DS4 correction (version B)

Le but du problème est d'étudier le renouvellement d'un des composants d'un système complexe (une machine, un réseau de distribution d'énergie etc...) formé d'un assemblage de différentes pièces susceptibles de tomber en panne. On s'intéresse donc à une de ces pièces susceptibles de se casser ou de tomber en panne et on se place dans la situation idéale où dès que la pièce est défectueuse, elle est immédiatement remplacée. Dans une première partie, on étudie quelques propriétés fondamentales des variables aléatoires discrètes. Puis, dans une deuxième partie, on étudie la probabilité de devoir changer la pièce un certain jour donné. Enfin, dans une troisième partie on cherche à estimer le temps de fonctionnement du système avec un certain nombre de pièces de rechange à disposition.
Dans tout le problème, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X et $\mathbb{V}(X)$ sa variance.
La deuxième partie peut être traitée en admettant si besoin les résultats de la première partie.

Première partie

Dans cette première partie, on étudie les propriétés asymptotiques d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. a) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) = \mathbb{P}([X > j-1]) - \mathbb{P}([X > j])$$

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

- Remarquons tout d'abord : $[X > j] \ \cup \ [X = j] \ = \ [X \geqslant j]$.
  Or, comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$: $[X > j-1] = [X \geqslant j]$.
- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X > j-1]) & = & \mathbb{P}([X > j] \ \cup \ [X = j]) & \\ & = & \mathbb{P}([X > j]) + \mathbb{P}([X = j]) & \textit{(car } [X > j] \textit{ et } [X = j] \textit{ sont incompatibles)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{En réordonnant, on obtient : } \forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X = j]) = \mathbb{P}([X > j-1]) - \mathbb{P}([X > j]).}$$

Commentaire

- Dans cette démonstration, on met en place une méthode classique de raisonnement :
  (i) on commence par une étape de décomposition de l'événement,
  (ii) puis on applique la fonction $\mathbb{P}$ de part et d'autre.
  Il faut prendre le réflexe de raisonner sur les événements avant d'appliquer la fonction $\mathbb{P}$.
- La formule énonce une différence entre des probabilités d'événements. Après réordonnement, on obtient une somme. Il faut donc penser à une décomposition d'événement à l'aide d'une union. Si on ne réordonne pas les différents membres de l'égalité, on peut aussi penser à une décomposition à l'aide d'une différence ensembliste. Pour cela on remarque que, comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:
$$[X > j-1] \setminus [X > j] = [X = j]$$
  Ainsi :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X=j]) &= \mathbb{P}([X > j-1] \ \setminus \ [X > j]) \\ &= \mathbb{P}([X > j-1]) \ - \ \mathbb{P}([X > j-1] \ \cap \ [X > j]) \\ &= \mathbb{P}([X > j-1]) \ - \ \mathbb{P}([X > j]) \qquad \textit{(car } [X > j] \subset [X > j-1]\textit{)} \end{aligned}$$

$\square$

b) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X=j]) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - p\,\mathbb{P}([X>p])$$

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente :

$$j\ \mathbb{P}([X=j]) = j\ \mathbb{P}([X>j-1]) - j\ \mathbb{P}([X>j])$$

- Ainsi, on obtient en sommant :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j]) \\
= \ & \sum_{j=1}^{p} \left(j\ \mathbb{P}([X>j-1]) - j\ \mathbb{P}([X>j])\right) \\
= \ & \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X>j-1]) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X>j]) && \textit{(par linéarité)} \\
= \ & \sum_{j=0}^{p-1} (j+1)\ \mathbb{P}([X>j]) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X>j]) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{j=0}^{p-1} j\ \mathbb{P}([X>j]) + \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X>j]) && \textit{(par linéarité)} \\
= \ & 0 \times \mathbb{P}([X>j]) + \cancel{\sum_{j=1}^{p-1} j\ \mathbb{P}([X>j])} + \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - \left(\cancel{\sum_{j=1}^{p-1} j\ \mathbb{P}([X>j]} + p\ \mathbb{P}([X>p])\right) \\
= \ & \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - p\ \mathbb{P}([X>p])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j]) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - p\ \mathbb{P}([X>p])}$$

Commentaire

La démonstration consiste à démontrer un résultat de type somme télescopique.
On pouvait faire apparaître directement une telle somme en remarquant :

$$j\ \mathbb{P}([X=j]) = (j-1)\ \mathbb{P}([X>j-1]) - j\ \mathbb{P}([X>j]) + \mathbb{P}([X>j-1])$$

Ainsi, par sommation et linéarité :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j]) &= \sum_{j=1}^{p} \Big((j-1)\ \mathbb{P}([X>j-1]) - j\ \mathbb{P}([X>j])\Big) + \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}([X>j-1]) \\
&= \cancel{(1-1)\ \mathbb{P}([X>1-1])} - p\ \mathbb{P}([X>p]) + \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}([X>j-1]) \\
&= -p\ \mathbb{P}([X>p]) + \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) && \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

$\square$

2. a) On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X) = \mu$.

i. Justifier la convergence de la série de terme général $k\,\mathbb{P}([X = k])$.

Démonstration.
La variable aléatoire X est à valeur dans $\mathbb{N}^*$.
Ainsi, elle admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n\ \mathbb{P}([X = n])$ est absolument convergente. Or, d'après l'énoncé, X admet une espérance.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série de terme général } k\,\mathbb{P}([X = k]) \text{ est absolument convergente et donc convergente.}}$$

□

ii. Montrer que :

$$\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}([X = k]) = 0$$

Démonstration.

- La série de terme général $k\,\mathbb{P}([X = k])$ étant convergente, on obtient, par relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^{p} k\ \mathbb{P}([X = k]) + \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k])$$

  Ainsi, en réordonnant :

$$\sum_{k=p+1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) - \sum_{k=1}^{p} k\ \mathbb{P}([X = k])$$

- Par passage à la limite dans cette égalité :

$$\begin{aligned} \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) &= \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) - \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=1}^{p} k\ \mathbb{P}([X = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) - \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) \ = \ 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}([X = k]) = 0}$$

Commentaire

Cette question est l'illustration d'un résultat classique du chapitre sur les séries.
Considérons une série $\sum u_n$ convergente et notons S sa somme.
On définit alors son reste d'ordre n par : $R_n = S - S_n$. Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} R_n \ = \ \lim_{n \to +\infty} S - \lim_{n \to +\infty} S_n \ = \ S - S \ = \ 0$$

On retrouve le résultat précédent en remarquant : $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

□

iii. En déduire que :

$$\lim_{p\to+\infty} p\ \mathbb{P}([X>p]) = 0$$

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

- Comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$[X>p] \ = \ \bigcup_{k=p+1}^{+\infty} [X=k]$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X>p]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=p+1}^{+\infty} [X=k]\right) & \\ & = & \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) & \textit{(car les événements } [X=k] \textit{ sont deux à deux incompatibles)} \end{array}$$

- On en déduit :

$$0 \ \leqslant \ p\ \mathbb{P}([X>p]) \ = \ \sum_{k=p+1}^{+\infty} p\ \mathbb{P}([X=k]) \ \leqslant \ \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X=k])$$

- Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} 0 = 0 = \lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X=k])$, on en déduit, par le théorème d'encadrement que la suite $\left(\sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} p\ \mathbb{P}([X=k])\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite nulle.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{p\to+\infty} p\ \mathbb{P}([X>p]) = 0.}$$

Commentaire

Cette question illustre de nouveau la méthode évoquée en question ***1.a)***. Le résultat porte sur la quantité $p\mathbb{P}([X>p])$. Pour l'obtenir, on commence par décomposer l'événement $[X>p]$ puis on applique la fonction $\mathbb{P}$.

□

iv. Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}([X>j])$ converge.

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***1.b)*** :

$$\sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) = \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j]) - p\ \mathbb{P}([X>p])$$

La suite $\left(\sum\limits_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j])\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie d'après la question ***2.a)i.*** et il en est de même de la suite $\left(p\ \mathbb{P}([X>p])\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ d'après la question précédente.
Ainsi, la suite $\left(\sum\limits_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j])\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie.

$$\boxed{\text{La série de terme général } \mathbb{P}([X>j]) \text{ converge.}}$$

□

v. Montrer que : $\mu = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$.

Démonstration.
Par passage à la limite dans l'égalité précédente :

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X = j]) - \lim_{p\to+\infty} p\ \mathbb{P}([X > p]) \ = \ \mu - 0 \ = \ \mu$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mu = \lim_{p\to+\infty} \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j]).}$$

□

b) On suppose que $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$ converge.

i. Déterminer le sens de variation de la suite $(v_p)_{p\geqslant 1}$ définie par :

$$v_p = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j])$$

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$v_{p+1} - v_p \ = \ \sum_{j=0}^{p} \mathbb{P}([X > j]) - \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) \ = \ \mathbb{P}([X > p]) \ \geqslant \ 0$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_p)_{p\geqslant 1} \text{ est croissante.}}$$

Commentaire

Dans l'énoncé, on fait l'hypothèse : « $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$ converge ».
Cette formulation est malheureuse pour deux raisons :

- on ne peut écrire le symbole $\sum\limits_{j=0}^{+\infty}$ qu'après avoir démontré la convergence.
- il faut éviter la confusion entre la série $\sum \mathbb{P}([X > j])$ et la somme $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$.
  On rappelle que la somme est bien définie si la série converge.
  La somme étant un réel, il n'y a pas lieu de supposer sa convergence.

Il faut donc lire cette hypothèse comme elle est formulée ailleurs dans l'énoncé, à savoir : « On suppose que la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge ».

□

ii. Comparer $\sum\limits_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X = j])$ et $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$.

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***1.b)*** :

$$\sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X = j]) \ = \ \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) - p\ \mathbb{P}([X > p]) \ \leqslant \ \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) = v_p$$

- La série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ étant convergente, on obtient, par relation de Chasles :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j]) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) + \sum_{j=p}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$$

En réordonnant, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j]) - \sum_{j=p}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j]) \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{p} j \ \mathbb{P}([X = j]) \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])}$$

Commentaire

- On a vu dans la question précédente que la suite $(v_p)_{p \geqslant 1}$ est croissante. On sait de plus qu'elle est convergente (c'est l'hypothèse faite en début de question ***2.a)***).
L'esprit de l'énoncé semble donc être d'utiliser le résultat suivant :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} (v_n) \text{ croissante} \\ v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \ v_n \leqslant \ell}$$

- Le résultat encadré ci-dessus est lié à la notion de borne supérieure d'une suite, qui par définition, et sous réserve d'existence, est le plus petit des majorants de la suite. Si on connaît ce vocabulaire, on a accès à un énoncé plus précis du théorème de convergence monotone : toute suite croissante et majorée converge **vers sa borne supérieure**. On peut alors démontrer le résultat précédent :
  - × la suite (v_n) converge (vers ℓ) donc elle est majorée,
  - × la suite (v_n) est croissante.

  Ainsi, d'après le théorème ci-dessus, $\ell = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} v_n$ et donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant \ell$.
- Cependant, la notion de borne supérieure n'apparaît pas explicitement dans le programme officiel. Il est toutefois possible de démontrer le résultat encadré sans utiliser la notion de borne supérieure. Détaillons cette approche.

