DS5 barème (version A)

Problème 1 (sujet maison)

Partie I : Etude d'une matrice A

On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. a) On compile le code **Python** suivant :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A = np.array([[2,-2,2],[1,1,2],[-2,0,-3]])
print(al.matrix_power(A,3))
```

et on obtient l'affichage :

```
[[ 2 -2  2]
 [ 1  1  2]
 [-2  0 -3]]
```

Traduire ce résultat par une égalité entre deux matrices.

- **1 pt :** $A^3 = A$

b) En déduire les valeurs propres possibles de A.

- **1 pt :** $P(X) = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ **est un polynôme annulateur de** A
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(A) \subset \{$**racines de** $P(X)\}$
- **1 pt : les valeurs propres possibles de** A **sont** -1, 0 **et** 1

2. a) Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ et une base de chacun des sous-espaces propres de A.

- **2 pts :** $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt :** $E_{-1}(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ **donc** -1 **est valeur propre de** A
- **1 pt :** $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ **est une base de** $E_{-1}(A)$
- **1 pt :** $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt :** $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

b) Démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient $A = PDP^{-1}$. On explicitera les matrices P et D.

- **1 pt : La matrice** A **est carrée d'ordre** 3 **et admet trois valeurs propres distinctes donc** A **est diagonalisable**

- **1 pt :** $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **et** $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt : Par la formule de changement de base, on a bien** $A = PDP^{-1}$
  ou P **est obtenue par concaténation des bases des sous-espaces propres**

Partie II : Exponentielle d'une matrice carrée

Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, et si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix},$$

on dit que la suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite coefficient par coefficient*, et on le note

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Si $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on pose, pour tout entier naturel n,

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k.$$

Lorsque $(S_n(M))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite coefficient par coefficient, on note e^M cette limite.

3. Deux résultats théoriques. On utilisera les notations du préambule de la partie II pour les preuves.

a) Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et soit (α_n) une suite réelle convergente, de limite ℓ. Montrer que la suite de matrices $(\alpha_n M)$ admet une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n M = \ell M$$

- **2 pts : calcul correct**

b) Soient (M_n) et (M'_n) deux suites de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui admettent chacune une limite coefficient par coefficient. On note $\lim_{n\to+\infty} M_n = M$ et $\lim_{n\to+\infty} M'_n = M'$. Montrer que les suites de matrices $(M_n + M'_n)$ et $(M_n M'_n)$ admettent chacune une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n\to+\infty} M_n + M'_n = M + M' \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} M_n M'_n = MM'$$

- **1 pt : calcul correct pour la somme**
- **2 pts : calcul correct pour le produit**

Les candidat·es devront référer précisément à ces questions lorsque ces résultats seront utilisés.

4. Montrer que, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, alors e^D existe et vaut $\mathrm{e}^D = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^b & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^c \end{pmatrix}$.

Ainsi, on a montré que l'exponentielle d'une matrice diagonale est une matrice diagonale.

- **1 pt :** $D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}$

- **1 pt :** $S_n(D) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}a^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}b^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}c^k \end{pmatrix}$
- **1 pt : reconnaissance des sommes partielles de séries exponentielles**

5. Dans cette question uniquement, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et M^3. En déduire la matrice M^k pour tout entier naturel k.

- **1 pt :** $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt : synthèse**

b) Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression de $S_n(M)$. En déduire l'existence et l'expression de la matrice e^M.

- **2 pts :** $S_n(M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt : e^M existe et e^M** $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. Dans cette question uniquement, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et M^3 en fonction de M.

- **1 pt :** $M^2 = 3M$
- **1 pt :** $M^3 = 3^2M$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Conjecturer une formule simple pour l'expression de M^k puis la démontrer par récurrence.

- **1 pt : conjecture, pour tout** $k \in \mathbb{N}^*$**,** $M^k = 3^{k-1}M$
- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : hérédité**

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$S_n(M) = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M$$

- **2 pts : calcul**

d) En déduire que e^M existe et que

$$\mathrm{e}^M = I + \frac{\mathrm{e}^3 - 1}{3} M$$

- **1 pt :** $\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\left(\mathbf{e}^3 - 1\right)$
- **1 pt : d'après la question *3.a)*,** $\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathbf{e}^3-1}{3} M$
- **1 pt : d'après la question *3.b)*,** $S_n(M) = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I + \frac{\mathbf{e}^3-1}{3} M$

7. Dans cette question, on considère la matrice A de la Partie I et on fixe un réel t.

a) Déduire de la question ***2.b)*** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1}$$

- **1 pt :** $A = PDP^{-1}$**. On en déduit par récurrence immédiate que, pour tout** $k \in \mathbb{N}$**,** $A^k = PD^kP^{-1}$
- **1 pt :** $S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1}$

b) Conclure que e^{tA} existe et en donner une expression sous la forme $\mathrm{e}^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$.
