# DS5 commenté (version A)

## Problème 1

### Partie I : Etude d'une matrice $A$

On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

***1. a)*** On compile le code **Python** suivant :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A = np.array([[2,-2,2],[1,1,2],[-2,0,-3]])
print(al.matrix_power(A,3))
```

et on obtient l'affichage :

```
[[ 2 -2  2]
 [ 1  1  2]
 [-2  0 -3]]
```

Traduire ce résultat par une égalité entre deux matrices.

***b)*** En déduire les valeurs propres possibles de $A$.

**Commentaire**

Il serait bon de factoriser **complètement** le polynôme annulateur trouvé :

$$P(X) = X^3 - X = X(X^2 - 1) = X(X-1)(X+1)$$

L'erreur désastreuse ici consiste à écrire que

$$\cancel{\mathrm{Sp}(A) = \{\text{racines de } P(X)\}}$$

***2. a)*** Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ et une base de chacun des sous-espaces propres de $A$.

**Commentaire**

- Comme on demande une base, on peut penser à directement calculer les sous-espaces propres et à remarquer qu'ils ne sont pas réduits au vecteur nul pour vérifier que les valeurs propres possibles sont bien des valeurs propres.
- Si on commence par calculer les rangs, il faut profiter de ces calculs pour ceux qui suivent : les opérations du pivot de Gauss sont les même, il ne faut pas tout refaire car c'est une grosse perte de temps (c'est long de bien écrire le pivot de Gauss).

***b)*** Démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient $A = PDP^{-1}$. On explicitera les matrices $P$ et $D$.

## Partie II : Exponentielle d'une matrice carrée

Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, et si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix},$$

on dit que la suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite coefficient par coefficient*, et on le note

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Si $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on pose, pour tout entier naturel $n$,

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k.$$

Lorsque $(S_n(M))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite coefficient par coefficient, on note $\mathrm{e}^M$ cette limite.

**Commentaire**

Une très mauvaise compréhension de l'énoncé, probablement due à un manque de réflexion sur l'énoncé et une précipitation à vouloir répondre aux questions. Il faut changer de stratégie car elle ne fonctionne pas. Si une nouvelle notion est introduite, il faut faire attention : aucun théorème du cours ne s'applique puisqu'il ne s'agit pas du cours. Dans ce cas, il faut
- soit revenir à la définition
- soit utiliser un résultat démontré à une question précédente

**3.** Deux résultats théoriques. On utilisera les notations du préambule de la partie II pour les preuves.

**a)** Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et soit $(\alpha_n)$ une suite réelle convergente, de limite $\ell$. Montrer que la suite de matrices $(\alpha_n M)$ admet une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n M = \ell M$$

**b)** Soient $(M_n)$ et $(M'_n)$ deux suites de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui admettent chacune une limite coefficient par coefficient. On note $\lim_{n\to+\infty} M_n = M$ et $\lim_{n\to+\infty} M'_n = M'$. Montrer que les suites de matrices $(M_n + M'_n)$ et $(M_n M'_n)$ admettent chacune une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n\to+\infty} M_n + M'_n = M + M' \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} M_n M'_n = MM'$$

*Les candidat·es devront référer précisément à ces questions lorsque ces résultats seront utilisés.*

**4.** Montrer que, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{e}^D$ existe et vaut $\mathrm{e}^D = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^b & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^c \end{pmatrix}$.

*Ainsi, on a montré que l'exponentielle d'une matrice diagonale est une matrice diagonale.*

**5.** Dans cette question uniquement, la matrice $M$ est donnée par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

***a)*** Calculer $M^2$ et $M^3$. En déduire la matrice $M^k$ pour tout entier naturel $k$.

***b)*** Donner, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, l'expression de $S_n(M)$. En déduire l'existence et l'expression de la matrice $\mathrm{e}^M$.

**Commentaire**

Beaucoup ont écrit $S_n(M) = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}M^k$. Il s'agit d'une confusion totale entre la variable $n$ qui est fixée (à un entier plus grand que 2) et la variable $k$ qui est liée à la somme et qui **varie** toujours de 0 à $n$.