  On suppose par l'absurde que :
  - × la suite (u_n) est croissante,
  - × la suite (u_n) converge vers ℓ,
  - × et que $\texttt{NON}(\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leqslant \ell)$ est vérifiée.
  Autrement dit, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \ell$.

  La suite (u_n) étant croissante : $\forall n \geqslant n_0, \ u_n \geqslant u_{n_0}$.

  Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geqslant u_{n_0}$.
  En combinant avec l'inégalité de l'hypothèse, on a alors : $\ell \geqslant u_{n_0} > \ell$.
  Ce qui est absurde !

□

iii. En déduire que X admet une espérance.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum j \ \mathbb{P}([X = j])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- La suite $\left(\sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j])\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{j=1}^{p+1} j\ \mathbb{P}([X=j]) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j]) = (p+1)\ \mathbb{P}([X=p+1]) \ \geqslant\ 0$$

- Elle est de plus majorée par $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j])$ d'après la question précédente.

Ainsi, la suite $\left(\sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j])\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, } X \text{ admet une espérance.}}$$

□

c) Conclure des questions précédentes que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}([X>j])$ converge.

Démonstration.

- En question ***2.a)***, on a démontré que si X admet une espérance, alors la série de terme général $\mathbb{P}([X>j])$ est convergente (résultat de la question ***2.a)iv.***).
  (on obtient de plus : $\mathbb{E}(X) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j])$*)*
- En question ***2.b)***, on a démontré que si la série de terme général $\mathbb{P}([X>j])$ est convergente alors X admet une espérance (résultat de la question ***2.a)iii.***).
  (et dans ce cas, on peut à nouveau conclure par la question ***2.a)*** *:* $\mathbb{E}(X) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>j])$*)*

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet une espérance si et seulement si la série de terme général } \mathbb{P}([X>j]) \text{ converge.}}$$

□

3. On suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel j on ait :

$$\mathbb{P}([X>j]) = \frac{1}{(j+1)^\alpha} \qquad (*)$$

a) Légitimer que $(*)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que la suite $\Big(\mathbb{P}([X=j])\Big)_{j\in\mathbb{N}^*}$ définie par $(*)$ vérifie :

(i) $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X=j]) \geqslant 0$,

(ii) $\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=j]) = 1$.

- Soit $j \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***1.a)*** :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=j]) &= \mathbb{P}([X>j-1]) - \mathbb{P}([X>j]) \\ &= \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} \ \geqslant\ 0\end{aligned}$$

  En effet, $j+1 \geqslant j$ et il suffit alors d'appliquer de part et d'autre la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$, décroissante sur $]0,+\infty[$ (car $\alpha > 0$).

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On reconnaît une somme télescopique :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}([X=j]) &= \sum_{j=1}^{p} \left(\mathbb{P}([X>j-1]) - \mathbb{P}([X>j])\right) \\ &= \mathbb{P}([X>0]) - \mathbb{P}([X>p]) \ = \ \frac{1}{1^\alpha} - \frac{1}{(p+1)^\alpha} \\ &= 1 - \frac{1}{(p+1)^\alpha} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1\end{aligned}$$

En effet, $(p+1)^\alpha \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $\alpha > 0$.

$$\boxed{\text{La relation } (*) \text{ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans } \mathbb{N}^*.}$$

□

b) Montrer que X admet une espérance si et seulement si α est strictement supérieur à 1.

Démonstration.

- D'après la question ***2.c)***, la v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}([X>j])$ converge.
- × $\mathbb{P}([X>j]) = \dfrac{1}{(j+1)^\alpha} \underset{j\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{j^\alpha}$ $(\geqslant 0)$

  × La série $\sum\limits_{j\geqslant 1} \dfrac{1}{j^\alpha}$ est une série de Riemann d'exposant α.
  Elle est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

  Ainsi, d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série de terme général $\mathbb{P}([X>j])$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet une espérance si et seulement si } \alpha > 1.}$$

□

c) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X=j]) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right)$$

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Comme on l'a vu en question ***3.a)*** :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=j]) &= \mathbb{P}([X>j-1]) - \mathbb{P}([X>j]) \\ &= \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} \\ &= \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{j^\alpha}{(j+1)^\alpha}\right)\end{aligned}$$

Il suffit alors de remarquer :

$$\frac{j^\alpha}{(j+1)^\alpha} = \left(\frac{j}{j+1}\right)^\alpha = \left(\frac{\cancel{j}}{\cancel{j}}\,\frac{1}{1+\frac{1}{j}}\right)^\alpha = \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}$$

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=j]) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right)}$$

□

d) i. Étudier les variations de $f : x \mapsto 1 - (1+x)^{-\alpha} - \alpha x$ sur $[0,1]$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto (1+x)^{-\alpha}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ car c'est l'inverse de la fonction $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et qui ne s'annule pas sur $[0,1]$.
Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
- Soit $x \in [0,1]$.

$$f'(x) \;=\; \alpha\,(1+x)^{-\alpha-1} - \alpha \;=\; \alpha \left(\frac{1}{(1+x)^{\alpha+1}} - 1 \right) \;=\; \alpha\, \frac{1-(1+x)^{\alpha+1}}{(1+x)^{\alpha+1}}$$

Comme $x \geqslant 0$:

$$1 + x \geqslant 1$$

$$\text{donc} \quad (1+x)^{\alpha+1} \geqslant 1 \qquad \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto x^{\alpha} \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)}$$

Ainsi $(1+x)^{\alpha+1} > 0$ et $1 - (1+x)^{\alpha+1} \leqslant 0$.
On en déduit : $f'(x) \leqslant 0$ avec égalité seulement si $x = 0$.
- On en déduit le tableau de variation suivant.

x	0 $\qquad$ 1
Signe de $f'(x)$	$-$
Variations de f	$0 \searrow 1 - \alpha - \frac{1}{2^{\alpha}}$

□

ii. Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) \leqslant \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}$$

Démonstration.

- D'après la question qui précède, la fonction f est décroissante sur $[0,1]$. Ainsi :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) \;\leqslant\; f(0) = 0$$

- On en déduit :

$$\forall x \in [0,1], \quad \underbrace{1 - (1+x)^{-\alpha}}_{= 1 - \frac{1}{(1+x)^{\alpha}}} \;\leqslant\; \alpha\, x$$

- Soit $j \in \mathbb{N}^*$. En appliquant la formule à $x = \dfrac{1}{j} \in [0,1]$, on obtient :

$$1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^{\alpha}} \;\leqslant\; \alpha\, \frac{1}{j}$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{j^{\alpha}} \left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^{\alpha}} \right) \;\leqslant\; \frac{\alpha}{j^{\alpha+1}} \qquad \textit{(car } \tfrac{1}{j^{\alpha}} \geqslant 0\textit{)}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X = j]) \leqslant \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}.}$$

□

e) Montrer, en utilisant le résultat de ***3.c)***, que :

$$\lim_{j \to +\infty} j^{\alpha+1}\, \mathbb{P}([X = j]) = \alpha$$

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto (1+x)^{-\alpha}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
  Elle admet donc un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0.
  Ainsi, il existe une fonction ε définie dans un voisinage de 0, telle que, au voisinage de 0 :

  $$(1+x)^{-\alpha} \;=\; 1 - \alpha\, x + x\, \varepsilon(x)$$

  où $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.
- Comme $\frac{1}{j} \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut appliquer l'égalité précédente à $x = \frac{1}{j}$ pour j dans un voisinage de $+\infty$. On obtient :

$$\begin{array}{lrcl} & \left(1 + \dfrac{1}{j}\right)^{-\alpha} & = & 1 - \alpha\, \dfrac{1}{j} + \dfrac{1}{j}\, \varepsilon\left(\dfrac{1}{j}\right) \\[2ex] \text{ainsi} & 1 - \left(1 + \dfrac{1}{j}\right)^{-\alpha} & = & \alpha\, \dfrac{1}{j} - \dfrac{1}{j}\, \varepsilon\left(\dfrac{1}{j}\right) \\[2ex] \text{puis} & \dfrac{1}{j^\alpha}\left(1 - \left(1 + \dfrac{1}{j}\right)^{-\alpha}\right) & = & \dfrac{1}{j^\alpha}\left(\alpha\, \dfrac{1}{j} - \dfrac{1}{j}\, \varepsilon\left(\dfrac{1}{j}\right)\right) \\[2ex] \text{enfin} & j^{\alpha+1}\, \mathbb{P}([X = j]) & = & \alpha - \varepsilon\left(\dfrac{1}{j}\right) \end{array}$$

(par multiplication de part et d'autre par $j^{\alpha+1}$)

- Enfin, par théorème de composition de limites :

$$\lim_{j \to +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{j}\right) \;=\; \lim_{x \to 0} \varepsilon\,(x) = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \lim_{j \to +\infty} j^{\alpha+1}\, \mathbb{P}([X = j]) = \alpha.}$$

Commentaire

- À l'aide de l'inégalité de la question précédente, on obtient :

  $$\forall j \in \mathbb{N}^*,\; j^{\alpha+1}\, \mathbb{P}([X = j]) \;\leqslant\; \alpha$$

  Il est donc assez naturel d'envisager un raisonnement par encadrement. Il faudrait pour cela tenter d'obtenir le même type d'inégalité à gauche. L'énoncé écarte cette possibilité : le concepteur renvoie à la question ***3.c)*** et non pas à la question ***3.d)***.
- Rappelons l'extrait du programme officiel concernant les développements limités : « Les seuls développements exigibles concernent les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ au voisinage de 0, et à l'ordre 1 ou 2 uniquement. Aucune connaissance (somme, produit, composition ...) concernant les techniques de calcul des développements limités n'est exigible. »
  On préfère donc, dans la démonstration ci-dessus, revenir à la définition de base de la notion de développement limité à l'aide d'une fonction ε. Ceci permet de s'affranchir des manipulations des $\underset{x \to 0}{o}(\dots)$ et $\underset{j \to +\infty}{o}(\dots)$ et de s'assurer que la démonstration est bien conforme aux attendus du programme.

$\square$

f) Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une variance si et seulement si la série $\sum j^2\ \mathbb{P}([X = j])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- D'après la question précédente : $\lim\limits_{j\to+\infty} j^{\alpha+1}\ \mathbb{P}([X = j]) = \alpha \neq 0$. On en déduit :

$$\begin{array}{lccll} & j^{\alpha+1}\ \mathbb{P}([X = j]) & \underset{j\to+\infty}{\sim} & \alpha & \\ \text{donc} & j^2\ \mathbb{P}([X = j]) & \underset{j\to+\infty}{\sim} & \alpha\, j^{1-\alpha} = \alpha\, \dfrac{1}{j^{\alpha-1}} & \textit{(par multiplication par } j^{1-\alpha} \neq 0\textit{)} \end{array}$$

- $\times$ $j^2\ \mathbb{P}([X = j]) = \alpha\, \dfrac{1}{j^{\alpha-1}}$ $(\geqslant 0)$

  $\times$ La série $\sum\limits_{j\geqslant 1} \dfrac{1}{j^{\alpha-1}}$ est une série de Riemann d'exposant $\alpha - 1$.
  Elle est donc convergente si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ *i.e.* si $\alpha > 2$.

