DS5 (version B)

Problème 1

Partie I : Etude d'une matrice A

On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. a) On compile le code **Python** suivant :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A = np.array([[2,-2,2],[1,1,2],[-2,0,-3]])
print(al.matrix_power(A,3))
```

et on obtient l'affichage :

```
[[ 2 -2  2]
 [ 1  1  2]
 [-2  0 -3]]
```

Traduire ce résultat par une égalité entre deux matrices.

b) En déduire les valeurs propres possibles de A.

2. a) Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ et une base de chacun des sous-espaces propres de A.

b) Démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient $A = PDP^{-1}$. On explicitera les matrices P et D.

Partie II : Exponentielle d'une matrice carrée

Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, et si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix},$$

on dit que la suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite coefficient par coefficient*, et on le note

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Si $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on pose, pour tout entier naturel n,

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k.$$

Lorsque $(S_n(M))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite coefficient par coefficient, on note e^M cette limite.

3. Deux résultats théoriques. On utilisera les notations du préambule de la partie II pour les preuves.

a) Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et soit (α_n) une suite réelle convergente, de limite ℓ. Montrer que la suite de matrices $(\alpha_n M)$ admet une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n M = \ell M$$

b) Soient (M_n) et (M'_n) deux suites de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui admettent chacune une limite coefficient par coefficient. On note $\lim_{n\to+\infty} M_n = M$ et $\lim_{n\to+\infty} M'_n = M'$. Montrer que les suites de matrices $(M_n+M'_n)$ et $(M_nM'_n)$ admettent chacune une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n\to+\infty} M_n + M'_n = M + M' \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} M_nM'_n = MM'$$

Les candidat·es devront référer précisément à ces questions lorsque ces résultats seront utilisés.

4. Montrer que, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, alors e^D existe et vaut $\mathrm{e}^D = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^b & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^c \end{pmatrix}$.

Ainsi, on a montré que l'exponentielle d'une matrice diagonale est une matrice diagonale.

5. Dans cette question uniquement, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et M^3. En déduire la matrice M^k pour tout entier naturel k.

b) Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression de $S_n(M)$. En déduire l'existence et l'expression de la matrice e^M.

6. Dans cette question uniquement, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et M^3 en fonction de M.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Conjecturer une formule simple pour l'expression de M^k puis la démontrer par récurrence.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$S_n(M) = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M$$

d) En déduire que e^M existe et que

$$\mathrm{e}^M = I + \frac{\mathrm{e}^3 - 1}{3} M$$

7. Dans cette question, on considère la matrice A de la Partie I et on fixe un réel t.

a) Déduire de la question ***2.b)*** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1}$$

b) Conclure que e^{tA} existe et en donner une expression sous la forme $\mathrm{e}^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$.

On explicitera la matrice $\Delta(t)$ sous forme de tableau matriciel en fonction de t.

En généralisant ce résultat, on montre alors que l'exponentielle d'une matrice diagonalisable est une matrice diagonalisable (on ne demande pas de le faire).

Partie III : Etude d'un système différentiel linéaire

On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & 2x(t) & - & 2y(t) & + & 2z(t) \\ y'(t) & = & x(t) & + & y(t) & + & 2z(t) \\ z'(t) & = & -2x(t) & & & - & 3z(t) \end{array} \right.$$

où les inconnues x, y, z sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

8. Montrer que X est solution de (S) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$, où A est la matrice étudiée dans la partie I.

9. Déterminer l'ensemble des états d'équilibre du système différentiel linéaire (S).

10. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soient X et Y deux solutions de (S). On suppose que $X(t_0) = Y(t_0)$. Que peut-on en déduire sur X et Y ?

11. Montrer que les solutions de (S) sont de la forme

$$X(t) = \alpha \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma \mathrm{e}^{t} U_1, \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

où $U_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

12. On considère dans cette question deux problèmes de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_1) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{P}_2) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

a) ***i)*** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$, que l'on notera X_1.

ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente. Expliciter le point limite (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3). Quelle propriété possède ce point limite vis-à-vis du système différentiel linéaire (S) ?

b) ***i)*** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_2)$, que l'on notera X_2.

ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_2 est divergente.

c) On a représenté page suivante les tracés de 4 solutions du système différentiel linéaire (S). Dire quels sont les tracés associés aux solutions X_1 et X_2 étudiées ci-dessus. On justifiera les réponses.

13. Dans cette question, on souhaite faire le lien entre la résolution d'un système différentiel linéaire (homogène) et l'exponentielle de matrice introduite à la partie II.

a) On fixe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et on considère la solution de (S) :

$$X(t) = \alpha \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma \mathrm{e}^{t} U_1$$

On pose $C = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \mathrm{e}^{tA} C$.

b) Commenter le résultat obtenu à la question précédente, au regard des résultats du cours sur les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficient constant.

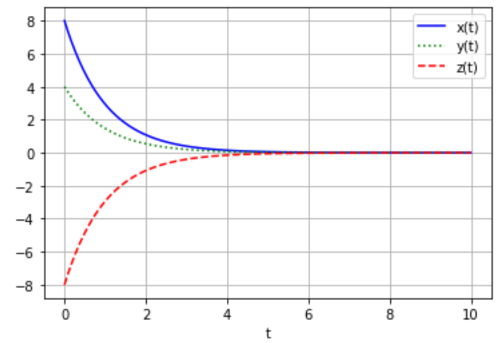

FIG. 1 Tracé 1

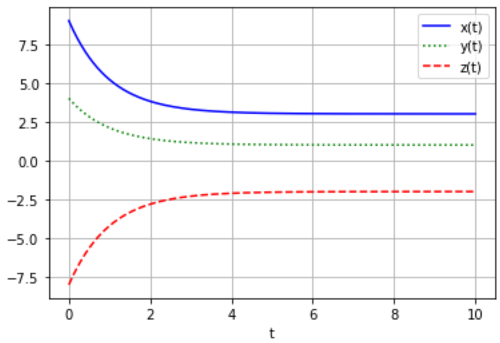

FIG. 2 Tracé 2

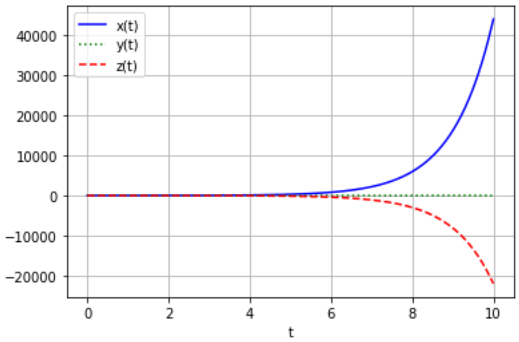

FIG. 3 Tracé 3

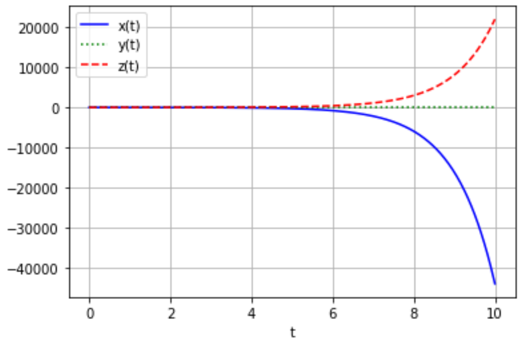

FIG. 4 Tracé 4

Problème 2 - Une propriété limite des lois de Pareto

Question préliminaire

Soit g une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs réelles.

1. a) Montrer que pour tout α et β dans I tels que $\alpha < \beta$:

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} g(t)\ dt = \int_{0}^{1} g\big(\alpha + (\beta - \alpha)x\big)\ dx$$

b) Soit a, b, c, d dans I tels que $a < c < d < b$.
On suppose g décroissante sur I, établir l'encadrement :

$$\frac{1}{b - c} \int_{c}^{b} g(t)\ dt \leqslant \frac{1}{d - c} \int_{c}^{d} g(t)\ dt \leqslant \frac{1}{d - a} \int_{a}^{d} g(t)\ dt$$

Partie I - Partie fractionnaire d'une variable à densité

- Pour tout réel x positif ou nul :
  - on note $[x]$ la *partie entière* de x. On rappelle qu'il s'agit de l'unique entier naturel n qui vérifie l'encadrement : $n \leqslant x < n + 1$.