On explicitera la matrice $\Delta(t)$ sous forme de tableau matriciel en fonction de t.

- **1 pt : D'après la question *4*, la matrice** $\mathbf{e}^{tD}$ **existe et vaut**

$$\mathbf{e}^{tD} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^{0} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}^{t} \end{pmatrix}$$

- **1 pt : D'après la question *3.b)* et la question précédente, on a alors**

$$S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\mathbf{e}^{tD}P^{-1}$$

- **1 pt :** $\mathbf{e}^{tA}$ **existe et** $\mathbf{e}^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$ **avec**

$$\Delta(t) = \mathbf{e}^{tD} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}^{t} \end{pmatrix}$$

En généralisant ce résultat, on montre alors que l'exponentielle d'une matrice diagonalisable est une matrice diagonalisable (on ne demande pas de le faire).

Partie III : Etude d'un système différentiel linéaire

On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & 2x(t) & - & 2y(t) & + & 2z(t) \\ y'(t) & = & x(t) & + & y(t) & + & 2z(t) \\ z'(t) & = & -2x(t) & & & - & 3z(t) \end{array} \right.$$

où les inconnues x, y, z sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

8. Montrer que X est solution de (S) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$, où A est la matrice étudiée dans la partie I.

- **1 pt : équivalence bien écrite**

9. Déterminer l'ensemble des états d'équilibre du système différentiel linéaire (S).

- **1 pt : (u, v, w) est un état d'équilibre de (S) $\iff$ $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in E_0(A)$**
- **1 pt : l'ensemble des états d'équilibre de (S) est**

$$\mathrm{Vect}\left((3, 1, -2)\right) = \{\lambda(3, 1, -2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

10. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soient X et Y deux solutions de (S). On suppose que $X(t_0) = Y(t_0)$. Que peut-on en déduire sur X et Y ?

- **1 pt : X et Y sont solutions du même problème de Cauchy**
- **1 pt : tout problème de Cauchy admet une unique solution**

11. Montrer que les solutions de (S) sont de la forme

$$X(t) = \alpha \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma \mathrm{e}^{t} U_1, \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

où $U_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- **1 pt : La matrice A est diagonalisable (cf question *2.b)*)**
- **1 pt : on a montré à la question *2.a)* que (U_{-1}, U_0, U_1) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.**

12. On considère dans cette question deux problèmes de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_1) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{P}_2) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

a) ***i)*** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$, que l'on notera X_1.

- **1 pt : écriture correcte du système** $\left\{\begin{array}{rrrl} 2\alpha & +3\beta & -2\gamma & = 9 \\ \alpha & + \ \beta & & = 4 \\ -2\alpha & -2\beta & + \ \gamma & = -8 \end{array}\right.$
- **1 pt : $\alpha U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$** $\iff \left\{\begin{array}{rrrl} \alpha & & & = 3 \\ & \beta & & = 1 \\ & & \gamma & = 0 \end{array}\right.$
- **1 pt : $X_1(t) = 3\mathrm{e}^{-t} U_{-1} + U_0 = \begin{pmatrix} 6\mathrm{e}^{-t} + 3 \\ 3\mathrm{e}^{-t} + 1 \\ -6\mathrm{e}^{-t} - 2 \end{pmatrix}$**

ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente. Expliciter le point limite (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3). Quelle propriété possède ce point limite vis-à-vis du système différentiel linéaire (S) ?

- **1 pt : $x_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 3$, $y_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et $z_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} -2$. Ainsi la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente, de point limite $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (3, 1, -2)$**
- **1 pt : d'après la question *9*, ce point limite est un état d'équilibre du système différentiel (S)**

b) ***i)*** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_2)$, que l'on notera X_2.

- **1 pt : écriture correcte du système** $\begin{cases} 2\alpha & +3\beta & -2\gamma = 3 \\ \alpha & + \ \beta & = 2 \\ -2\alpha & -2\beta & + \ \gamma = -3 \end{cases}$

- **1 pt :** $\alpha U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha & & = 1 \\ & \beta & = 1 \\ & & \gamma = 1 \end{cases}$

- **1 pt :** $X_2(t) = \mathbf{e}^{-t} U_{-1} + U_0 + \mathbf{e}^t U_1 = \begin{pmatrix} 2\mathbf{e}^{-t} + 3 - 2\mathbf{e}^t \\ \mathbf{e}^{-t} + 1 \\ -2\mathbf{e}^{-t} - 2 + \mathbf{e}^t \end{pmatrix}$

ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_2 est divergente.