  Ainsi, par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum j^2\ \mathbb{P}([X = j])$ est convergente si et seulement si $\alpha > 2$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } X \text{ admet une variance si et seulement si } \alpha > 2.}$$

□

Deuxième partie : Étude de la probabilité de panne un jour donné.

Dans cette deuxième partie, on suppose donnée une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geqslant 1}$ mutuellement indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Pour tout entier i non nul, X_i représente la durée de vie en jours du $i^{\text{ème}}$ composant en fonctionnement.
Soit k un entier naturel non nul. On note $T_k = X_1 + ... + X_k$. T_k représente donc le jour où le $k^{\text{ème}}$ composant tombe en panne. On fixe un entier naturel n non nul représentant un jour donné et on considère l'événement A_n : « le composant en place le jour n tombe en panne » c'est-à-dire A_n : « il existe k entier naturel non nul tel que $T_k = n$ », et on se propose d'étudier $\mathbb{P}(A_n)$.

4. Pour tout entier naturel non nul j, on note $p_j = \mathbb{P}([X_1 = j])$ et $u_j = \mathbb{P}(A_j)$. On suppose que pour tout entier naturel non nul j, on a $p_j \neq 0$. On pose de plus par convention $u_0 = 1$.

a) Montrer que : $u_1 = p_1$.

Démonstration.

- L'événement $[X_1 = 1]$ est réalisé si le premier composant en place tombe en panne le jour 1.
  L'événement A_1 est réalisé si le composant en place le jour 1 tombe en panne lors de ce jour.
- Les variables X_i sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Ceci signifie en particulier que chaque composant à une durée de vie d'au moins un jour. Ainsi, le seul composant en place le jour 1 est le premier composant. On en déduit : $[X_1 = 1] \ = \ A_1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } p_1 = \mathbb{P}([X_1 = 1]) = \mathbb{P}(A_1) = u_1.}$$

Commentaire

- Encore une fois, le raisonnement a lieu initialement sur les événements.
  On n'applique la fonction $\mathbb{P}$ que dans un deuxième temps.
- Il est fortement conseillé de prendre le temps de lire scrupuleusement l'énoncé. La méthode de remplacement des composants est énoncée seulement en début de problème. Il faut donc se reporter au paragraphe introductif lors de la résolution de cette deuxième partie. Par ailleurs, l'information concernant la durée de vie de chaque composant n'est pas explicitement mentionnée : c'est un résultat à extraire de la définition des v.a.r. X_i.

□

b) i. Montrer que : $A_2 \;=\; [X_1 = 2] \;\cup\; ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$.

Démonstration.
Raisonnons par double inclusion.

($\subset$) Supposons que l'événement A_2 est réalisé. Cela signifie que le composant en place le jour 2 tombe en panne lors de ce jour. Il reste alors à déterminer quel composant est en place lors du deuxième jour. Deux cas se présentent :

× soit le premier composant est tombé en panne après un jour.
Dans ce cas, c'est le deuxième composant qui était en place lors du deuxième jour.
S'il tombe en panne en jour 2 c'est qu'il est resté opérationnel un jour.
Dans ce cas, l'événement $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$ est réalisé.

× soit le premier composant est resté en vie strictement plus d'un jour.
Dans ce cas, c'est ce composant qui est en place lors du deuxième jour.
S'il tombe en panne en jour 2 c'est qu'il est resté opérationnel deux jours.
Dans ce cas, l'événement $[X_1 = 2]$ est réalisé.

Ainsi, l'événement $[X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$ est réalisé.

($\supset$) Supposons que l'événement $[X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$ est réalisé.
Ainsi, soit $[X_1 = 2]$ est réalisé et alors le premier composant a une durée de vie de 2 jours ; soit $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$ est réalisé et alors les deux premiers composants ont duré chacun un jour. Dans les deux cas, le composant en place le jour 2 tombe en panne : A_2 est réalisé.

$$\boxed{\text{On en conclut : } A_2 \;=\; [X_1 = 2] \;\cup\; ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]).}$$

Commentaire

- Par définition, un événement est un ensemble. Démontrer l'égalité de deux ensembles c'est démontrer que tout élément du premier ensemble est dans le second et inversement. Ou encore qu'un élément est dans le premier ensemble si et seulement si il est aussi dans le second.
- En terme d'événement, cela signifie que le premier événement est réalisé (il existe ω réalisant cet événement *i.e.* il existe ω appartenant à cet événement) si et seulement si le second événement est réalisé (l'élément ω précédent est aussi élément de cet événement).

$\square$

ii. En déduire u_2 en fonction de p_1 et p_2.

Démonstration.

- Les événements $[X_1 = 2]$ et $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$ sont incompatibles. En effet :

$$[X_1 = 2] \cap ([X_1 = 1] \;\cap\; [X_2 = 1]) \;=\; ([X_1 = 2] \;\cap\; [X_1 = 1]) \cap [X_2 = 1] = \varnothing \cap [X_2 = 1] = \varnothing$$

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(A_2) & = & \mathbb{P}([X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \;\cap\; [X_2 = 1])) & \\ & = & \mathbb{P}([X_1 = 2]) + \mathbb{P}([X_1 = 1] \;\cap\; [X_2 = 1]) & \textit{(par incompatibilité des événements considérés)} \\ & = & \mathbb{P}([X_1 = 2]) + \mathbb{P}([X_1 = 1]) \;\times\; \mathbb{P}([X_2 = 1]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \mathbb{P}([X_1 = 2]) + \mathbb{P}([X_1 = 1]) \;\times\; \mathbb{P}([X_1 = 1]) \;=\; p_2 + p_1^2 & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ ont même loi)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } u_2 = p_2 + p_1^2.}$$

$\square$

c) Pour tout entier naturel i, on pose $\tilde{X}_i = X_{i+1}$.

i. Montrer que les variables $\tilde{X}_i$ sont mutuellement indépendantes, indépendantes de X_1 et de même loi que X_1.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, la suite $(X_i)_{i \geqslant 1}$ est une suite de variables mutuellement indépendantes. Il en est donc de même de la suite $(X_i)_{i \geqslant 2}$, qui n'est autre que la suite $(\tilde{X}_i)_{i \geqslant 1}$.

  Les variables $\tilde{X}_i$ sont mutuellement indépendantes.

- Par ailleurs, par le lemme des coalitions, toute variable $\tilde{X}_i$ (pour $i \geqslant 1$) est indépendante de la variable X_1.

- Enfin, la suite $(X_i)_{i \geqslant 1}$ est une suite de variables possédant toutes la même loi, celle de X_1. Il en est donc de même de la suite $(X_i)_{i \geqslant 2}$, qui n'est autre que la suite $(\tilde{X}_i)_{i \geqslant 1}$.

  Les variables $\tilde{X}_i$ ont même loi que X_1.

Commentaire

Il semble que l'énoncé comporte une petite coquille. Il aurait fallu écrire « tout entier naturel **non nul** i ». Cela pose un problème pour cette question : en effet, la variable $\tilde{X}_0 = X_1$ n'est pas indépendante de X_1.

□

ii. Soit k un entier naturel non nul strictement inférieur à n. Montrer que :

$$A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup_{j \geqslant 1} \left[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n - k\right]$$

Démonstration.

- D'après l'énoncé, A_n est l'événement « il existe k entier naturel non nul tel que $T_k = n$ ». Ainsi :

$$\begin{aligned} A_n &= \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} [T_j = n] \\ &= \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} [X_1 + \ldots + X_j = n] \\ &= [X_1 = n] \ \cup \ \bigcup_{j \geqslant 2} [X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n] \end{aligned}$$

- On en déduit, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned} & [X_1 = k] \ \cap \ A_n \\ = \ & [X_1 = k] \ \cap \ \left([X_1 = n] \ \cup \ \bigcup_{j \geqslant 2} [X_1 + \ldots + X_j = n] \right) \\ = \ & [X_1 = k] \cap [X_1 = n] \ \cup \ \bigcup_{j \geqslant 2} \Big([X_1 = k] \ \cap \ [X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n] \Big) \quad \textit{(par distributivité de } \cap \textit{ par rapport à } \cup) \\ = \ & \varnothing \ \cup \ \bigcup_{j \geqslant 2} \Big([X_1 = k] \ \cap \ [k + X_2 + \ldots + X_j = n] \Big) \end{aligned}$$

En effet, comme $k < n$, la v.a.r. X_1 ne peut prendre à la fois les valeurs distinctes k et à n.

- Enfin :

$$\begin{array}{rll} & \bigcup\limits_{j \geqslant 2} \Big([X_1 = k] \ \cap \ [k + X_2 + \ldots + X_j = n] \Big) & \\ = & [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup\limits_{j \geqslant 2} \Big([X_2 + \ldots + X_j = n-k] \Big) & \textit{(par distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$)} \\ = & [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup\limits_{j \geqslant 1} \Big([X_2 + \ldots + X_{j+1} = n-k] \Big) & \textit{(par décalage d'indice)} \\ = & [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup\limits_{j \geqslant 1} \Big(\Big[\tilde{X}_1 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big] \Big) & \textit{(par définition des $\tilde{X}_i$)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in [\![1, n-1]\!], \ \ A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup\limits_{j \geqslant 1} \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]}$$

Commentaire

- Dans la démonstration, on a fait apparaître l'événement A_n sous la forme :

$$A_n = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} [T_j = n]$$

En réalité, on aurait pu écrire : $A_n = \bigcup\limits_{j=1}^{n} [T_j = n]$.
On constate en effet que T_j prend ses valeurs dans $[\![j, +\infty[\![$ (le jour où $j^{\text{ème}}$ composant tombe en panne est forcément plus grand que le nombre j de composants) puisque chacune des variables X_i vaut 1 au minimum. Ainsi, pour tout $j \geqslant n+1$, $[T_j = n] = \varnothing$.
- On travaille donc en réalité sur une réunion finie. Ce point de détail est signalé ici pour la bonne compréhension des objets sur lesquels on travaille. Toutefois, il n'a pas à être mentionné dans une copie : ne pas préciser la borne haute de la réunion permet de simplifier les écritures suivantes.

$\square$

iii. En déduire que pour tout entier naturel k non nul strictement inférieur à n :

$$\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-k})$$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

- D'après l'énoncé, $p_k = \mathbb{P}([X_1 = k]) \neq 0$. Ainsi, $\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n)$ est bien défini et :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) & = & \dfrac{\mathbb{P}([X_1 = k] \ \cap \ A_n)}{\mathbb{P}([X_1 = k])} \\ & = & \dfrac{\mathbb{P}\Big([X_1 = k] \ \cap \ \bigcup\limits_{j \geqslant 1} \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big] \Big)}{\mathbb{P}([X_1 = k])} \\ & = & \dfrac{\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{j \geqslant 1} [X_1 = k] \ \cap \ \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big] \Big)}{\mathbb{P}([X_1 = k])} \end{array}$$

La dernière égalité est obtenue par distributivité de $\cap$ sur $\cup$.