  - on note $\{x\} = x - [x]$, que l'on appelle la *partie fractionnaire* de x.

  Par exemple, si $x = 12,34$, alors $[x] = 12$ et $\{x\} = 0,34$.

- Dans cette partie, X désigne une variable aléatoire à valeurs réelles admettant une densité f qui vérifie les propriétés :
  - f est nulle sur $]-\infty, 0[$;
  - la restriction de f à $[0, +\infty[$ est continue et décroissante.

  On pose $M = f(0)$, c'est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Soit $Y = \{X\} = X - [X]$, la variable aléatoire égale à la partie fractionnaire de X.
On note F_Y la fonction de répartition de Y.

2. Que vaut $F_Y(y)$ lorsque $y < 0$? Que vaut $F_Y(y)$ lorsque $y \geqslant 1$?
On justifiera les réponses.

3. Justifier l'égalité entre évènements : $[Y = 0] = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} [X = n]$.
En déduire : $F_Y(0) = 0$.

4. Soit y un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

a) Montrer l'égalité : $F_Y(y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \displaystyle\int_n^{n+y} f(t)\, dt$.

b) Montrer, en utilisant la question préliminaire, les inégalités :

- Pour tout n entier naturel : $\displaystyle\int_n^{n+y} f(t)\, dt \geqslant y \int_n^{n+1} f(t)\, dt$.
- Pour tout n entier naturel non nul : $\displaystyle\int_n^{n+y} f(t)\, dt \leqslant y \int_{n-1+y}^{n+y} f(t)\, dt$.

c) En déduire : $y \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt \leqslant F_Y(y) \leqslant \int_0^y f(t)\, dt + y \int_y^{+\infty} f(t)\, dt$, puis l'encadrement :

$$y \leqslant F_Y(y) \leqslant y + M$$

Partie II - Premier chiffre significatif d'une variable de Pareto

Pour tout réel λ strictement positif, on définit la fonction g_λ sur $\mathbb{R}$ par $g_\lambda : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x^{\lambda+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

5. Montrer que pour tout réel λ strictement positif, g_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ (loi dite *de Pareto*).

Dans toute la suite, on note Z_λ une variable aléatoire admettant g_λ pour densité.

6. Déterminer la fonction de répartition G_λ de Z_λ.

7. On note ln la fonction *logarithme népérien*, et log la fonction *logarithme décimal*.
Cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$ par : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ pour tout réel x strictement positif.

On pose $X_\lambda = \log(Z_\lambda)$, et on note F_λ la fonction de répartition de X_λ.

a) Établir, pour tout réel x, l'égalité : $F_\lambda(x) = G_\lambda(10^x)$.

b) En déduire que X_λ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre en fonction de λ.

8. ***a)*** On pose $Y_\lambda = \{X_\lambda\}$, la partie fractionnaire de X_λ.

Montrer, en utilisant les résultats de la partie I, que pour tout réel y de l'intervalle $]0,1[$:

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \mathbb{P}\big([Y_\lambda \leqslant y]\big) = y$$

b) `(CUBES UNIQUEMENT)` En déduire que, lorsque λ tend vers 0, Y_λ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

9. Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on note $\alpha(x)$ le premier chiffre dans l'écriture décimale de x. C'est un entier de l'intervalle $[\![1,9]\!]$.

Par exemple, $\alpha(50) = 5$ et $\alpha(213,43) = 2$.

a) Pour tout $k \in [\![1,9]\!]$, montrer l'équivalence :

$$\alpha(x) = k \iff \big\{\log(x)\big\} \in \big[\log(k), \log(k+1)\big[$$

b) On note $C_\lambda = \alpha\big(Z_\lambda\big)$ la variable aléatoire prenant comme valeur le premier chiffre de Z_λ.

Montrer, pour tout $k \in [\![1,9]\!]$: $\displaystyle\lim_{\lambda \to 0^+} \mathbb{P}\big([C_\lambda = k]\big) = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Cette loi limite obtenue pour le premier chiffre de Z_λ est appelée *loi de Benford*.