- **1 pt :** $z_2(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$**. La trajectoire associée à la solution** X_2 **est divergente.**

c) On a représenté page suivante les tracés de 4 solutions du système différentiel linéaire (S). Dire quels sont les tracés associés aux solutions X_1 et X_2 étudiées ci-dessus. On justifiera les réponses.

- **1 pt : La figure** 4 **est la seule où l'on a** $z(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$**. Ainsi, cette figure correspond nécessairement à la solution** X_2**.**
- **2 pts : Dans la figure** 3**, on a** $z(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$**. Donc cette figure correspond à une trajectoire divergente. Ainsi, cette figure ne correspond pas à la solution** X_1**.**
  Dans la figure 1**, on a** $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} z(t) = 0$**. Cette propriété n'est pas vérifiée par la solution** X_1 **donc cette figure ne correspond pas à** X_1**.**
  Par élimination, la figure 2 **correspond à la solution** X_1**. De plus, en lisant approximativement les valeurs limites sur le graphe, le tracé est cohérent avec le fait que** $x_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 3$**,** $y_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ **et** $z_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} -2$**.**

13. Dans cette question, on souhaite faire le lien entre la résolution d'un système différentiel linéaire (homogène) et l'exponentielle de matrice introduite à la partie II.

a) On fixe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et on considère la solution de (S) :

$$X(t) = \alpha \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma \mathrm{e}^t U_1$$

On pose $C = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \mathrm{e}^{tA} C$.

- **2 pts : calcul correct**

b) Commenter le résultat obtenu à la question précédente, au regard des résultats du cours sur les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficient constant.

- **1 pt : la formule obtenue est analogue**

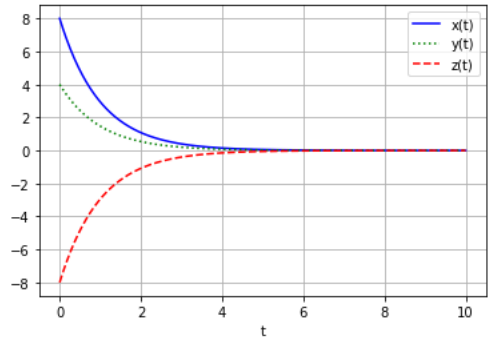

Fig. 1 Tracé 1

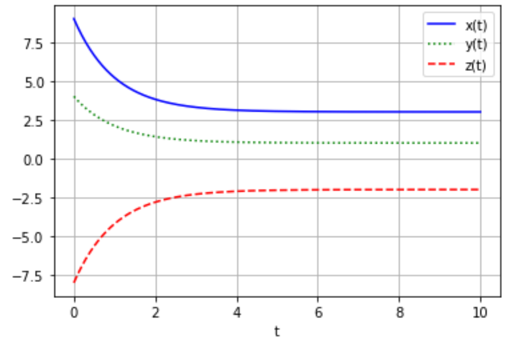

Fig. 2 Tracé 2

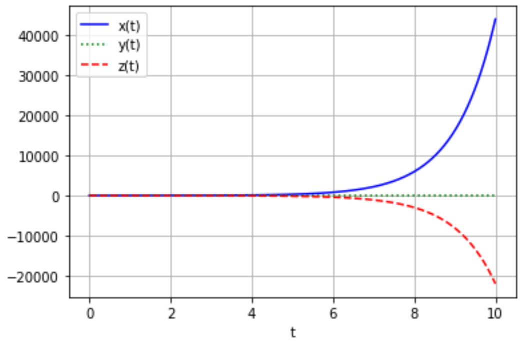

Fig. 3 Tracé 3

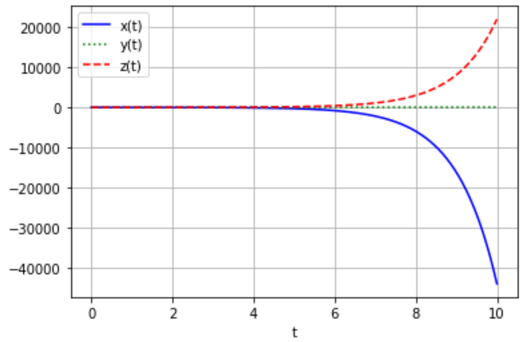

Fig. 4 Tracé 4

Exercice 2 (provenance inconnue + sujet maison)

1. On pose f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x\ \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que f est une densité de probabilité.