- On s'intéresse tout d'abord au numérateur.

$$\begin{array}{cl} & \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{j\geqslant 1} [X_1 = k] \ \cap \ \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) \\ = & \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big([X_1 = k] \ \cap \ \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) \qquad \textit{(par réunion d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\ = & \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}\Big(\Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) \qquad \textit{(par indépendance)} \end{array}$$

En effet, par le lemme des coalitions, pour tout $j \geqslant 1$, les v.a.r. X_1 et $\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j$ sont indépendantes. On en déduit que les événements $[X_1 = k]$ et $\Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]$ sont indépendants.

- Puis :

$$\begin{array}{cl} & \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}\Big(\Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) \\ = & \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big(\Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) \\ = & \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big([X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n-k]\Big) \end{array}$$

En effet, les v.a.r. $\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j$ et $X_1 + X_2 + \ldots + X_j$ ont même loi puisque ce sont des sommes d'un même nombre de v.a.r. indépendantes ayant toutes la même loi.

- Enfin :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) & = & \dfrac{\cancel{\mathbb{P}([X_1 = k])} \ \times \ \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big([X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n-k]\Big)}{\cancel{\mathbb{P}([X_1 = k])}} \\ & = & \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big([X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n-k]\Big) \\ & = & \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{j\geqslant 1} [X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n-k]\Big) \qquad \textit{(par réunion d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\ & = & \mathbb{P}(A_{n-k}) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall k \in [\![1, n-1]\!], \ \mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-k}).}$$

□

d) Montrer que :

$$u_n = u_{n-1}\, p_1 + \ldots + u_0\, p_n$$

Démonstration.

- La famille $\big([X_1 = k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A_n) & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) + \mathbb{P}([X_1 = n] \cap A_n) + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) \end{array}$$

- Or, pour tout $k \geqslant n+1$, on a : $[X_1 = k] \cap A_n = \varnothing$.
  En effet si les événements $[X_1 = k]$ et A_n sont réalisés alors le premier composant :
  - × tombe en panne le jour $k \geqslant n+1$ (car $[X_1 = k]$ est réalisé).
  - × est le composant en place le jour n. Et il tombe donc en panne le jour n (car A_n est réalisé).

  Ces deux événements sont donc bien incompatibles.

  $$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \geqslant n+1 : \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0.}$$

- D'autre part : $[X_1 = n] \subset A_n$.
  En effet, si $[X_1 = n]$ est réalisé alors le premier composant a une durée de vie de n jours. Il est donc en place le jour n et tombe alors en panne ce jour. Ce qui signifie que A_n est réalisé.

  $$\boxed{\text{Comme } [X_1 = n] \subset A_n \text{ alors } [X_1 = n] \cap A_n = [X_1 = n].}$$

- On déduit de ce qui précède :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(A_n) & = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) + \mathbb{P}([X_1 = n]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}_{[X_1 = k]}(A_n) + \mathbb{P}([X_1 = n]) & \textit{(valide car pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([X_1 = k]) \neq 0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}(A_{n-k}) + \mathbb{P}([X_1 = n]) & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \ u_{n-k} + p_n \ = \ u_{n-1} \ p_1 + \ldots + u_1 \ p_{n-1} + p_n &
\end{array}$$

  On rappelle que $u_0 = 1$ par convention.

  $$\boxed{\text{On en conclut : } u_n = u_{n-1} \ p_1 + \ldots + u_1 \ p_{n-1} + u_0 \ p_n.}$$

Commentaire

La propriété de la question précédente (***4.c)iii***) a été démontrée pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. On ne peut donc l'utiliser que pour un entier $k \in [\![1, n-1]\!]$. C'est une évidence qu'il convient toutefois de rappeler car elle est trop régulièrement ignorée par les candidats. Lorsque l'on souhaite utiliser un résultat précédemment démontré ou admis, il faut scrupuleusement vérifier que l'on est dans les conditions d'application de ce résultat.

□

e) En **Python**, soit $P = [p_1, p_2, ..., p_n]$ le vecteur ligne tel que $P[j] = p_{j+1}$ pour j dans $[\![0, n-1]\!]$. Écrire un programme en **Python** qui calcule u_n à partir de P.

Démonstration.

- La suite (u_n) est une suite récurrente dont le $n^{\text{ème}}$ terme dépend de tous les précédents. Pour calculer le terme d'indice n, il faut avoir accès aux termes d'indice $0, \ldots, n-1$ de la suite.
  Il est donc nécessaire de créer un vecteur `U` permettant de stocker, au fur et à mesure du calcul, toutes ces valeurs.
- Pour calculer chaque coefficient de `U`, on se sert de la formule démontrée dans la question précédente :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \ u_k \ = \ \sum\limits_{j=1}^{k} u_{k-j} \ p_j \end{array} \right.$$

On commence par stocker dans `U` l'élément u_0. L'élément u_k (stocké en $k+1^{\text{ème}}$ case de `U`) est déterminé par un calcul de somme (on met à jour une variable auxiliaire `S`).

- Enfin, il faut noter que le programme prend en paramètre le vecteur `P` et que c'est ce vecteur qui doit fournir l'entier n, indice de l'élément u_n recherché. Cet entier n n'est autre que la longueur du vecteur `P`.
- On obtient le programme suivant.

```python
import numpy as np
def calcSuiteU(P):
    n = len(P) # Récupère la taille de la liste P
    U = np.zeros(n+1) # Vecteur de taille n+1 rempli de zéros
    U[0] = 1 # Initialisation
    # Boucle qui remplit le vecteur U avec les termes de la suite
    for k in range(n):
        S = 0
        for i in range(k+1): # Boucle qui calcule une somme
            S = S + U[k-i] * P[i]
        U[k+1] = S
    return U[n]
```

En fin de programme, la variable `U[n]` contient u_n. Comme l'exige l'énoncé, c'est cette valeur qui est renvoyée et pas le vecteur `U` des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n).

□

5. Soit λ un réel appartenant à $]0,1[$.

Dans cette question, on suppose que X_1 suit la loi géométrique de paramètre λ.
Pour tout entier naturel j non nul, on a donc $\mathbb{P}([X_1 = j]) = \lambda(1-\lambda)^{j-1}$.

a) Calculer $\mathbb{P}([X_1 > k])$ pour tout entier naturel k non nul.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- On remarque tout d'abord : $\mathbb{P}([X_1 > k]) \;=\; 1 - \mathbb{P}\left(\overline{[X_1 > k]}\right) \;=\; 1 - \mathbb{P}([X_1 \leqslant k])$.
- Par ailleurs, comme $X_1(\Omega) = [\![0, +\infty[\![$, alors : $[X_1 \leqslant k] \;=\; \bigcup\limits_{i=1}^{k} [X_1 = i]$.
- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} [X_1 = i]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left([X_1 = i]\right) && \textit{(par incompatibilité)} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \lambda\,(1-\lambda)^{i-1} \\
&= \lambda \sum_{i=0}^{k-1} (1-\lambda)^{i} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \lambda\,\frac{1-(1-\lambda)^k}{1-(1-\lambda)} && \textit{(avec } 1-\lambda \neq 1\textit{)} \\
&= 1-(1-\lambda)^k
\end{aligned}$$

Enfin : $\mathbb{P}([X_1 > k]) \;=\; 1 - \mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) \;=\; 1 - (1-(1-\lambda)^k) \;=\; (1-\lambda)^k$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_1 > k]) \ = \ (1-\lambda)^k}$$

Commentaire

On peut aussi raisonner en partant de l'égalité : $[X_1 > k] = \bigcup\limits_{i=k+1}^{+\infty} [X_1 = i]$.

Et, avec les arguments précédents :

$$\mathbb{P}([X_1 > k]) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i]) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \lambda(1-\lambda)^{i-1} = \lambda \sum_{i=k}^{+\infty} \lambda(1-\lambda)^{i} = \lambda\, \frac{(1-\lambda)^k}{1-(1-\lambda)} = (1-\lambda)^k$$

□

b) Calculer $\mathbb{P}_{[X_1>k]}([X_1 = k+1])$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X_1>k]}([X_1 = k+1]) &= \frac{\mathbb{P}([X_1 > k] \ \cap \ [X_1 = k+1])}{\mathbb{P}([X_1 > k])} && \textit{(par définition avec } \mathbb{P}([X_1 > k]) \neq 0\textit{)} \\
&= \frac{\mathbb{P}([X_1 = k+1])}{\mathbb{P}([X_1 > k])} && \textit{(car comme } X_1 = k+1 \ \Rightarrow \ X_1 > k \textit{ alors } [X_1 = k+1] \subseteq [X_1 > k]\textit{)} \\
&= \frac{\lambda\ (1-\lambda)^k}{(1-\lambda)^k} = \lambda && \textit{(d'après la question précédente)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}_{[X_1>k]}([X_1 = k+1]) = \lambda = \mathbb{P}([X_1 = 1]).}$$

Commentaire

- Cette question est à rapprocher de la propriété classique qui énonce :

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}_{[X_1 > k]}([X_1 > k + \ell]) = \mathbb{P}([X_1 > \ell])$$

  On dit alors que la loi géométrique est à perte de mémoire (la propriété $X_1 > k$ est oubliée, seul le délai est retenu) ou encore que la loi géométrique est **sans mémoire**.
- Dans cet exercice, X_1 compte la durée de fonctionnement d'un composant avant une panne. Cette propriété signifie que la durée de vie restante du composant est indépendante de la durée de vie écoulée de ce composant (période durant laquelle il a fonctionné sans tomber en panne). Autrement dit, il n'y a pas de vieillissement ou encore d'usure du composant électronique considéré. C'est un cas assez fréquent en réalité : on peut considérer que les diodes, transistors, résistances, condensateurs sont sans usure puisque leur usure ne débute que bien après la fin de vie de l'objet dans lequel ils sont installés.
- C'est pourquoi la durée de vie d'un composant est souvent modélisée par une v.a.r. qui suit loi géométrique (seule loi discrète à perte de mémoire) ou par une v.a.r. qui suit une loi exponentielle (seule loi de v.a.r. à densité à perte de mémoire).

$\square$

c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $\mathbb{P}(A_n) = \lambda$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $\mathbb{P}(A_n) = \lambda$.