Quand on demande « l'expression », il faut comprendre « sous forme de tableau matriciel » si il n'y a pas de consigne plus précise et que cette expression est simple.

***6.*** Dans cette question uniquement, la matrice $M$ est donnée par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

***a)*** Calculer $M^2$ et $M^3$ en fonction de $M$.

**Commentaire**

Les résultats qui n'étaient pas en fonction de $M$ ont rapporté 0 points.

***b)*** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Conjecturer une formule simple pour l'expression de $M^k$ puis la démontrer par récurrence.

**Commentaire**

L'écriture $3^0M = IM = M$ est fausse et a été sanctionnée. Bien sûr, il fallait écrire $3^0 = 1$.
Conjecturer que $M^k = 3M^{k-1}$ n'est pas utile pour la question suivante donc ce n'est pas ce qui était attendu. Il fallait bien sûr donner une expression en fonction de $M$ et pas de $M^{k-1}$, comme précisé à la question précédente.

***c)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$S_n(M) = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M$$

***d)*** En déduire que $\mathrm{e}^M$ existe et que

$$\mathrm{e}^M = I + \frac{\mathrm{e}^3 - 1}{3} M$$

***7.*** Dans cette question, on considère la matrice $A$ de la Partie I et on fixe un réel $t$.

***a)*** Déduire de la question ***2.b)*** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1}$$

***b)*** Conclure que $\mathrm{e}^{tA}$ existe et en donner une expression sous la forme $\mathrm{e}^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$.
On explicitera la matrice $\Delta(t)$ sous forme de tableau matriciel en fonction de $t$.

*En généralisant ce résultat, on montre alors que l'exponentielle d'une matrice diagonalisable est une matrice diagonalisable (on ne demande pas de le faire).*

## Partie III : Etude d'un système différentiel linéaire

On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & 2x(t) & - & 2y(t) & + & 2z(t) \\ y'(t) & = & x(t) & + & y(t) & + & 2z(t) \\ z'(t) & = & -2x(t) & & & - & 3z(t) \end{array} \right.$$

où les inconnues $x, y, z$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

***8.*** Montrer que $X$ est solution de $(S)$ si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$, où $A$ est la matrice étudiée dans la partie I.

> **Commentaire**
>
> Il faut démontrer que $X$ est solution de $(S)$ si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$. Ainsi, toutes les preuves par équivalence qui commencent par
>
> « $X$ est solution de $(S) \iff$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$ »
>
> ou, de manière plus relâchée (mais c'est la même chose qui souhaite être dite),
>
> « $(S) \iff X'(t) = AX(t)$ »
>
> sont évidemment fausses.

***9.*** Déterminer l'ensemble des états d'équilibre du système différentiel linéaire $(S)$.

> **Commentaire**
>
> Trouver les états d'équilibre, c'est déterminer $E_0(A)$. Le calcul avait donc déjà été fait au début du problème.

***10.*** Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soient $X$ et $Y$ deux solutions de $(S)$. On suppose que $X(t_0) = Y(t_0)$. Que peut-on en déduire sur $X$ et $Y$ ?

> **Commentaire**
>
> Il faut essayer d'être très précis sur cette question de cours.

***11.*** Montrer que les solutions de $(S)$ sont de la forme

$$X(t) = \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^{t} U_1, \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

où $U_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

***12.*** On considère dans cette question deux problèmes de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_1) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{P}_2) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

***a)*** ***i)*** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$, que l'on notera $X_1$.

***ii)*** Montrer que la trajectoire associée à la solution $X_1$ est convergente. Expliciter le point limite $(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$. Quelle propriété possède ce point limite vis-à-vis du système différentiel linéaire $(S)$ ?

> **Commentaire**