- **1 pt : continuité sur** $]-\infty, 0[$ **et** $]0, +\infty[$ **(ouverts !)**
- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$ **par disjonction de cas**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ \int_0^{+\infty} f(t)\ dt$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^A f(t)\ dt = -\exp\left(-\frac{A^2}{2}\right) + 1 \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

Dans la suite de cette question, on note X une variable aléatoire admettant f pour densité.

b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

- **1 pt :** $X(\Omega) = [0, +\infty[$ **car** f **est nulle en dehors de** $[0, +\infty[$
- **1 pt : si** $x \in\ ]-\infty, 0[$, $F_X(x) = 0$
- **1 pt : si** $x \in [0, +\infty[$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \int_0^x f(t)\ dt$ **(car** f **est nulle en dehors de** $[0, +\infty[$**)**
- **1 pt : puis** $= 1 - \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$

c) On pose $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition de Y. Reconnaître la loi de Y.

- **1 pt : ensemble image $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$**
- **1 pt : $F_Y(x) = 0$ si $x < 0$**
- **1 pt : $F_Y(x) = \mathbb{P}([-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}]) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$ si $x \in [0, +\infty[$**
- **1 pt : $F_Y(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ si $x \in [0, +\infty[$**
- **1 pt : reconnaître la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$**

2. On pose g la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \alpha x^{-4} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

a) Pour quelle valeur de α la fonction g est une densité de probabilité ?

- **1 pt : $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-4}\ dx = \frac{1}{3}$**
- **1 pt : si g est une densité de probabilité, alors $\alpha = 3$**
- **2 pts : réciproque si $\alpha = 3$**

Dans la suite de cette question, on suppose que α prend cette valeur et on note Z une variable aléatoire admettant g pour densité.

b) Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z.

- **1 pt : $Z(\Omega) = [1, +\infty[$ car g est nulle en dehors de $[1, +\infty[$**
- **1 pt : si $x \in]-\infty, 1[$, $F_Z(x) = 0$**
- **1 pt : si $x \in [1, +\infty[$, $F_Z(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)\ dt = \int_1^x g(t)\ dt$ (car g est nulle en dehors de $[1, +\infty[$)**
- **1 pt : puis $= 1 - \dfrac{1}{x^3}$**

c) On pose $W = -2Z + 1$. Déterminer la fonction de répartition de W puis montrer que W est une variable aléatoire à densité et expliciter une densité de W.

- **1 pt : ensemble image $W(\Omega) =]-\infty, -1]$**
- **1 pt : $F_W(w) = 1$ si $w > -1$**
- **1 pt : $F_W(w) = \frac{2^3}{(1-w)^3}$ si $w \leqslant -1$**
- **1 pt : argument Z est à densité**
- **1 pt : F_W est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$**
- **1 pt : F_W est continue sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : On pose**

$$f : w \mapsto \begin{cases} 3 \times 2^3 (1-w)^{-4} & \textbf{si } w < -1 \\ 0 & \textbf{si } w > -1 \end{cases}$$

puis on pose $f(-1) = 0$. La fonction f ainsi définie est une densité de W

Exercice 3 (EML 2018)

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \; f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

- **1 pt : f dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$**
- **1 pt : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$**
- **1 pt : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$**

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

- **3 pts : théorème de la bijection sur $]0,1[$ (1 pt hypothèses, 1 pt $f(]0,1[) =]1,+\infty[$, 1 pt $2 \in]1,+\infty[$)**
- **1 pt : théorème de la bijection sur $]1,+\infty[$**

3. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

- **1 pt : $f(2) \leqslant 2$**
- **1 pt : $f(4) \geqslant 2$**
- **1 pt : restriction de f à $]1,+\infty[$ strictement croissante sur $]1,+\infty[$**

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt$$

4. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \; \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

- **1 pt : $\dfrac{1}{f}$ admet une primitive G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt : Φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ (par composition)**
- **1 pt : $\Phi'(x) = \dfrac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$**

5. En déduire les variations de Φ sur $]0,+\infty[$.

- **1 pt : signe de $\Phi'(x)$ et variations de Φ**

6. Montrer : $\forall x \in]0,+\infty[, \; 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

- **1 pt : $0 \leqslant \dfrac{1}{f(t)} \leqslant 1$ par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant**
- **1 pt : $0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$**

7. a) Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

- 1 pt : théorème d'encadrement

b) Montrer : $\lim\limits_{x \to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

- 1 pt

8. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

- 4 pts : 1 pt tangente en 0, 1 pt tangente en 2, 1 pt cohérence courbe Φ, 1 pt propreté