- **Initialisation** :
  D'après la question ***4.a)*** : $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}([X_1 = 1]) = \lambda\ (1-\lambda)^0 = \lambda$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \lambda$). Alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n\ p_1 + \ldots + u_0\ p_{n+1} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{4.d)}}\textit{)} \\
&= u_n\ p_1 + \ldots + u_1\ p_n + u_0\ p_{n+1} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} u_{n+1-k}\ p_k \right) + p_{n+1} && \textit{(car } u_0 = 1 \textit{ par convention)} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_{n+1-k})\ \mathbb{P}([X_1 = k]) \right) + \mathbb{P}([X_1 = n+1]) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda \times \lambda\ (1-\lambda)^{k-1} \right) + \lambda\ (1-\lambda)^n && \textit{(par hypothèses de récurrence et définition de la loi géométrique)}
\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda \times \lambda\ (1-\lambda)^{k-1} = \lambda^2 \sum_{k=0}^{n-1} (1-\lambda)^k = \lambda^{\cancel{2}}\ \frac{1-(1-\lambda)^n}{\cancel{1-(1-\lambda)}} = \lambda\ \left(1-(1-\lambda)^n\right)$$

On en déduit :

$$u_{n+1} = \lambda\ \left(1-(1-\lambda)^n\right) + \lambda\ (1-\lambda)^n = \lambda - \cancel{\lambda\ (1-\lambda)^n} + \cancel{\lambda\ (1-\lambda)^n} = \lambda$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathcal{P}(n).}$$

Commentaire

Il était aussi possible d'opérer de manière directe. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcll}
u_n & = & u_{n-1}\ p_1 + \ldots + u_0\ p_n & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{4.d)}}\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{n-k}\ p_k & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{n-k}\ \mathbb{P}([X_1 = k]) & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{n-k}\ \lambda\ (1-\lambda)^{k-1} & \\
& = & u_{n-1}\ \lambda + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_{n-k}\ \lambda\ (1-\lambda)^{k-1} & \\
& = & u_{n-1}\ \lambda + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_{n-1-k}\ \lambda\ (1-\lambda)^{k} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & \lambda\ u_{n-1} + (1-\lambda) \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_{n-1-k}\ \lambda\ (1-\lambda)^{k-1} & \\
& = & \lambda\ u_{n-1} + (1-\lambda) \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_{n-1-k}\ p_k & \\
& = & \lambda\ u_{n-1} + (1-\lambda)\ u_{n-1} \ = \ u_{n-1} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{4.d)}}\textit{)}
\end{array}$$

Ainsi, la suite (u_n) est constante.
Comme de plus $\mathbb{P}(A_1) = \lambda$, on en conclut : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \lambda$.

□

6. On suppose dans cette question que p_1 vérifie $0 < p_1 < 1$ et que $p_2 = 1 - p_1$.
Pour simplifier, on posera $p = p_1 = 1 - p_2$.

a) Que vaut p_i pour i supérieur ou égal à 3 ?

Démonstration.

- La famille $\big([X_1 = k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements. On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k]) = 1$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k = p_1 + p_2 + \sum_{k=3}^{+\infty} p_k = 1 + \sum_{k=3}^{+\infty} p_k$$

- On en déduit : $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} p_k = 0$. Or, pour tout $k \geqslant 3$, $p_k \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut que, pour tout } k \geqslant 3,\ p_k = 0.}$$

□

b) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question ***4.d)*** :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} u_{n-k}\ p_k \\ &= u_{n-1}\ p_1 + u_{n-2}\ p_2 + \sum_{k=3}^{n} u_{n-k}\ p_k && \textit{(découpage valide car } n \geqslant 2\textit{)} \\ &= u_{n-1}\ p_1 + u_{n-2}\ p_2 && \textit{(car : } \forall k \geqslant 3,\ p_k = 0\textit{)} \\ &= u_{n-1}\ p + u_{n-2}\ (1-p) \end{aligned}$$

- Il suffit alors de remarquer :

$$M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\ u_{n-1} + (1-p)\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

(la deuxième somme est nulle si $p = n$)
où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.

- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 1$ et $p = 2$.
L'argument $n \geqslant 2$ est donc nécessaire pour découper la somme.

□

c) i. Diagonaliser la matrice M.

Démonstration.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Rappelons :

$$\lambda \text{ est valeur propre de } M \Leftrightarrow M - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible}$$

- Or :

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda\ I_2) &= \det\left(\begin{pmatrix} p-\lambda & 1-p \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= -\lambda\ (p-\lambda) - (1-p) \\ &= \lambda^2 - p\ \lambda - (1-p) \\ &= (\lambda - 1)\ (\lambda + (1-p)) && \textit{(car 1 est racine évidente)} \end{aligned}$$

Ainsi : $\det(M - \lambda\ I_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ `OU` $\lambda = -(1-p) = p-1$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{p-1, 1\}}$$

- La matrice M est carrée d'ordre 2 et admet deux valeurs propres distinctes 1 et $p-1$ ($p-1 \neq 1$ car $p \neq 2$). Elle est donc diagonalisable.
- Déterminons alors $E_1(M)$. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} U \in E_1(M) & \Longleftrightarrow & (M - I_2)\ U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} (p-1)\ x & + & (1-p)\ y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{p-1} L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_1(M) & = & \{U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid (M - I_2)\ U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid x = y\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

$$\boxed{E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

- Déterminons alors $E_{-(1-p)}(M)$. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} U \in E_{-(1-p)}(M) & \Longleftrightarrow & (M + (1-p)\ I_2)\ U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & (1-p)\ y & = & 0 \\ x & + & (1-p)\ y & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_{-(1-p)}(M) & = & \{U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid (M + (1-p)\ I_2)\ U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid x = -(1-p)\ y\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} -(1-p)\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y \cdot \begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

$$\boxed{E_{-(1-p)}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

- En conclusion, la matrice M est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix}$.
  Autrement dit, il existe $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$M = PDP^{-1}$$

- La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est obtenue comme concaténation d'une base de vecteurs propres de $E_1(M)$ et d'une base de vecteurs propres de $E_{-(1-p)}(M)$.
Enfin, d'après la formule d'inversion des matrices carrées d'ordre 2 :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

ii. Montrer que :

$$M^{n-1} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration.
Avec les notations de la question précédente : $M = PDP^{-1}$.
Ainsi, par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$. D'où :

$$\begin{aligned} M^{n-1} &= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & (p-1)^n \\ 1 & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1-(p-1)^n & 1-p+(p-1)^n \\ 1-(p-1)^{n-1} & 1-p+(p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2-p} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(p-1)^n & (p-1)^n \\ -(p-1)^{n-1} & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2-p} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + (p-1)^{n-1} \begin{pmatrix} -(p-1) & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } M^{n-1} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

d) i. Exprimer u_n en fonction de p et de n.

Démonstration.

- D'après la question ***6.b)***, pour tout $n \geqslant 2$: $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$.
- On obtient ainsi, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ u_{n-3} \end{pmatrix} = \ldots = M^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$$

(on le démontre rigoureusement par une récurrence immédiate)

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} -p^2+2p-1 \\ -p+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Et ainsi :

$$u_n \;=\; \frac{1}{2-p}\ \big(1-(p-1)^{n-1}(p-1)^2\big) \;=\; \frac{1}{2-p}\ \big(1-(p-1)^{n+1}\big)$$

$$\boxed{u_n \;=\; \frac{1}{2-p}\ \big(1-(p-1)^{n+1}\big)}$$

□

ii. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $0 < p < 1$. On en déduit : $-1 < p-1 < 0$. Ainsi : $|p-1| < 1$.
- On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (p-1)^{n+1} = 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente, de limite } \frac{1}{2-p}.}$$

□

Troisième partie : Étude de la durée de fonctionnement.

Comme dans la partie précédente, on suppose donnée une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geqslant 1}$ indépendantes et de même loi, telle que pour tout entier i non nul, X_i représente la durée de vie en jours du i-ème composant en fonctionnement.
Soit k un entier naturel non nul. On étudie dans cette partie la durée de fonctionnement prévisible du système si on a k composants à disposition (y compris celui installé au départ).
On notera toujours $T_k = X_1 + ... + X_k$.
On suppose dans cette partie qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que pour tout entier naturel j on ait :

$$\mathbb{P}([X_1 > j]) = \frac{1}{(j+1)^\alpha}$$

En particulier, dans toute cette partie, X_1 admet une espérance, on l'on notera $\mu = \mathbb{E}(X_1)$.

7. Que vaut $\mathbb{E}(T_k)$?

Démonstration.

- La v.a.r. T_k admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance.
- De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(T_k) & = & \mathbb{E}\big(\sum\limits_{i=1}^{k} X_i\big) & \\
 & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{E}(X_i) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
 & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{E}(X_1) & \textit{(car les v.a.r. } X_i \textit{ ont même loi)} \\
 & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mu \;=\; k\mu &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_k) = k\mu}$$

□

8. On suppose, **dans cette question**, que α est strictement supérieur à 2. La variable aléatoire X_1 admet donc une variance σ^2.

a) Calculer $\mathbb{V}(T_k)$.

Démonstration.

- La v.a.r. T_k admet une variance comme somme de v.a.r. indépendantes qui admettent une variance.
- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(T_K) & = & \mathbb{V}\big(\sum\limits_{i=1}^{k} X_i\big) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{V}(X_i) & \textit{(car les v.a.r. } X_i \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{V}(X_1) & \textit{(car les v.a.r. } X_i \textit{ ont même loi)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \sigma^2 \ = \ k\sigma^2 & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(T_k) = k\sigma^2}$$

□

b) Montrer que pour tout réel ε strictement positif,

$$\mathbb{P}\left([|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon]\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$.

- Commençons par rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
  Pour toute v.a.r. Y qui admet une variance, on a :

$$\forall a > 0,\ \mathbb{P}\big(\, [|Y - \mathbb{E}(Y)| \geqslant a]\,\big) \ \leqslant \ \frac{\mathbb{V}(Y)}{a^2}$$

- Il suffit d'appliquer cette inégalité à la v.a.r. $Y = T_k$ qui admet une variance (d'après la question précédente) et à $a = k\varepsilon > 0$. On obtient :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}\big(\, [|T_k - \mathbb{E}(T_k)| \geqslant k\varepsilon]\,\big) & \leqslant & \dfrac{\mathbb{V}(T_k)}{k^2\varepsilon^2} & & \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ \mathbb{P}\big(\, [|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon]\,\big) & & \dfrac{\cancel{k}\sigma^2}{k^{\cancel{2}}\varepsilon^2} & = & \dfrac{\sigma^2}{k\varepsilon^2} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\, [|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon]\,\big) \ \leqslant \ \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}}$$

□

c) Déduire que, pour tout réel strictement positif ε, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{T_k}{k} \in \left]\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon\right[\right]\right) = 1$$

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question précédente :

$$0 \ \leqslant\ \mathbb{P}\big(\left[|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon\right]\big) \ \leqslant\ \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}$$

  Or : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2} = 0$ et $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} 0 = 0$.
  On en déduit, par le théorème d'encadrement, que : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\big(\left[|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon\right]\big) = 0$.

- Par ailleurs, en considérant l'événement contraire :

$$\mathbb{P}\big(\left[|T_k - k\mu| < k\varepsilon\right]\big) \ = \ 1 - \mathbb{P}\big(\left[|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon\right]\big)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\big(\left[|T_k - k\mu| < k\varepsilon\right]\big) = 1 - 0 = 1}$$

- Enfin, on remarque :

$$\begin{aligned} |T_k - k\mu| < k\varepsilon \ &\Leftrightarrow\ -k\varepsilon < T_k - k\mu < k\varepsilon \\ &\Leftrightarrow\ k\mu - k\varepsilon < T_k < k\mu + k\varepsilon \\ &\Leftrightarrow\ \mu - \varepsilon < \frac{T_k}{k} < \mu + \varepsilon \qquad \textit{(en divisant par } k > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow\ \frac{T_k}{k} \in \left]\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon\right[\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En combinant ces deux résultats, on obtient : } \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\tfrac{T_k}{k} \in \left]\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon\right[\right]\right) = 1.}$$ □

9. On suppose maintenant uniquement que $\alpha > 1$ et donc que X_1 n'a pas nécessairement de variance d'où l'impossibilité d'appliquer la méthode précédente. On va mettre en œuvre ce qu'on appelle une méthode de troncation.
On fixe un entier naturel m strictement positif. Pour tout entier naturel non nul i, on définit deux variables aléatoires $Y_i^{(m)}$ et $Z_i^{(m)}$ de la façon suivante

$$Y_i^{(m)} = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i \leqslant m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad Z_i^{(m)} = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i > m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que $X_i = Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)}$.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

- Si $X_i(\omega) \leqslant m$ alors, par définition :

$$Y_i^{(m)}(\omega) = X_i(\omega) \quad \text{et} \quad Z_i^{(m)}(\omega) = 0$$

  Ainsi : $Y_i^{(m)}(\omega) + Z_i^{(m)}(\omega) \ = \ X_i(\omega)$.