>
> Attention à bien passer en coordonnées pour le calcul du point limite. On ne fait pas de limite de vecteurs dans le cours.

***b)*** ***i)*** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_2)$, que l'on notera $X_2$.

***ii)*** Montrer que la trajectoire associée à la solution $X_2$ est divergente.

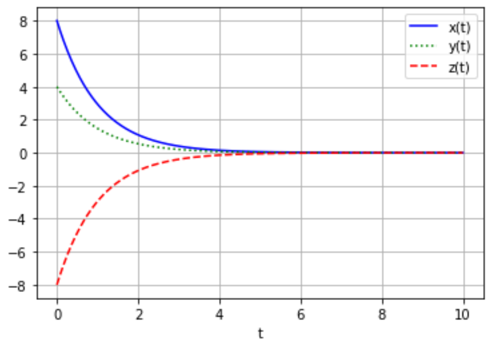


**Fig. 1** Tracé 1

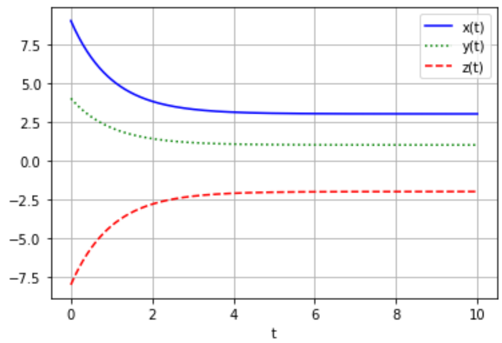


**Fig. 2** Tracé 2

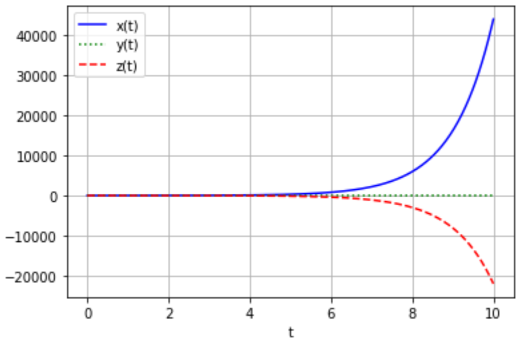


**Fig. 3** Tracé 3

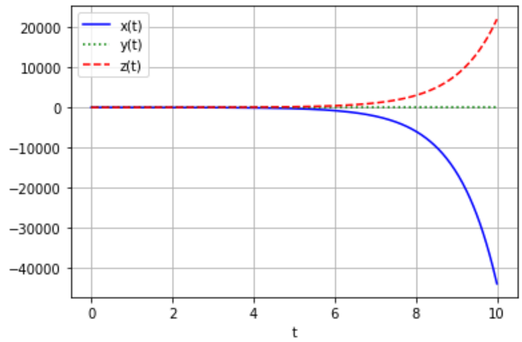


**Fig. 4** Tracé 4

***c)*** On a représenté page suivante les tracés de 4 solutions du système différentiel linéaire $(S)$. Dire quels sont les tracés associés aux solutions $X_1$ et $X_2$ étudiées ci-dessus. On justifiera les réponses.

***13.*** Dans cette question, on souhaite faire le lien entre la résolution d'un système différentiel linéaire (homogène) et l'exponentielle de matrice introduite à la partie II.

***a)*** On fixe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et on considère la solution de $(S)$ :

$$X(t) = \alpha \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma \mathrm{e}^{t} U_1$$

On pose $C = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \mathrm{e}^{tA} C$.

***b)*** Commenter le résultat obtenu à la question précédente, au regard des résultats du cours sur les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficient constant.

# Exercice 2

*1.* On pose $f$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*a)* Montrer que $f$ est une densité de probabilité.
*Dans la suite de cette question, on note $X$ une variable aléatoire admettant $f$ pour densité.*

*b)* Déterminer la fonction de répartition $F_X$ de $X$.

*c)* On pose $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition de $Y$. Reconnaître la loi de $Y$.

*2.* On pose $g$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \alpha x^{-4} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

*a)* Pour quelle valeur de $\alpha$ la fonction $g$ est une densité de probabilité ?

**Commentaire**

Il vaut mieux d'abord supposer que $g$ est une densité, déterminer $\alpha = 3$, puis vérifier que dans ce cas, $g$ est bien une densité.

*Dans la suite de cette question, on suppose que $\alpha$ prend cette valeur et on note $Z$ une variable aléatoire admettant $g$ pour densité.*

*b)* Déterminer la fonction de répartition $F_Z$ de $Z$.

*c)* On pose $W = -2Z + 1$. Déterminer la fonction de répartition de $W$ puis montrer que $W$ est une variable aléatoire à densité et expliciter une densité de $W$.

# Exercice 3

Dans tout cet exercice, $f$ désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ f(x) = x - \ln(x)$$

## Partie I : Étude de la fonction $f$

*1.* Dresser le tableau de variations de $f$ en précisant ses limites en $0$ et en $+\infty$.

**Commentaire**

Il est impensable de se tromper sur le signe de la dérivée dans cet exercice.

*2.* Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in\ ]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note $a$ et $b$, telles que $0 < a < 1 < b$.

*3.* Montrer : $b \in [2, 4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

## Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $\Phi$ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt$$

***4.*** Montrer que $\Phi$ est bien définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in\, ]0,+\infty[,\ \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

***5.*** En déduire les variations de $\Phi$ sur $]0,+\infty[$.

***6.*** Montrer : $\forall x \in\, ]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

***7.*** ***a)*** Montrer que $\Phi$ est prolongeable par continuité en 0 (*i.e.* $\Phi$ admet une limite finie en 0).
On note encore $\Phi$ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

***b)*** Montrer : $\lim\limits_{x \to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction $\Phi$ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

***8.*** On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $\Phi$. On fera apparaître en particulier les tangentes et demi-tangentes remarquables.