \leqslant k\varepsilon$

(iii) Montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\left[|U_k^{(m)} - k\mu| \ \geqslant \ 2k\varepsilon\right]\right) \ \leqslant \ \mathbb{P}\left(\left[|U_k^{(m)} - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \ \geqslant \ k\varepsilon\right]\right)$$

- **1 pt : D'après l'inégalité triangulaire :**

$$|U_k^{(m)}(\omega) - k\mu| \ \leqslant \ | \ U_k^{(m)}(\omega) - \mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big) \ | + | \ \mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big) - k\mu \ |$$

- **1 pt :** $| \ U_k^{(m)}(\omega) - \mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big) \ | \geqslant k\varepsilon$
- **1 pt : croissance de** $\mathbb{P}$

(iv) Montrer que :

$$\mathbb{V}\big(U_k^{(m)}\big) \ \leqslant \ km\mu$$

- **1 pt : les v.a.r.** X_i **sont indépendantes. Il en est donc de même des v.a.r.** $Y_i^{(m)}$ **d'après le lemme des coalitions**
- **1 pt : La v.a.r.** $U_k^{(m)}$ **admet une variance comme somme de v.a.r. indépendantes qui admettent une variance**
- **1 pt :** $\mathbb{V}\big(U_k^{(m)}\big) = k\mathbb{V}\big(Y_1^{(m)}\big)$

(v) En déduire que :

$$\mathbb{P}\left(\left[|U_k^{(m)} - k\mu| \ \geqslant \ 2k\varepsilon\right]\right) \ \leqslant \ \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

- **1 pt : on applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la v.a.r.** $Y = U_k^{(m)}$ **qui admet une variance (d'après la question précédente) et à** $a = k\varepsilon > 0$ **:**

$$\mathbb{P}\big(\left[|U_k^{(m)} - \mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big)| \geqslant k\varepsilon\right] \big) \ \leqslant \ \frac{\mathbb{V}\big(U_k^{(m)}\big)}{k^2\varepsilon^2}$$

- **1 pt : d'après la question *9.g)iii* :** $\mathbb{P}\big(\left[|U_k^{(m)} - k\mu)| \geqslant 2k\varepsilon\right] \big) \ \leqslant \ \mathbb{P}\big(\left[|U_k^{(m)} - \mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big)| \geqslant k\varepsilon\right] \big)$

- **1 pt :** $\dfrac{\mathbb{V}\big(U_k^{(m)}\big)}{k^2\varepsilon^2} \;\leqslant\; \dfrac{\cancel{k}m\mu}{k^{\cancel{2}}\varepsilon^2} \;=\; \dfrac{m\mu}{k\varepsilon^2}$

h) (i) Montrer que pour tout couple d'événements A et B dans $\mathcal{A}$, on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) \;\geqslant\; \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}(A \cap B) \;=\; \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant 1$

(ii) En appliquant l'inégalité précédente aux événements :

$$A = \left[V_k^{(m)} < k\varepsilon\right] \qquad \text{et} \qquad B = \left[U_k^{(m)} \in \,]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)[\right]$$

montrer que :

$$\mathbb{P}\left([T_k \in \,]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[\,]\,\right) \;\geqslant\; \mathbb{P}\left(\left[V_k^{(m)} < k\varepsilon\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[U_k^{(m)} \in \,]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)[\right]\,\right) - 1$$

- **1 pt : Il s'agit de montrer que** $[T_k \in \,]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[\,] \;\supset\; A \cap B$
- **1 pt : utilisation d'une issue**
- **1 pt : sommation des deux encadrements**

(iii) Déduire des questions précédentes que pour tout réel ε strictement positif, et pour tout entier m supérieur ou égal à m_0, on a pour tout entier naturel k non nul :

$$\mathbb{P}\left([\; T_k \in \,]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[\,]\,\right) \;\geqslant\; 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}\left(\left[V_k^{(m)} < k\varepsilon\right]\right) \;=\; 1 - \mathbb{P}\left(\left[V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon\right]\right) \;\geqslant\; 1 - \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}\;\dfrac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([\;|U_k^m - k\mu| \;<\; 2k\varepsilon]) \;=\; 1 - \mathbb{P}([\;|U_k^m - k| \;\geqslant\; 2k\varepsilon]) \;\geqslant\; 1 - \dfrac{m\mu}{k\varepsilon^2}$
- **1 pt :** $[\;|U_k^m - k\mu| \;<\; 2k\varepsilon] \;=\; [\; U_k^m \in \,]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)[\,]$

(iv) Pour k assez grand, appliquer l'inégalité précédente à un entier $m_k \in [\sqrt{k}, 2\sqrt{k}]$ et conclure que :

$$\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{T_k}{k} \in \,]\mu - 3\varepsilon, \mu + 3\varepsilon[\right]\,\right) = 1$$

- **1 pt : Le résultat de la question précédente est vérifié pour tout entier** $m \geqslant m_0$ **et pour tout** $k \in \mathbb{N}^*$**. Choisissons alors** $k \in \mathbb{N}^*$ **tel que** $\sqrt{k} \geqslant m_0$ **et considérons** $m_k \in [\sqrt{k}, \sqrt{2k}]$**. Alors :**

  $$m_k \;\geqslant\; \sqrt{k} \;\geqslant\; m_0$$

  et on peut appliquer l'inégalité de la question précédente en $m = m_k$
- **1 pt :** $-\dfrac{\alpha}{(\alpha - 1)\;\varepsilon}\;\dfrac{1}{m_k^{\alpha-1}} \;\geqslant\; -\dfrac{\alpha}{(\alpha - 1)\;\varepsilon}\;\dfrac{1}{(\sqrt{k})^{\alpha-1}}$
- **1 pt :** $-\dfrac{m_k\;\mu}{k\;\varepsilon^2} \;\geqslant\; -2\dfrac{\sqrt{k}\;\mu}{k\;\varepsilon^2} \;=\; -2\dfrac{\mu}{\sqrt{k}\;\varepsilon^2}$
- **1 pt : théorème d'encadrement**