- Si $X_i(\omega) > m$ alors, par définition :

$$Y_i^{(m)}(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad Z_i^{(m)}(\omega) = X_i(\omega)$$

Ainsi : $Y_i^{(m)}(\omega) + Z_i^{(m)}(\omega) \ = \ X_i(\omega)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } \omega \in \Omega,\ X_i(\omega) \ = \ Y_i^{(m)}(\omega) + Z_i^{(m)}(\omega).}$$

Commentaire

- Au vu des formulations de l'énoncé, on peut supposer ici qu'une disjonction de cas écrite sans les ω (cas $X \leqslant m$ et cas $X > m$) serait acceptée. Cependant, il faut bien comprendre que toute v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Écrire « si $X \leqslant m$ » signifie donc que l'on considère tous les éléments $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega) \leqslant m$ c'est à dire tous les éléments ω qui réalisent l'événement $[X \leqslant m]$.
- La présentation des v.a.r. $Y_i^{(m)}$ et $Z_i^{(m)}$ aurait d'ailleurs pu se faire comme suit :

$$Y_i^{(m)} : \omega \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} X_i(\omega) & \text{si } X_i(\omega) \leqslant m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right. \qquad Z_i^{(m)} : \omega \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} X_i(\omega) & \text{si } X_i(\omega) > m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

□

b) i. En utilisant la question ***3.d)ii.***, montrer que :

$$\mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \ \leqslant \ \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha}$$

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord : $Z_1^{(m)} = \left\{ \begin{array}{cl} X_1 & \text{si } X_1 > m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$.

  Ainsi, la v.a.r. $Z_1^{(m)}$ prend la valeur 0 et toutes les valeurs strictement plus grandes que m prises par la v.a.r. X_1.

$$\boxed{\text{Comme } X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*, \text{ on en déduit : } Z_1^{(m)}(\Omega) = \{0\} \ \cup \ [\![m+1, +\infty [\![.}$$

- La v.a.r. $Z_1^{(m)}$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{i \geqslant m+1} i \ \mathbb{P}\Big(\Big[Z_1^{(m)} = i\Big] \Big)$ est absolument convergente (on laisse de côté la quantité $0 \times \mathbb{P}\big(\Big[Z_1^{(m)} = 0\Big] \big)$ qui ne modifie pas la somme). Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Or, pour tout $i \geqslant m+1$: $\Big[Z_1^{(m)} = i\Big] = [X_1 = i]$.

  Ainsi, la v.a.r. $Z_1^{(m)}$ admet une espérance car X_1 en admet une.
- La v.a.r. X_1 vérifie les propriétés de la question ***3***.
  On peut donc utiliser le résultat de la question ***3.d).ii.*** :

$$\mathbb{P}([X_1 = i]) \ \leqslant \ \frac{\alpha}{i^{1+\alpha}} \quad \text{ et ainsi } \quad i \ \mathbb{P}([X_1 = i]) \ \leqslant \ \frac{\alpha}{i^\alpha}$$

  En sommant de part et d'autre ces inégalités, on obtient :

$$\mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) = \sum_{i=m+1}^{+\infty} i \ \mathbb{P}([X_1 = i]) \ \leqslant \ \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \ \leqslant \ \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha}}$$

□

ii. Montrer que :

$$\mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \ \leqslant \ \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx$$

Démonstration.

- Soit $i \in [\![m, +\infty[\![$. Soit $x \in [i, i+1]$.

$$\begin{array}{lcl}
\text{Alors} & i \ \leqslant \ x \ \leqslant \ i+1 & \\
\text{donc} & i^\alpha \ \leqslant \ x^\alpha \ \leqslant \ (i+1)^\alpha & \textit{(par croissance de } x \mapsto x^\alpha \textit{ sur } [0, +\infty[\textit{)} \\
\text{et} & \dfrac{1}{i^\alpha} \ \geqslant \ \dfrac{1}{x^\alpha} \ \geqslant \ \dfrac{1}{(i+1)^\alpha} & \textit{(par décroissance de } x \mapsto \dfrac{1}{x} \textit{ sur }]0, +\infty[\textit{)} \\
\text{ainsi} & \dfrac{\alpha}{i^\alpha} \ \geqslant \ \dfrac{\alpha}{x^\alpha} \ \geqslant \ \dfrac{\alpha}{(i+1)^\alpha} & \textit{(en multipliant par } \alpha > 0\textit{)} \\
\text{enfin} & \displaystyle\int_i^{i+1} \frac{\alpha}{i^\alpha}\, dx \ \geqslant \ \int_i^{i+1} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx \ \geqslant \ \int_i^{i+1} \frac{\alpha}{(i+1)^\alpha}\, dx & \textit{(par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant } (i \leqslant i+1)\textit{)}
\end{array}$$

On remarque alors : $\displaystyle\int_i^{i+1} \frac{\alpha}{(i+1)^\alpha}\, dx \ = \ \frac{\alpha}{(i+1)^\alpha}$.

- Soit $N \in [\![m, +\infty[\![$. En sommant les inégalités de droite membre à membre, on obtient :

$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\sum_{i=m}^{N} \int_i^{i+1} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx & \geqslant & \displaystyle\sum_{i=m}^{N} \frac{\alpha}{(i+1)^\alpha} \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
\displaystyle\int_m^{N+1} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx & \geqslant & \displaystyle\sum_{i=m+1}^{N+1} \frac{\alpha}{i^\alpha}
\end{array} \quad \textit{(par relation de Chasles et décalage d'indice)}$$

- L'intégrale impropre $\displaystyle\int_m^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $\alpha > 1$. De même, la série $\sum \dfrac{1}{i^\alpha}$ est convergente en tant que série de Riemann, d'exposant $\alpha > 1$. On peut donc passer à la limite dans l'inégalité précédente :

$$\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx \ \geqslant \ \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha}$$

$$\boxed{\text{On obtient ainsi l'inégalité souhaitée : } \mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \ \leqslant \ \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx}$$

□

iii. Calculer :

$$\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx$$

Démonstration.

- Soit $N \in [\![m, +\infty[\![$.

$$\int_m^N \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx \ = \ \alpha \int_m^N x^{-\alpha}\, dx \ = \ \alpha \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_m^N \ = \ \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_m^N \ = \ \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - \frac{1}{m^{\alpha-1}} \right)$$

- Or, comme $\alpha - 1 > 0$: $\lim\limits_{N \to +\infty} N^{\alpha-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{N \to +\infty} \dfrac{1}{N^{\alpha-1}} = 0$. Ainsi :

$$\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx \ = \ \lim_{N \to +\infty} \int_m^N \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx \ = \ \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(0 - \frac{1}{m^{\alpha-1}}\right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx \ = \ \frac{\alpha}{\alpha-1}\, \frac{1}{m^{\alpha-1}}.}$$

□

iv. En déduire que :

$$\lim_{m \to +\infty} \mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) = 0$$

Démonstration.

- Comme $Z_1^{(m)}$ est à valeurs entières : $Z_1^{(m)} \geqslant 0$. Ainsi, par croissance de l'espérance :

$$\mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \ \geqslant \ 0$$

- À l'aide des questions ***9.b).ii.*** et ***9.b).iii.***, on en déduit :

$$0 \ \leqslant \ \mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \ \leqslant \ \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx \ = \ \frac{\alpha}{\alpha-1}\, \frac{1}{m^{\alpha-1}}$$

Or, comme $\alpha - 1 > 0$: $\lim\limits_{m \to +\infty} \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\, \dfrac{1}{m^{\alpha-1}} = 0$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement, on en déduit : } \lim_{m \to +\infty} \mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \ = \ 0.}$$

□

v. Montrer que

$$\lim_{m \to +\infty} \mathbb{E}\big(Y_1^{(m)}\big) = \mu$$

Démonstration.

- D'après la question ***9.a)*** : $X_1 = Y_1^{(m)} + Z_1^{(m)}$. Ainsi :

$$Y_1^{(m)} = X_1 - Z_1^{(m)}$$

- La v.a.r. $Y_1^{(m)}$ admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance. De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\big(Y_1^{(m)}\big) \ = \ \mathbb{E}\big(X_1\big) - \mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big)$$

Comme $\mathbb{E}\big(X_1\big)$ et $\mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big)$ admettent une limite lorsque $m \to +\infty$, il en est de même de $\mathbb{E}\big(Y_1^{(m)}\big)$ et :

$$\begin{aligned} \lim_{m \to +\infty} \mathbb{E}\big(Y_1^{(m)}\big) \ &= \ \lim_{m \to +\infty} \mathbb{E}\big(X_1\big) - \lim_{m \to +\infty} \mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) \\ &= \ \lim_{m \to +\infty} \mu - 0 && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= \ \mu \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{m \to +\infty} \mathbb{E}\big(Y_1^{(m)}\big) = \mu}$$

□

c) i. Montrer que
$$\left(Y_1^{(m)}\right)^2 \leqslant mX_1$$

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

- Si $X_1(\omega) \leqslant m$ alors, par définition :
$$Y_1^{(m)}(\omega) \;=\; X_1(\omega) \quad \text{et} \quad \left(Y_1^{(m)}(\omega)\right)^2 \;=\; \left(X_1(\omega)\right)^2$$
Enfin, comme $X_1(\omega) \leqslant m$ et $X_1(\omega) \geqslant 0$ alors $X_1(\omega)\ X_1(\omega) \leqslant mX_1(\omega)$.
- Si $X_1(\omega) > m$ alors, par définition :
$$Y_i^{(m)}(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad \left(Y_1^{(m)}(\omega)\right)^2 \;=\; 0$$
Enfin, comme $X_1(\omega) \geqslant 0$ et $m \geqslant 0$ alors $\left(Y_1^{(m)}(\omega)\right)^2 = 0 \leqslant mX_1(\omega)$.

$$\boxed{\left(Y_1^{(m)}\right)^2 \leqslant mX_1}$$
□

ii. En déduire que
$$\mathbb{V}\left(Y_1^{(m)}\right) \leqslant m\mu$$

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord : $Y_1^{(m)} = \begin{cases} X_1 & \text{si } X_1 \leqslant m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.
Ainsi, outre 0, $Y_1^{(m)}$ prend les valeurs de X_1 plus petites que m.
On en déduit : $Y_1^{(m)}(\Omega) = [\![0, m]\!]$.
- La v.a.r. $Y_1^{(m)}$ est finie. Elle admet donc une variance.
D'après la formule de Kœnig-Huygens :
$$\mathbb{V}\left(Y_1^{(m)}\right) \;=\; \mathbb{E}\left(\left(Y_1^{(m)}\right)^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(Y_1^{(m)}\right)\right)^2 \;\leqslant\; \mathbb{E}\left(\left(Y_1^{(m)}\right)^2\right)$$
- Or, d'après la question précédente et par croissance de l'espérance :
$$\mathbb{E}\left(\left(Y_1^{(m)}\right)^2\right) \;\leqslant\; \mathbb{E}\left(mX_1\right) \;=\; m\,\mathbb{E}\left(X_1\right) \;=\; m\mu$$

$$\boxed{\text{En combinant ces résultats, on obtient : } \mathbb{V}\left(Y_1^{(m)}\right) \;\leqslant\; m\mu.}$$
□

d) Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un entier naturel m_0 non nul tel que pour tout entier naturel m supérieur ou égal à m_0,
$$\frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} \leqslant \varepsilon$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$.

- Comme on l'a vu en question ***9.b)iv.*** : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \frac{\alpha}{\alpha-1}\ \frac{1}{m^{\alpha-1}} = 0$.
- Par définition de la notion de limite, il existe un rang $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall m \geqslant m_0,\ \left|\frac{\alpha}{\alpha-1}\ \frac{1}{m^{\alpha-1}}\right| \;\leqslant\; \varepsilon$$

$$\boxed{\text{Comme } \alpha - 1 > 0 \text{, on obtient : } \forall m \geqslant m_0,\ \frac{\alpha}{\alpha-1}\ \frac{1}{m^{\alpha-1}} \;=\; \left|\frac{\alpha}{\alpha-1}\ \frac{1}{m^{\alpha-1}}\right| \;\leqslant\; \varepsilon.}$$
□

Jusqu'à la fin du problème, m désignera un entier supérieur ou égal à m_0.

e) On note, pour tout entier naturel k non nul

$$U_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} Y_i^{(m)} \quad \text{et} \quad V_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} Z_i^{(m)}$$

Vérifier que :

$$T_k = U_k^{(m)} + V_k^{(m)}$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Remarquons :

$$\begin{array}{rcll} U_k^{(m)} + V_k^{(m)} & = & \sum\limits_{i=1}^{k} Y_i^{(m)} + \sum\limits_{i=1}^{k} Z_i^{(m)} & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \left(Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)} \right) & \textit{(par linéarité de la somme)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} X_i & \textit{(d'après la question \textbf{9.a)})} \\ & = & T_k & \end{array}$$

$$\boxed{T_k = U_k^{(m)} + V_k^{(m)}}$$

□

f) i. Montrer que :

$$\mathbb{E}\big(V_k^{(m)}\big) \ \leqslant \ k \ \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha}$$

Démonstration.

- La v.a.r. $V_k^{(m)}$ admet une espérance comme somme de v.a.r. admettant une espérance.
- De plus par linéarité de l'espérance :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}\big(V_k^{(m)}\big) & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{E}\big(Z_i^{(m)}\big) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) & \textit{(car les v.a.r. } X_i \textit{ et donc les v.a.r. } Z_i^{(m)} \textit{ ont même loi)} \\ & = & k \ \mathbb{E}\big(Z_1^{(m)}\big) & \\ & \leqslant & k \ \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} \ \dfrac{1}{m^{\alpha - 1}} & \textit{(d'après les questions \textbf{9.b)ii.} et \textbf{9.b)iii.})} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } \mathbb{E}\big(V_k^{(m)}\big) \ \leqslant \ k \ \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha}.}$$

□

ii. En déduire que :

$$\mathbb{P}\left(\left[V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon \right] \right) \ \leqslant \ \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}$$

Démonstration.

- Commençons par rappeler l'inégalité de Markov.
  Pour toute v.a.r. Y à valeurs positives et qui admet une espérance, on a :

$$\forall a > 0, \ \mathbb{P}([Y \geqslant a]) \ \leqslant \ \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}$$

- Il suffit d'appliquer cette inégalité à la v.a.r. $Y = V_k^{(m)}$ à valeurs positives (comme somme de v.a.r. à valeurs positives) et qui admet une espérance et à $a = k\varepsilon$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\Big[V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon\Big]\Big) &\leqslant \frac{\mathbb{E}\big(V_k^{(m)}\big)}{k\varepsilon} \\
&\leqslant \frac{\cancel{k}\ \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}}{\cancel{k}\varepsilon} \qquad \textit{(d'après la question précédente)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \mathbb{P}\Big(\Big[V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon\Big]\Big) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}\ \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}.}$$

□

g) (i) Montrer que :

$$\mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big) \geqslant k\mu - k\frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}$$

Démonstration.

- D'après la question ***9.e)*** : $U_k^{(m)} = T_k - V_k^{(m)}$.
  La v.a.r. $U_k^{(m)}$ admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance.
- De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big) &= \mathbb{E}(T_k) - \mathbb{E}\big(V_k^{(m)}\big) \\
&= k\mu - \mathbb{E}\big(V_k^{(m)}\big) \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{7.}\textit{)} \\
&\geqslant k\mu - k\ \frac{\alpha}{\alpha-1}\ m^{1-\alpha} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{9.f)i.}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big) \geqslant k\mu - k\frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}}$$

□

(ii) En déduire que :

$$\Big|\ \mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu\ \Big| \leqslant k\varepsilon$$

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big) - k\mu \geqslant -k\ \frac{\alpha}{\alpha-1}\ m^{1-\alpha}$$

- Toujours d'après la question précédente :

$$\mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big) = k\mu - \mathbb{E}\big(V_k^{(m)}\big) \quad \text{et donc} \quad \mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big) - k\mu = -\mathbb{E}\big(V_k^{(m)}\big)$$

  Or $\mathbb{E}\big(V_k^{(m)}\big) \geqslant 0$ par croissance de l'espérance et car $V_k^{(m)}$ est à valeurs positives (comme somme de v.a.r. à valeurs positives).
- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\Big|\ \mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu\ \Big| &= -\Big(\mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu\Big) \\
&\leqslant k\ \frac{\alpha}{\alpha-1}\ m^{1-\alpha} \qquad \textit{(d'après le point développé en début de démonstration)} \\
&\leqslant k\varepsilon \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{9.d)}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Big|\ \mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu\ \Big| \leqslant k\varepsilon}$$

□

(iii) Montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\left[|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon\right]\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[|U_k^{(m)} - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \geqslant k\varepsilon\right]\right)$$

Démonstration.

- Si on parvient à démontrer :

$$\left[|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon\right] \subset \left[|U_k^{(m)} - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \geqslant k\varepsilon\right]$$

alors, par croissance de l'application $\mathbb{P}$, on pourra conclure :

$$\mathbb{P}\left(\left[|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon\right]\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[|U_k^{(m)} - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \geqslant k\varepsilon\right]\right)$$

- Démontrons donc cette inclusion.
Soit $\omega \in \Omega$. Supposons $\omega \in \left[|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon\right]$ *i.e.* $|U_k^{(m)}(\omega) - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon$.

D'après l'inégalité triangulaire :

$$|U_k^{(m)}(\omega) - k\mu| \leqslant |\ U_k^{(m)}(\omega) - \mathbb{E}(U_k^{(m)})\ | + |\ \mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu\ |$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} |\ U_k^{(m)}(\omega) - \mathbb{E}(U_k^{(m)})\ | &\geqslant |\ U_k^{(m)}(\omega) - k\mu\ | - |\ \mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu\ | \\ &\geqslant 2k\varepsilon - |\ \mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu\ | && \textit{(par hypothèse)} \\ &\geqslant 2k\varepsilon - k\varepsilon = k\varepsilon && \textit{(d'après la question précédente)} \end{aligned}$$

On en conclut : $\omega \in \left[|\ U_k^{(m)}(\omega) - \mathbb{E}(U_k^{(m)})\ | \geqslant k\varepsilon\right]$.
Ce qui démontre l'inclusion.

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } \mathbb{P}\left(\left[|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon\right]\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[|U_k^{(m)} - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \geqslant k\varepsilon\right]\right).}$$

Commentaire

Une nouvelle fois dans cet énoncé, nous avons affaire à un raisonnement sur les événements. L'utilisation de la fonction $\mathbb{P}$ n'arrive que dans un deuxième temps.

□

(iv) Montrer que :

$$\mathbb{V}(U_k^{(m)}) \leqslant km\mu$$

Démonstration.

- Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $Y_i^{(m)}$ admet une variance d'après la question ***9.c).ii***.
- Par ailleurs, les v.a.r. X_i sont indépendantes. Il en est donc de même des v.a.r. $Y_i^{(m)}$ d'après le lemme des coalitions.
- La v.a.r. $U_k^{(m)}$ admet une variance comme somme de v.a.r. indépendantes qui admettent une variance. De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(U_k^{(m)}) &= \mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{k} Y_i^{(m)}\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{V}(Y_i^{(m)}) && \textit{(par indépendance des v.a.r. } Y_i^{(m)}\textit{)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{V}(Y_1^{(m)}) = k\ \mathbb{V}(Y_1^{(m)}) && \textit{(car les v.a.r. } X_i \textit{ et donc les v.a.r. } Y_i^{(m)} \textit{ ont même loi)} \end{aligned}$$

- On en déduit, d'après la question ***9.c).ii*** :

$$\mathbb{V}\big(U_k^{(m)}\big) = k\ \mathbb{V}\big(Y_1^{(m)}\big) \ \leqslant\ km\mu$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{V}\big(U_k^{(m)}\big) \ \leqslant\ km\mu.}$$ □

(v) En déduire que :

$$\mathbb{P}\left(\left[|U_k^{(m)} - k\mu| \ \geqslant\ 2k\varepsilon\right]\right) \ \leqslant\ \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

Démonstration.

- En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la v.a.r. $Y = U_k^{(m)}$ qui admet une variance (d'après la question précédente) et à $a = k\varepsilon > 0$. On obtient :

$$\mathbb{P}\big(\ \left[|U_k^{(m)} - \mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big)| \geqslant k\varepsilon\right]\ \big) \ \leqslant\ \frac{\mathbb{V}\big(U_k^{(m)}\big)}{k^2\varepsilon^2}$$

- Or, d'après la question ***9.g)iii*** :

$$\mathbb{P}\big(\ \left[|U_k^{(m)} - k\mu)| \geqslant 2k\varepsilon\right]\ \big) \ \leqslant\ \mathbb{P}\big(\ \left[|U_k^{(m)} - \mathbb{E}\big(U_k^{(m)}\big)| \geqslant k\varepsilon\right]\ \big)$$

- De plus, d'après la question précédente :

$$\frac{\mathbb{V}\big(U_k^{(m)}\big)}{k^2\varepsilon^2} \ \leqslant\ \frac{\cancel{k}m\mu}{k^{\cancel{2}}\varepsilon^2} \ =\ \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

$$\boxed{\text{En combinant ces trois résultats, on obtient : } \mathbb{P}\left(\left[|U_k^{(m)} - k\mu| \ \geqslant\ 2k\varepsilon\right]\right) \ \leqslant\ \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}}$$ □

h) (i) Montrer que pour tout couple d'événements A et B dans $\mathcal{A}$, on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) \ \geqslant\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

Démonstration.

Remarquons tout d'abord : $\mathbb{P}(A \cup B) \ =\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A \cap B) \ =\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$$

De plus, $\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant 1$ et donc $-\mathbb{P}(A \cup B) \geqslant -1$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}(A \cap B) \ =\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \ \geqslant\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1}$$

Commentaire

- On est confronté ici à une question qui n'a pas de lien direct avec les questions précédentes. Le concepteur a estimé (à raison) que la question suivante est trop compliquée pour être traitée directement. Il a donc préféré la découper en 2 questions distinctes. C'est une bonne opportunité de marquer des points :
  × cette question ***9.h)i.*** est simple puisque ne demande que des connaissances de première année sur l'application $\mathbb{P}$.
  × la question suivante ***9.h)ii.*** est plus complexe dans sa présentation mais l'énoncé la simplifie car donne la marche à suivre pour la traiter. Il faut savoir repérer ce type de questions où l'énoncé fournit la méthode de résolution.
- Il n'y a pas forcément dans les sujets une croissance linéaire de la difficulté. Au contraire, chaque nouvelle partie commence généralement par une question plus simple de mise en route. Il n'est donc pas judicieux de laisser de côté certaines parties.

□

(ii) En appliquant l'inégalité précédente aux événements :

$$A = \left[V_k^{(m)} < k\varepsilon\right] \qquad \text{et} \qquad B = \left[U_k^{(m)} \in \left]k(\mu-2\varepsilon), k(\mu+2\varepsilon)\right[\right]$$

montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\left[T_k \in \left]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)\right[\,\right]\right) \geqslant \mathbb{P}\left(\left[V_k^{(m)} < k\varepsilon\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[U_k^{(m)} \in \left]k(\mu-2\varepsilon), k(\mu+2\varepsilon)\right[\right]\right) - 1$$

Démonstration.

- On reconnaît à droite de l'inégalité souhaitée : $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$.
  Il s'agit ici de démontrer :
  $$\left[T_k \in \left]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)\right[\,\right] \ \supset \ A \cap B$$
  On pourra alors en déduire, par croissance de l'application $\mathbb{P}$:
  $$\mathbb{P}(\left[T_k \in \left]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)\right[\,\right]) \ \geqslant \ \mathbb{P}(A \cap B)$$
  ce qui permet de conclure car $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$ d'après la question précédente.
- Démontrons donc cette inclusion.
  Soit $\omega \in A \cap B$. Ainsi :
  × $\omega \in A = \left[V_k^{(m)}(\omega) < k\varepsilon\right]$ *i.e.* $V_k^{(m)}(\omega) < k\varepsilon$.
  Comme la v.a.r. $V_k^{(m)}$ est à valeurs positives, on a alors :
  $$-k\varepsilon \ < \ 0 \ \leqslant \ V_k^{(m)}(\omega) \ < \ k\varepsilon$$
  × $\omega \in B$ *i.e.* $U_k^{(m)}(\omega) \in \left]k(\mu-2\varepsilon), k(\mu+2\varepsilon)\right[$. Autrement dit :
  $$k(\mu-2\varepsilon) \ < \ U_k^{(m)}(\omega) \ < \ k(\mu+2\varepsilon)$$
  En sommant membre à membre ces inégalités, on obtient :
  $$\begin{array}{ccccc} -k\varepsilon + k(\mu-2\varepsilon) & < & U_k^{(m)}(\omega) + V_k^{(m)}(\omega) & < & k(\mu+2\varepsilon) + k\varepsilon \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ k(\mu-3\varepsilon) & & T_k(\omega) & & k(\mu+3\varepsilon) \end{array}$$
  Ainsi : $\omega \in \left[T_k \in \left]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)\right[\,\right]$.
  Ce qui démontre l'inclusion.

$$\boxed{\text{On a donc bien : } \mathbb{P}(\left[T_k \in \left]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)\right[\,\right]) \ \geqslant \ \mathbb{P}(A \cap B) \ \geqslant \ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1.}$$

Commentaire

Encore et toujours, on commence par raisonner sur les événements et on conclut par application de $\mathbb{P}$. Il est important d'agir avec méthode si l'on souhaite résoudre ce type de questions.

□

(iii) Déduire des questions précédentes que pour tout réel ε strictement positif, et pour tout entier m supérieur ou égal à m_0, on a pour tout entier naturel k non nul :

$$\mathbb{P}\left(\left[\ T_k \in \left]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)\right[\ \right]\right) \ \geqslant\ 1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\,\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$, soit $m \geqslant m_0$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***9.f)ii.*** :

$$\mathbb{P}\left(\left[V_k^{(m)} < k\varepsilon\right]\right) \ =\ 1 - \mathbb{P}\left(\left[V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon\right]\right) \ \geqslant\ 1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\ \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}$$

- D'après la question ***9.g)v.***, comme $m \geqslant m_0$:

$$\mathbb{P}\left(\left[\ |U_k^m - k\mu| \ <\ 2k\varepsilon\right]\right) \ =\ 1 - \mathbb{P}\left(\left[\ |U_k^m - k| \ \geqslant\ 2k\varepsilon\right]\right) \ \geqslant\ 1 - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

  Par ailleurs :

$$\left[\ |U_k^m - k\mu| \ <\ 2k\varepsilon\right] \ =\ \left[\ U_k^m \in \left]k(\mu-2\varepsilon), k(\mu+2\varepsilon)\right[\ \right]$$

  En effet, si $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \omega \in \left[\ |U_k^m - k\mu| \ <\ 2k\varepsilon\right] \ &\Leftrightarrow\ |U_k^m(\omega) - k\mu| \ <\ 2k\varepsilon \\ &\Leftrightarrow\ -2k\varepsilon \ <\ U_k^m(\omega) - k\mu \ <\ 2k\varepsilon \\ &\Leftrightarrow\ k\mu - 2k\varepsilon \ <\ U_k^m(\omega) \ <\ k\mu 2k\varepsilon \\ &\Leftrightarrow\ \omega \in \left[\ U_k^m \in \left]k(\mu-2\varepsilon), k(\mu+2\varepsilon)\right[\ \right] \end{aligned}$$

- Ainsi, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\left[\ T_k \in \left]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)\right[\ \right]\right) \\ \geqslant\ &\mathbb{P}\left(\left[V_k^{(m)} < k\varepsilon\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[U_k^{(m)} \in \left]k(\mu-2\varepsilon), k(\mu+2\varepsilon)\right[\right]\ \right) - 1 \\ \geqslant\ &\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\ \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}\right) + \left(\cancel{1} - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}\right) - \cancel{1} \\ \geqslant\ &1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\ \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, pour } \varepsilon,\ m \text{ et } k \text{ choisis convenablement :} \\ \mathbb{P}\left(\left[\ T_k \in \left]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)\right[\ \right]\right) \ \geqslant\ 1 - \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\dfrac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \dfrac{m\mu}{k\varepsilon^2}.\end{array}}$$

□

(iv) Pour k assez grand, appliquer l'inégalité précédente à un entier $m_k \in [\sqrt{k}, 2\sqrt{k}]$ et conclure que :

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{T_k}{k} \in \left]\mu-3\varepsilon, \mu+3\varepsilon\right[\right]\ \right) = 1$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$. On sait, d'après la question ***9.d)*** qu'il existe un entier $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall m \geqslant m_0,\ \frac{\alpha}{\alpha-1}\ m^{1-\alpha} \ \leqslant\ \varepsilon$$

Cette inégalité est essentielle pour démontrer la question ***9.g)ii***, qui permet de démontrer la ***9.g)v***, qui permet à son tour de démontrer la question précédente.

- Le résultat de la question précédente est vérifié pour tout entier $m \geqslant m_0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Choisissons alors $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{k} \geqslant m_0$ et considérons $m_k \in [\sqrt{k}, \sqrt{2k}]$. Alors :

$$m_k \ \geqslant\ \sqrt{k}\ \geqslant\ m_0$$

et on peut appliquer l'inégalité de la question précédente en $m = m_k$.
On obtient :

$$\mathbb{P}\left(\left[\ T_k \in \left]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)\right[\ \right]\right) \ \geqslant\ 1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m_k^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m_k\ \mu}{k\varepsilon^2}$$

- Comme $m_k \ \geqslant\ \sqrt{k}$ et $\alpha - 1 > 0$ alors :

$$m_k^{\alpha-1} \ \geqslant\ \left(\sqrt{k}\right)^{\alpha-1}$$

donc $$\frac{1}{m_k^{\alpha-1}} \ \leqslant\ \frac{1}{(\sqrt{k})^{\alpha-1}}$$ *(par décroissance de* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *sur* $]0,+\infty[$*)*

ainsi $$-\frac{\alpha}{(\alpha-1)\ \varepsilon}\ \frac{1}{m_k^{\alpha-1}} \ \geqslant\ -\frac{\alpha}{(\alpha-1)\ \varepsilon}\ \frac{1}{(\sqrt{k})^{\alpha-1}}$$ *(car* $-\dfrac{\alpha}{\alpha-1} < 0$*)*

- Comme $m_k \leqslant 2\sqrt{k}$ alors $-m_k \geqslant -2\sqrt{k}$. Et ainsi, en multipliant par $\dfrac{\mu}{k\ \varepsilon^2} > 0$:

$$-\frac{m_k\ \mu}{k\ \varepsilon^2} \ \geqslant\ -2\frac{\sqrt{k}\ \mu}{k\ \varepsilon^2} \ =\ -2\frac{\mu}{\sqrt{k}\ \varepsilon^2}$$

- On en déduit :

$$1 \ \geqslant\ \underbrace{\mathbb{P}\left(\left[\ T_k \in \left]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)\right[\ \right]\right)}_{=\ \mathbb{P}\left(\left[\ \frac{T_k}{k} \in \left]\mu - 3\varepsilon, \mu + 3\varepsilon\right[\ \right]\right)} \ \geqslant\ 1 - \frac{\alpha}{(\alpha-1)\ \varepsilon}\ \frac{1}{(\sqrt{k})^{\alpha-1}} - 2\frac{\mu}{\sqrt{k}\ \varepsilon^2}$$

- Enfin, comme $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt{k})^{\alpha-1}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} -2\frac{\mu}{\sqrt{k}\ \varepsilon^2} = 0$, on obtient :

$$\lim_{k\to+\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{(\alpha-1)\ \varepsilon}\ \frac{1}{(\sqrt{k})^{\alpha-1}} - 2\frac{\mu}{\sqrt{k}\ \varepsilon^2}\right) \ =\ 1$$

$$\boxed{\text{On en conclut, par théorème d'encadrement : } \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\ \frac{T_k}{k} \in \left]\mu - 3\varepsilon, \mu + 3\varepsilon\right[\ \right]\right) \ =\ 1}$$

□